金利リスクを考慮したリアル・オプション問題に関する研究*

Real Option Problems with Stochastic Interest Rates*

高橋 啓**・赤松 隆***・水谷 剛****

By Kei TAKAHASHI** • Takashi AKAMATSU*** • Go MIZUTANI****

１．はじめに

社会基盤整備事業においては，経済活動に伴い様々なキャッシュ・フローが発生する．例えば，有料道路事業では，初期に建設費用を投資し，道路建設後に，利用者からの料金収入に加え，道路維持管理費用が発生する．また，道路公団のように多くの負債を抱えている場合，道路建設と並行して，負債の返済を効率よく行う必要がある．従来，これらの社会基盤整備事業の事業価値評価ならびに最適意思決定問題は，リアル・オプション問題として広く研究されている．例えば Dixit&Pindyck[1)]では，不確実性下における企業の最適投資政策について分析している．そこでは，事業の現在価値を求めるために確定的な金利を用いているが，実際には，確率的な市場金利で割引を行う必要がある．

市場金利は時間とともに変動しているため，事業価値は金利変動のリスクを被る．また，市場には満期の異なる金利が多数存在し，それらの金利は無裁定条件を介して金利期間構造として表されている．金利デリバティブ問題を含むファイナンス分野では，Hull-White[2)]，Cox-Ingersoll-Ross[3)]，Heath-Jarrow-Morton[4)]らにより，金利派生証券の価格付け問題が研究されている．しかし，これらの研究は完備市場での無裁定理論を前提にしており，本研究のような実物資産への投資問題の分野にまでは至っていない．

そこで，本研究では，代表的なリアル･オプション問題である，最適投資タイミング選択問題に対し，金利の不確実性および金利期間構造を導入したモデルを扱う．このモデルを解析することから得られる最適投資タイミング・ルールが，金利が確定的である場合の結果と比べ，どのように異なるかを明らかにする．

---

*キーワーズ：計画手法論，金利期間構造

**正員，情報科学修士，（株）企画開発
(東京都渋谷区恵比寿西2-3-3 3F, E-mail takahashi@crp.co.jp)
***正員，工博，東北大学大学院情報科学研究科
(宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6,
E-mail akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp)
****正員，情報科学修士，野村証券（株）
(東京都中央区日本橋 1-9-1)

２．状況設定および定式化

（1）状況設定

事業主体はある時刻t において埋没費用I を投資し，直後にプロジェクトから一括収入$P(t)$ を受け取る．ここで，$P(t)$ は次式で表される幾何ブラウン運動に従うものとする．ただし，μ_P はドリフト，σ_P はボラティリティ，dz_P は標準ウィーナー過程の増分を表す．

$$dP = \mu_P P dt + \sigma_P P dz_P,\quad P(0) = P_0 \tag{1}$$

このとき，プロジェクト収入は，金融資本市場で取引されている資産と相関がないものとする．すなわち，金融資本市場を活用し，プロジェクト収入リスクをヘッジすることができない状況を考える．

このような状況下で，事業主体は，期待利潤を最大とするように投資タイミングT を決定する．

（2）金利期間構造モデル

金融資産の現在価値を求めるためには，市場金利に依存した割引を行う必要がある．ここで，金利は時間とともに変動するため，その挙動は一般に確率過程を用いて表される．また，市場には満期の異なる金利が多数存在し，それらの金利は無裁定条件を介して金利期間構造として表される．そのため，市場金利を扱うためには，金利期間構造をモデル化することが必要になる．

一般に，金利期間構造は，瞬間スポット・レート過程の従う確率微分方程式を用いてモデル化され，Vasicekモデル，Cox-Ingersoll-Rossモデル，Hull-Whiteモデルなどが代表的である．本研究では，数学的な扱いやすさを考慮し，瞬間スポット・レートを用いて記述されたHull-Whiteモデルを用いる．

Hull-Whiteモデルは，債券の相対価格をマルチンゲールにするような確率測度$\mathbf{Q}$ の下で，瞬間スポット・レート$r(t)$ が，以下の確率微分方程式：

$$dr(t) = (\phi(t) - ar(t))dt + \sigma_r d\hat{z}_r(t) \tag{2}$$

に従うモデルである．ただし，a は平均回帰率，σ_r は確率項のボラティリティ，$d\hat{z}_r(t)$ は確率測度$\mathbf{Q}$ の下での標準ウィーナー過程の増分を表し，dz_P とは独立であ

るとする．このとき時刻tにおける満期$T(T \geq t)$の割引債価格$v(t,T)$は次式で表される．

$$v(t,T) = A(t,T)\,e^{-B(t,T)r(t)} \tag{3}$$

また，初期時点0における満期tのイールド$R(0,t)$は次のように求まる．

$$R(0,t) = \frac{1}{t}\{B(0,t)r(0) - \log A(0,t)\} \tag{4}$$

ただし，$A(t,T)$，$B(t,T)$は以下の式で定義される．

$$A(t,T) \equiv \exp\left\{\frac{\sigma_r^2}{2}\int_t^T B^2(u,T)du - \int_t^T \phi(u)B(u,T)du\right\} \tag{5a}$$

$$B(t,T) \equiv \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \tag{5b}$$

式(4)，(5a)および(5b)より，$\phi(t)$と$R(0,t)$の関係が求まり，$\phi(t)$を適当に選ぶことによって，任意の初期金利期間構造形状を表すことができる．時点0における時点tの瞬間フォワード・レートを$f(0,t)$とするとき，$R(0,t)$と$f(0,t)$の関係を用いることで，Hull-Whiteモデルでは，$\phi(t)$が次式のように明示的に表される．

$$\phi(t) = af(0,t) + \frac{\partial}{\partial t}f(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2a}(1-e^{-2at}) \tag{6}$$

（3）定式化

以上より，事業主体の行動は，最適な投資タイミングT^*を選択することによる期待利潤最大化行動として，以下のように定式化される。

$$\max_{T^*}.J \equiv E_0^{\mathbf{Q}}\left[E_0\left[P(T^*) - I \middle| P(0)\right]e^{\int_0^{T^*}-r(s)ds} \middle| r(0), P(0)\right], \tag{7}$$

subject to

$$dP = \mu_P P dt + \sigma_P dz_P,\ P(0) = P_0, \tag{8}$$

$$dr = (\phi(t) - ar)dt + \sigma_r dz_r^*,\ r(0) = r_0. \tag{9}$$

ただし，$E_0^{\mathbf{Q}}[\cdot]$は，債券の相対価格をマルチンゲールにするような確率測度$\mathbf{Q}$の下で，期待値を計算することを示す．プロジェクト収入Pおよびスポット・レートrは，式(8)および(9)で表される確率微分方程式に従うため，この問題は，将来の状態変数$P(t)$，$r(t)$の不確実な変動に依存する確率制御問題に帰着する．従って，任意の時点tにおける制御は，その時点での状態変数P，rの閾値として表される．

３．最適制御条件の導出

前章で定式化した最適投資タイミング問題の最適性条件を導出するために，まず，状態(t,P,r)が観測された場合の最適値関数を，次式で定義する：

$$V(t,P,r) \equiv E_t^Q\left[E_t\left[P(T^*) - I \middle| P(t)\right]e^{\int_t^{T^*}-r(s)ds} \middle| r(t), P(t)\right]. \tag{10}$$

微小な時間$[t,t+dt]$間に，事業主体が投資を延期するのが最適な場合，最適値関数は次式を満たす．

$$V(t,P,r) = e^{-rdt}E_t[V(t+dt, P+dP, r+dr)], \tag{11}$$

$$V(t,P,r) > P - I. \tag{12}$$

式(10)において，最適値関数の積分区間$[t,T^*]$を$[t,t+dt]$と$[t+dt,T^*]$に分解し，DP原理および伊藤の補題を用いて整理すると，以下の方程式を得る．

$$\mathcal{L}V(t,P,r) = 0 \tag{13}$$

ただし，$\mathcal{L}$は，以下で定義される微分演算子である：

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mu_P P\frac{\partial}{\partial P} + (\phi - ar)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_P^2\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - r\bullet \tag{14}$$

一方，事業主体が投資を行うのが最適な場合，最適値関数は次式を満たす．

$$V(t,P,r) = P - I, \mathcal{L}V(t,P,r) < 0 \tag{15}$$

以上より，最適制御条件は，以下に示す線形相補性問題として表される．

$$\begin{cases}\mathcal{L}V\cdot(V-(P-I)) = 0, \\ -\mathcal{L}V \geq 0, V-(P-I) \geq 0.\end{cases} \tag{16}$$

線形相補性問題を解くための数値計算アルゴリズムとしては，射影SOR 法などが挙げられる[3)]．本研究では，射影SOR 法を用いて，投資閾値および最適値関数を，数値解析的に求める．

４．数値実験

本実験では，金利の不確実性および金利期間構造が，投資閾値およびオプション価値に与える影響を調べる．(2)では，本実験より得られた定性的な性質を示す．具体的には，a)パラメータσ_P, σ_rに対する投資閾値の感度分析，b)金利期間構造形状の違いによる投資閾値の比較，c)時間変化による投資閾値およびオプション価値の比較を行う．(3)では，本実験より得られた定量的に有意義な性質を示す．具体的には，金利が確定的な従来のリアル・オプション問題と，金利が不確実で初期金利期間構造がフラットな場合の投資閾値およびオプション価値を比較する．

表-1 感度分析を行うパラメータ

	固定する場合	変化させる場合
σ_P	0.2	0〜0.1，0.02刻み 0.1〜0.4，0.05刻み
σ_r	0.005	0〜0.03，0.005刻み
a	0.1	0.02〜0.1，0.02刻み，0.2，0.4
r_0	0.05	0.01〜0.2，0.01刻み

表-2 初期金利期間構造形状のパラメータ

p	0.001,0,-0.0009
l	0.08,0.16
q	0.005,0.10

（1）パラメータの設定

本実験では，プロジェクト成長率 $\mu_P = 0.04$，埋没費用 $I = 10$ と設定する．プロジェクト収入リスク σ_P，金利変動リスク σ_r，平均回帰率 a，初期金利水準 r_0 については，固定する場合および変化させる場合の値を表-1 のように設定する．

また，本実験では，パラメータ $\phi(t)$ を用い，初期金利期間構造を外生的に与える．初期金利期間構造形状としては，実験を通して，線形の場合を考え，イールド $R(0,t)$ を式(17)のように設定する．

$$R(0,t) = pt + r_0 \tag{17}$$

ただし，r_0 は初期金利水準，p は初期金利期間構造の傾きを表す．さらに，実験(2)-b)では，convex/concave な初期金利構造形状を考え，イールド $R(0,t)$ を式(16)のように設定する．ただし，l は曲率，q は超長期金利を表す．

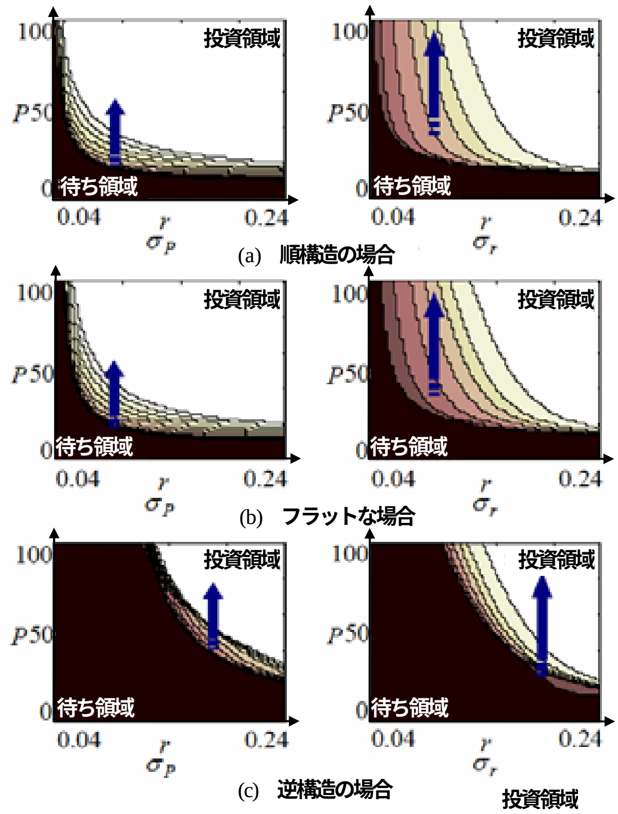
$$R(0,t) = (r_0 - q)e^{-lt} + q \tag{18}$$

ただし，傾き p，曲率 l，超長期金利 q については，表-2 のように設定した．

（2）定性的な結果

a) パラメータ σ_P，σ_r に対する投資閾値の感度分析

図-1 に示すように，初期金利期間構造が順構造・フラット構造・逆構造のいずれの場合でも，パラメータ σ_P を増加させると，任意のスポット・レート r での投資閾値は増加する．これは，従来のリアル・オプション問題と同様の結果であり，プロジェクト価値が変動することにより発生する待ちオプション価値が増加し，投資閾値が増加するためである．また，パラメータ σ_r を増加させることでも同様の結果を得る．これは，金利が変動することにより発生する待ちオプションの価値が増加し，投資閾値が上昇するためである．さらに，図-1(a),(b)および(c)を比較すると，順構造よりも逆構造の方が投資閾値が大きいことがわかる．

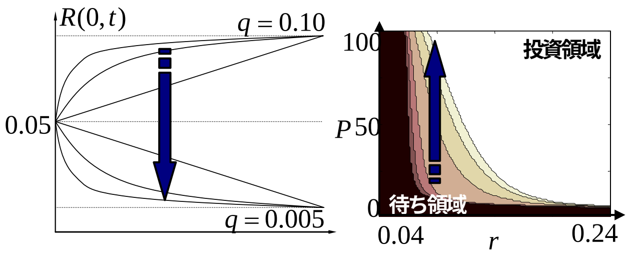


(a) 順構造の場合

(b) フラットな場合

(c) 逆構造の場合

図-1 パラメータを増加させた場合の投資閾値図



(a) 初期金利期間構造形状　(b) 投資閾値

図-2 パラメータを増加させた場合の投資閾値図

b) 初期金利期間構造の違いによる投資閾値の比較

図-2(a)に示す初期金利期間構造形状を与え，形状の違いにより，投資閾値がどのように変化するかを確認する．図-2(b)に示すように，順構造の場合よりも，逆構造の場合で投資閾値が増加する．これは，順構造の方が金利の長期平均が高く，将来価値が大きく割り引かれ，投資閾値が減少するためである．

c) 時間変化による投資閾値・オプション価値の比較

金利期間構造は時間の関数であるため，制御ルールは時間によって変化する．通常，満期を持つオプションは，満期に近づくにつれてその価値が減少する．しかし，初期金利期間構造が曲率の大きい順構造の場合，通常とは異なり，時間の経過により投資閾値およびオプション価値がともに増加する傾向がみられる．

一例として，$\sigma_P = 0.20$，$\sigma_r = 0.010$ における投資閾値の時間変化図を図-3 に示す．この図より，時刻 $t = 5,10,20$ における投資閾値は，時刻 $t = 0$ における投資閾値に対して大きい値を示すことがわかる．

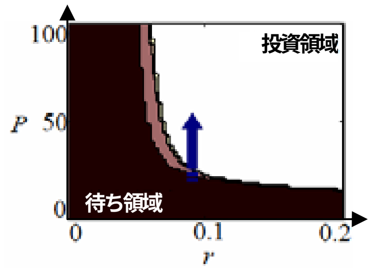


図-3 投資閾値の比較($\sigma_P = 0.20, \sigma_r = 0.005$)
（ $t = 0.5,10,20,30$ ）

（3）定量的な結果

a) 投資閾値の比較

ここでは，金利が確定的な従来のリアル・オプション問題での投資閾値と，金利が不確実で，初期金利期間構造がフラットな場合の投資閾値を定量的に比較する．任意のスポット・レート r において，金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* は，金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* に比べて大きい値を示す．

一例として，$\sigma_P = 0.20$，$\sigma_r = 0.005$ での投資閾値図を図-4(a)に示す．ここで，太線は金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* を，細線は金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* を表す．この図より，$r = 0.05$ では $P_S^* / P_D^* = 1.6$ となる．パラメータ σ_P, σ_r, r が現実的な範囲，（$0.1 < \sigma_P < 0.4$, $0.005 < \sigma_r < 0.015$, $0.05 < r < 0.10$）では，P_S^* / P_D^* は表-4のようになる．すなわち，金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* は，金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* に対し，最大で5.2倍大きい．

b) オプション価値の比較

ここでは，金利が確定的な従来のリアル・オプション問題でのオプション価値と，金利が不確実で，初期金利期間構造がフラットな場合のオプション価値を定量的に比較する．金利が不確実な場合のオプション価値 V_S^* は，金利が確定的な場合のオプション価値 V_D^* に比べて大きい値を示す．

一例として，$\sigma_P = 0.20$，$\sigma_r = 0.005$ でのオプション価値を図-4(b)に示す．ここで，太線は金利が不確実な場合のオプション価値 V_S^* を，細線は金利が確定的な場合のオプション価値 V_D^* を表す．この図より，$P/I = 0.5$ で $V_S^* / V_D^* = 1.6$，$P/I = 1.5$ で $V_S^* / V_D^* = 1.2$ となる．パラメータ σ_P, σ_r, P, r が現実的な範囲（$0.1 < \sigma_P < 0.4$, $0.005 < \sigma_r < 0.015$, $0.05 < r < 0.10$, $0.5 < P/I < 1.5$）では，V_S^* / V_D^* は表-5 のようになる．すなわち，金利が不確実な場合のオプション価値 V_S^* は，金利が確定的な場合のオプション価値 V_D^* に対し，最大で3.8倍大きい．

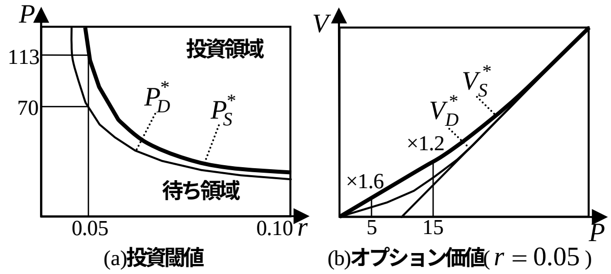


図-4 金利が確定的な場合と不確実な場合との比較
（$\sigma_P = 0.20, \sigma_r = 0.005$）

表-4 投資閾値の比較（P_S^* / P_D^*）

σ_P \ σ_r	0.005	0.010	0.015
0.1	1.1~2.1	1.4~3.8	2.7~5.2
0.2	1.1~1.6	1.2~2.9	1.9~4.1
0.3	1.1~1.3	1.2~2.1	1.5~3.0
0.4	1.1~1.2	1.2~1.7	1.3~2.2

表-5 オプション価値の比較（V_S^* / V_D^*）

σ_P \ σ_r	0.005	0.010	0.015
0.1	1.0~2.5	1.1~2.8	1.7~3.8
0.2	1.0~1.8	1.1~2.0	1.5~2.6
0.3	1.0~1.5	1.1~1.6	1.3~1.9
0.4	1.0~1.4	1.1~1.4	1.2~1.6

5. おわりに

本研究では，代表的なリアル･オプション問題である最適投資タイミング選択問題に対し，金利の不確実性および金利期間構造を導入した．その結果，σ_P, σ_r, r, P が現実的な範囲（$0.1 < \sigma_P < 0.4$，$0.005 < \sigma_r < 0.015$，$0.05 < r < 0.10$，$0.5 < P/I < 1.5$）では，従来の金利が確定的な場合の結果と比べ，投資閾値およびオプション価値は最大で約 4～5 倍の値を示した．さらに，初期金利期間構造形状の変化により，投資閾値も大きく変化することが明らかになった．以上より，実物資産への投資問題を考える際に，金利変動リスクおよび金利期間構造を考慮しない場合，誤った投資判断を行う危険性があるといえる．

参考文献

1) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S. : *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

2) Hull, J. C. and White, A. :Pricing Interest-rate-derivative Securities, *Review of Financial Studies*, Vol.3, pp.573-592, 1990.

3) Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. : An intertemporal general equilibrium model of asset prices, *Econometrica*, vol.53, pp.363-384, 1985.

4) Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. : Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation., *Econometrica*, vol.60, pp.77-105,1992.