AHPにおける一対比較行列の新しい重み導出法の提案*
A Proposal of New Method at Pairwise Comparison Matrix on AHP*

杉浦伸**・木下栄蔵***
By Shin SUGIURA**・Eizo KINOSHITA***

１．はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process）[1)-6)]の最大の特徴は，意思決定問題を総合目的，評価基準，代替案と階層構造に構築し，評価基準および代替案の総当り的な一対比較を行うことである．一対比較とは行と列に比較する要素を並べて，行におけるある要素が列における他の要素と比較してどれほど重要であるかを判断し，その重要度を記述していくという過程である．優先順位をつける要素が n 個ある場合はその一対比較の回数は $_nC_2$ 回になる．仮に要素 i と j を比較した結果，その順序が $i>j$ となり，要素 j と k を比較した結果，$j>k$ となったならば，要素 i と k を比較する必要はないと考えられそうなものである．しかし，あえてその一対比較をすべての要素について総当り的に行う点が一対比較の特徴であり，AHP の面白さである．

さて，AHP ではその総当りあたり的な一対比較を行った後に得られる一対比較行列から要素の重みを導出する．AHP における評価基準の重み導出の理論的な手法 [2)4)5)]としては一対比較行列の固有値問題を解き，その最大固有値に対する固有ベクトルを採用する固有値法と一対比較行列の行の幾何平均を用いる手法が存在する．

本稿では，従来の手法とは別の，一対比較行列からの新しい重み導出法を提案し，数値例を紹介する．

本手法の特徴は一対比較行列を列ベクトルに分解し各要素の個別の視点により，要素の重み導出する点である．本稿では，まず一対比較行列の数学的意味を説明し，つづいて新しい手法の提案，提案した手法の数値例を示すこととする．また，本稿により，これまで AHP を知らなかった読者も AHP の基本部分を理解してもらえると考える．

*キーワーズ：計画基礎論，計画手法論
**学生員，都市情報修，名城大学大学院都市情報学研究科
（岐阜県可児市虹ヶ丘四丁目三番地の三，
TEL:0574-69-0100，E-mail:p0681501@urban.meijo-u.ac.jp）
***正員，工博，名城大学都市情報学部都市情報学科
（岐阜県可児市虹ヶ丘四丁目三番地の三，
TEL:0574-69-0100，E-mail:kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）

２．一対比較行列からの重み導出[1)-5)]

本章では AHP における一対比較行列からの重み導出法の既存手法について説明する．一対比較行列からの重み導出法については数学的に 2 つの手法が存在する．1 つは固有値法 [2)4)5)]であり，もう 1 つは幾何平均法 [2)4)5)]である．一対比較行列における要素の重要度 w_1，w_2，…，w_n を推定する方法として上記の 2 つの方法を説明する．

まず，固有値法について説明する．

与えられた要素数 n の一対比較行列 A において要素の重み W^T＝（w_1，w_2，…，w_n）が仮に既知であるとすると A は次のように表現できる．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

ただし $a_{ij}=w_i/w_j$，$a_{ji}=1/a_{ij}$，$a_{ii}=1$ である．

ここで，この一対比較行列 A に要素の重み W を掛けると，ベクトル $n\cdot W$ が得られる．すなわち，

$$A\cdot W=n\cdot W \tag{2}$$

となり（2）式は固有値問題

$$(A-n\cdot I)W=0 \tag{3}$$

に変形できる．ただし I は単位行列を意味している．

ここで $W\neq 0$ の成立条件として，n が A の固有値になり，W は A の主固有ベクトルとなるのである．実際に AHP を適用し，一対比較行列から重みを導出する際は，要素の重み W は当然未知であり，与えられた一対比較行列から未知の重要度 W' を求めなければならない．したがって，要素の重み W' は意思決定者の答えた一対比較行列より導出することになる．すなわち，

$$A'\cdot W'=\lambda'_{\max}\cdot W' \tag{4}$$

を満たす W' を求めることとなる．ただし，$\lambda'_{\max}$ は一律比較行列 A' の最大固有値である．これにより，未知の要素の重み W' が導出できるのである．また，固有値法については Sekitani・Yamaki[3)]により一対比較行列のば

らつき最小化問題を解くという，意味づけもなされている．

つづいて幾何平均法について説明する．幾何平均法は人々が表明する AHP の一対比較行列には誤差が含まれていることを前提としている．そして，一対比較行列には誤差が存在するので，その誤差を最小にする要素の値を一対比較行列の重みとして採用するという考え方である．そこで，一対比較値 a_{ij} は本来あるべき真値である w_i/w_j に正の誤差 e_{ij} を乗じたものとして

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} e_{ij} \tag{5}$$

と表現する．(5)式において両辺の対数をとると，

$$\log a_{ij} = \log w_i - \log w_j + \log e_{ij} \tag{6}$$

となる．ここで，誤差項の $\log e_{ij}$ の二乗和を最小にするような w_i を推定すると w_i は以下の最適化問題の解として与えられる．この方法は対数最小二乗法（logarithmic least square method）と呼ばれる．

$$\begin{aligned} &\min. \quad \sum_{i,j=1}^{n} \left(\log a_{ij} - \log w_i + \log w_j \right)^2 \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} \log w_i = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

（7）式の解を求め，対数を元に戻すと一対比較行列 A の各行の幾何平均,

$$w_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{1/n} \tag{8}$$

として導出できるのである．以上が既存手法の固有値法と幾何平均法である．

３．新しい重み導出法の提案

本章では，一対比較行列からの新しい重み導出法を提案し，その説明をする．本章で提案する手法の説明のため，改めて AHP における一対比較行列を（9）式のように表現する．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}(1) & \cdots & a_{1i}(1) & \cdots & a_{1n}(1) \\ a_{21}(1) & 1 & \cdots & a_{2i}(1) & \cdots & a_{2n}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}(1) & a_{i2}(1) & \cdots & 1 & \cdots & a_{in}(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(1) & a_{n2}(1) & \cdots & a_{ni}(1) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

一対比較行列Aの添え字と行列の要素におけるカッコ内の数字は初期値であること示している．

一対比較行列は，ある行の要素は列の要素と比較してどれだけ重要であるかを記述し，表現していることはすでに述べた．最初に与えられた一対比較行列A_1を，

$$A_1 = \left(a_1^1, a_1^2, \cdots, a_1^j, \cdots, a_1^n \right) \tag{10}$$

としてn個からなる列ベクトルを用いて表現すると，A_1の要素である列ベクトルは

$$a_1^j = \begin{bmatrix} a_{1i}(1) \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ a_{ji}(1) \\ \vdots \\ a_{ni}(1) \end{bmatrix} \tag{11}$$

となる．つまり，a_1^jは初期値である一対比較行列A_1における第j列目である．すると，列ベクトルa_1^jは要素jの値を1とし，j以外の要素とjとの相対的な比を表しているとみなすことができる．同様にn個の列ベクトルはすべてそれ自身とそれ以外の要素1～要素nまでの相対的な比の値を表している．ここでは要素jから要素kへの視点の変更を想定し，その演算として $a_1^j \cdot \dfrac{1}{a_{kj}(1)}$ を定義する．すると，一対比較行列A_1には列ベクトルが要素数nだけ存在するためn個の列ベクトルを平均[1]して新たに

$$a_2^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{l-1}^i \cdot \frac{1}{a_{kj}(1)} \tag{12}$$

が導かれる．この導出の手順を繰り返すと，

$$a_l^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{l-1}^i \cdot \frac{1}{a_{kj}(l-1)} \tag{13}$$

となり，（14）式に収束する．

$$a_l^j = a_{l-1}^j \tag{14}$$

したがって（15）式における列ベクトルの集合として表現できる．

$$A_l = \left(a_l^1, a_l^2, \cdots, a_l^i, \cdots, a_l^n \right) \tag{15}$$

そして，演算によって収束した一対比較行列A_lを正規化することによって，つまり列ベクトルの列和を1にする正規化あるいは列ベクトルにおける要素の合計を1にする正規化によって重みが導出できる．すなわち，与えられた一対比較行列A_1に対する要素iの重みw_iは，eをすべてが1の列ベクトルとすると

$$w_i = \frac{a_l^i}{e^T a_l^i} = \frac{a_{ji}(l)}{\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(l)} \tag{16}$$

として導出できるのである．

1　平均の方法には算術平均や幾何平均が考えらえる．本稿の表現では算術平均を用いた．平均することにより要素の演算を導出し，要素の重みの導出演算を行っている．

４．不完全一対比較行列における重み導出

本章では不完全一対比較行列における重み導出法について述べる．一対比較行列においてすべての要素の値が判明しておらず，欠落情報を含む一対比較行列は不完全一対比較行列と呼ばれている．この不完全一対比較行列における重み導出の代表的な手法としてはハーカー法[1]がある．

次のような不完全一対比較行列が与えられたとする．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & * & a_{24} \\ a_{31} & * & 1 & * \\ a_{41} & a_{42} & * & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

2 章でもにも述べたように，要素の重み W^T＝（w_1，w_2，…，w_n）が既知であった場合，一対比較値 a_{ij} は $a_{ij}=w_i/w_j$ となるため，一対比較行列に欠落がある場合でも，欠落した要素 a_{ij} は $a_{ij}=w_i/w_j$ となると考えられる．これを，固有値法として（17）式に適用すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & w_2/w_3 & a_{24} \\ a_{31} & w_3/w_2 & 1 & w_3/w_4 \\ a_{41} & a_{42} & w_4/w_3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

と表現できる．（18）式を整理すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 2 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 3 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \tag{19}$$

となる．つまり，欠落した要素を0とおき，対角成分には，一対比較行列の行の欠落した要素数に1を加えたものを置いた行列の固有値法を解くことになる．以上が，Harker法である．

さて，本論文で提案する手法を不完全一対比較行列に適用するためには以下のルール①，②を適用すればよい．

ルール①

欠落している部分からは評価値が導出できないため，本来その部分から得られるはずの評価値はそのまま空白にしておく．

ルール②

演算の導出において，欠落により評価が導出できない個所があるため，単純に導出数した要素の平均値を導く．

以上のルールを適用することにより，本手法が適用できる．

５．本手法を適用した数値例

本章では本稿で提案した手法の数値例を紹介する．

要素数5の一対比較行列を（20）式に示す．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 3 & 5 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

（20）式に本手法を適用すると要素の重みとして（21）式が得られる．

$$W^T=(0.444,0.263,0.158,0.091,0.044) \tag{21}$$

さらに，要素数4の不完全一対比較行列の例をを（22）式に示す．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 2 & * \\ 2 & 1/2 & 1 & * \\ 1/2 & * & * & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

（22）式にハーカー法を適用すると要素の重みは

$$W^T=\left[0.286,0.310,0.302,0.102\right] \tag{23}$$

と導出できる．一方，本手法に適用すると，要素の重みは

$$W^T=\left[0.287,0.254,0.341,0.118\right] \tag{24}$$

となる．

本稿で提案した手法は固有値法や幾何平均と異なる数値が得られるが，優先順位については逆転する例は無いと考えられる．ただし，不完全一対比較行列に適用した場合は異なる結果が得られることがある．本稿で提案した手法と既存手法の数値の差や詳細な構造の違いは今後の研究課題である．

６．おわりに

本稿ではAHPにおける一対比較行列からの新しい重み導出法を提案した．

また，本稿で提案した手法が不完全一対比較行列からの重みの推定にも適用できることを示し，一対比較行列ならびに不完全一対比較行列からの重み導出の数値例を紹介した．本稿で提案した手法は，固有値法や幾何平均法に比べると意思決定プロセスや重みの導出過程が，予備知識の無い一般の人にも分かりやすいと考えられる．その点で一対比較行列ならびに不完全一対比較行列における重み推定に貢献し，AHPが多くの局面に適用されることにつながると考えられる．

また本手法による重み導出が，すでに提案されている

固有値法や幾何平均法などの既存の手法とどのような関係にあるのか，細かい数値の差異と構造を解明するのが今後の研究課題である．同様に不完全一対比較行列からの重み推定についても既存の手法のハーカー法など結果とは異なる点も今後明らかにし，一対比較行列の重み導出や不完全一対比較行列の重み推定にどの手法をどのような場合に用いるのが妥当であるかをさらなる研究課題としたい．

本稿が今後，AHP の理論研究，応用研究に寄与できれば幸いである．

参考文献

1) 木下栄蔵：よくわかる AHP 孫子の兵法の戦略モデル，オーム社，2006.
2) 木下栄蔵・田地宏一：行政経営のための意思決定手法，ぎょうせい，pp.169-182，2005.
3) 木下栄蔵：AHP を用いた柔道選手の強さの推定，オペレーションズ・リサーチ，6 月号，2006
4) Sekitani, K. and Yamaki, N., "A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP," Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.42, pp.219-222, 1999.
5) 高橋磐郎：連載講座　AHPからANPへの諸問題 I 〜VI，オペレーションズ・リサーチ，1月号〜6月号，1998.
6) 木下栄蔵編著：AHPの理論と実際，日科技連，2000.

AHPにおける一対比較行列の新しい重み導出法の提案*

杉浦伸**・木下栄蔵***

本稿では，AHPにおける一対比較行列からの新しい重み導出法を提案する．さらに本稿で提案する手法が不完全一対比較行列からの重みの推定にも適用できることを示し，一対比較行列ならびに不完全一対比較行列からの重み導出の数値例を紹介する．また，本稿によりこれまでAHPを知らない読者もAHPについての基本的な部分を理解できると考えられる．

A Proposal of New Method at Pairwise Comparison Matrix on AHP*

By Shin SUGIURA**・Eizo KINOSHITA***

This paper proposes new method, achieving weights from pairwise comparison matrix on AHP. New method is applying to uncompleted pairwise comparison matrix. Moreover this paper shows numerical examples. Author thinks this paper is easy gu ide for beginner AHP users.
