

# リンク渋滞を考慮した時間帯別交通均衡配分に関する基礎的研究\*

## A Semi-dynamic Traffic Equilibrium Assignment Model with Link-queue Evolution\*

菊地志郎\*\*・赤松隆\*\*\*

By Shirou KIKUCHI \*\*・Takashi AKAMATSU \*\*\*

### 1. はじめに

道路網の計画や種々のTDM施策において、ピーク時における交通状態の予測は不可欠である。しかしながら、多くの交通網においてそのピーク時には渋滞状態となっているため、従来の静的配分ではこれを適切に表現することは困難であった。この問題に対し、待ち行列の変化を連続時間の枠組みで表現できるさまざまな動的配分モデルが提案されている(eg.赤松<sup>1)</sup>)。ただし、これも時々刻々のOD交通量データを必要とするという点で、現時点では実用性に難点がある。

これら2つの配分理論に対し、静的配分のバイアスを軽減しつつ実用性を有したモデルとして、時間帯別配分理論がある。しかしながら、従来の時間帯別配分理論は各時間帯における(渋滞)待ち行列を明示的に扱っておらず、実際の交通現象を適切に表現しているとは言い難い。そこで本研究では、渋滞状態が適切に表現でき、データが入手可能であり、かつ、効率的なアルゴリズムが開発可能な時間帯別配分モデルを開発することを目的とする。また、構築したモデルの数理構造を解析し、一般形の実線形相補性問題(NCP)として表現できることを示した上で、動的利用者最適(DUO)配分、動的利用者均衡(DUE)配分との関係を明らかにする。

### 2. モデル

#### (1) モデルの状況設定

道路網はノード集合  $N$  とそれらを結ぶ有向リンク集合  $L$  からなるネットワークによって表現されるものとする。各ノードは整数の連番によって区別され、各リンクは、ノード  $i$  からノード  $j$  へ向かっている場合  $(i, j)$  と表される。

本研究では時間の流れをある一定の長さを持つ時間帯

\*キーワード: ネットワーク交通流, 交通網計画,

時間帯別配分

\*\*学生員, 東北大学大学院 情報科学研究科

(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06

TEL:022-795-7507, FAX:022-795-7505)

\*\*\*正会員, 工博, 東北大学大学院 情報科学研究科

ごとに分割し、離散的に考える。このとき、状態変化は時間帯間でのみ起こり、時間帯内では定常状態であると仮定する。これにより、ある時間帯で捌け残った待ち行列は次の時間帯へ繰越され、次の時間帯での交通状態に影響を及ぼすことになる。

このモデルで対象とするのは複数の起点と複数の終点を持つ一般ネットワークである。ただし、以下では理解を容易にするために多起点・1終点のネットワークを対象として議論する。なお、1起点・多終点のネットワークでも以下と同様の議論が可能である。

#### (2) 交通状態を表すサブモデル

##### a) リンク交通量に関する条件

本モデルでは、リンク  $(i, j)$  の時間帯  $t$  での流入台数  $\lambda_{ij}(t)$  と流出台数  $\mu_{ij}(t)$  を明示的に区別することにより、待ち行列台数  $x_{ij}(t)$  を考慮する。このとき、リンクでの時間帯を追った車両台数の保存則を表す待ち行列の進展条件が必要である。この条件は、リンク  $(i, j)$  に関して次のように表せる。

$$x_{ij}(t) = x_{ij}(t-1) + \lambda_{ij}(t) - \mu_{ij}(t) \quad \forall (i, j) \quad (1)$$

また、リンク  $(i, j)$  のサービス率には、物理的特性から決まる所与の上限(最大流出率:  $\mu_{ij}^*$ )があると考えられる。このとき、待ち行列が存在する場合は流出台数は最大流出率となり、そうでない場合には最大流出率以下となる。すなわち、リンク  $(i, j)$  の流出台数は次の条件を満たす。

$$\begin{cases} \mu_{ij}(t) = \mu_{ij}^* & \text{if } x_{ij}(t) > 0 \\ \mu_{ij}(t) \leq \mu_{ij}^* & \text{if } x_{ij}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \quad (2)$$

これらの関係を用いて、横軸に時刻、縦軸に累積台数を取り、あるリンクにおける累積図を描く。いま、時間帯  $t-1$  までの累積曲線と各時間帯での流入台数  $\lambda$  が与えられているとすると、 $t$  期末での累積流入曲線上の点が定まる。また、式(1)、(2)から、 $t$  期末での累積流出曲線上の点が一意に定まる。ここで、時間帯内では定常状態を仮定しているため、流出率は時間帯内で一定となり、時間帯  $t$  での累積流出曲線がひける。さらに、待ち行列台数も時間帯内で一定であるため、流入曲線と流出曲線は同一時間帯で互いに平行となり、時間帯  $t$  での

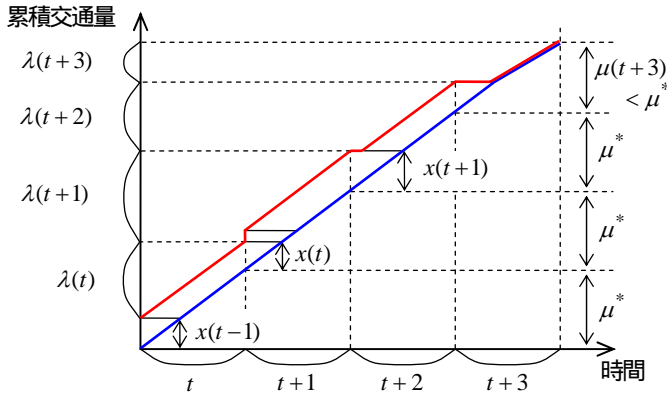


図-1 時間帯間での待ち行列の進展

流入曲線がひける．ただし，ここでの累積流入曲線の傾きは，1時間あたりの累積交通量の増分 $\lambda$ とは異なることに注意が必要である．累積図は，この操作を各時間帯で繰り返すことにより図-1のように描ける．

#### b) ノードでのフロー保存則

ネットワーク上の各ノードでは，流入台数と流出台数が等しくなる必要がある．よって，各ノードにおけるフロー保存則は次のように表される．

$$\sum_{i \in I(k)} \mu_{ik}(t) - \sum_{j \in O(k)} \lambda_{kj}(t) + q_k^d(t) = 0 \quad \forall k \neq d \quad (3)$$

ただし， $q_k^d(t)$ は，時間帯 $t$ に起点 $o$ を出発して終点 $d$ に向かうOD交通量である．また， $I(k)$ はノード $k$ へ流入するリンクの上流側ノードの集合， $O(k)$ はノード $k$ から流出するリンクの下流側ノードの集合である．

#### (3) 利用者行動を表すサブモデル

各利用者は時間帯ごとに所要時間が最小となる経路を選択する．このとき，利用者の経路選択均衡条件は，

$$\begin{cases} c_{ij}(t) + p_j^d(t) = p_i^d(t) & \text{if } \lambda_{ij}(t) > 0 \\ c_{ij}(t) + p_j^d(t) \geq p_i^d(t) & \text{if } \lambda_{ij}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \quad (4a)$$

によって表される．ただし， $p_i^d(t)$ はノード $i$ から終点 $d$ までの最小経路所要時間， $c_{ij}(t)$ はリンク $(i, j)$ の旅行時間である．つまり，リンク $(i, j)$ がノード $i$ から終点 $d$ までの最短経路に含まれれば流入交通量が存在し，そうでなければ流入交通量は0となる．ここで，リンク旅行時間 $c_{ij}(t)$ は，自由走行時間 $m_{ij}(=const)$ と渋滞待ち時間の和として次のように表される．

$$c_{ij}(t) = m_{ij} + x_{ij}(t) / \mu_{ij}^* \quad (4b)$$

#### (4) 多起点・多終点ネットワークの場合の注意点

多起点・多終点ネットワークの場合でもフローを終点別に考えることにより，多起点・1終点の場合と同様の議論が可能である．その場合，式(1)，(3)，(4a)は数量変数 $x_{ij}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}$ を終点 $d$ ごとのフロー $x_{ij}^d, \lambda_{ij}^d, \mu_{ij}^d$ で置き換えた式として表される．

さて，追越しが無い状況を仮定すれば，リンクでの車両の到着順序と退去順序は等しくなければならない．このFirst-In-First-Out(FIFO)条件は，多起点・1終点の場合では式(2)によって自動的に満たされていた．しかし，多起点・多終点の場合では式(2)に加えて終点別のFIFOを明示的に表す条件が必要となる．このFIFO条件は，動的配分では連続時間 $\tau$ について次のように表される．

$$\frac{\lambda_{ij}^d(\tau)}{\lambda_{ij}(\tau)} = \frac{\mu_{ij}^d(\tau + c_{ij}(\tau))}{\mu_{ij}(\tau + c_{ij}(\tau))} \quad \forall (i, j), d \quad (5)$$

ただし，時間帯別配分では時間帯内での流入時刻・流出時刻の関係を明示的に表現できないため，式(5)を時間帯別配分にそのまま適用することはできない．そこで，2時間帯以上にまたがる待ち行列は存在しないという仮定を導入すると，式(1)のもとでFIFO条件に対応する式が次のように得られる．

$$x_{ij}^d(t) = x_{ij}(t) \cdot \frac{\lambda_{ij}^d(t)}{\lambda_{ij}(t)} \quad \text{if } \lambda_{ij}(t) > 0 \quad \forall (i, j), d \quad (6)$$

これは，待ち行列を経験する車両の割合が終点別に等しくならなければならないことを意味している．

### 3. 非線形相補性問題としての表現

#### (1) DP原理による問題の時間帯別分解

以上で定式化されたモデルでは，時間帯 $t$ に関する関数は，時間帯 $t$ および $t-1$ に関する変数のみに依存している．したがって，初期の状態が所与であれば時間軸に関して前向きに，時間帯ごと独立に問題を分解することが可能である．よって，以下では時間帯 $t-1$ の状態を与件として，時間帯 $t$ の状態を求める問題を考える．なお，以下では変数の時間帯 $t$ を省略して表記するが，未知変数は全て時間帯 $t$ での状態を表すものとする．

#### (2) 変数の縮約

いま，フローに関する未知変数 $x_{ij}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}$ について，式(1)のもとで独立なものはこれらのうち2つである．したがって，ここでは $\mu_{ij}$ を消去し，フローに関する条件式を $x_{ij}, \lambda_{ij}$ の2変数で表す．まず，リンクの容量制約条件式(2)に，待ち行列の進展条件式(1)を代入し，

$$\begin{cases} -x_{ij} + \lambda_{ij} = \bar{\mu}_{ij} & \text{if } x_{ij} > 0 \\ -x_{ij} + \lambda_{ij} \leq \bar{\mu}_{ij} & \text{if } x_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \quad (7)$$

を得る．ただし， $\bar{\mu}_{ij}$ は次式で表される既知の値である．

$$\bar{\mu}_{ij} = \mu_{ij}^* - x_{ij}(t-1) = (\text{given}) \quad (8)$$

また，各ノードにおけるフロー保存則を表す式(3)に式(1)を代入し， $\mu_{ij}$ を消去すると，

$$\sum_{j \in O(k)} \lambda_{kj} + \sum_{i \in I(k)} (x_{ik} - \lambda_{ik}) - r_k^d = 0 \quad \forall k \neq d \quad (9)$$

となる．ここに， $r_k^d$  は各ノードごとに次のように定義される既知の値である．

$$r_k^d \equiv \sum_{i \in I(k)} x_{ij}(t-1) + q_k^d = (\text{given}) \quad (10)$$

ただし， $\mu_{ij}(t)$  は事後的に次式によって求められる．

$$\mu_{ij}(t) = -x_{ij}(t) + x_{ij}(t-1) + \lambda_{ij}(t) \quad \forall(i, j) \quad (1)'$$

一方，コストに関する未知変数  $c_{ij}$ ， $p_k^d$  のうち， $c_{ij}$  は式(4b)によって  $x_{ij}$  の関数として表されている．よって，式(4a)，(4b)から  $c_{ij}$  を消去すると次式が得られる．

$$\begin{cases} m_{ij} + x_{ij} / \mu_{ij}^* - p_i^d + p_j^d = 0 & \text{if } \lambda_{ij} > 0 \\ m_{ij} + x_{ij} / \mu_{ij}^* - p_i^d + p_j^d \geq 0 & \text{if } \lambda_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall(i, j) \quad (11)$$

これにより，時間帯ごとの配分問題は  $x_{ij}$ ， $\lambda_{ij}$ ， $p_k^d$  を未知変数とした条件式(7)～(11)で表現された．

### (3) 非線形相補性問題による統一的記述

さて，定式化によって得られた各条件式は，このままでは数学的に扱うことが難しい．そこで，ここでは定式化された条件式を非線形相補性問題(NCP: Nonlinear Complementarity Problem)の枠組みで表現する．これにより，モデルの数理構造を明らかにするのが容易になり，また，効率的アルゴリズムの開発が可能となる．

式(7)，(11)はすでに相補性形式になっており，等価的に次のように表される．

$$\begin{cases} x_{ij} \cdot \{x_{ij} - \lambda_{ij} + \bar{\mu}_{ij}\} = 0 \\ x_{ij} - \lambda_{ij} + \bar{\mu}_{ij} \geq 0, x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad \forall(i, j) \quad (7)'$$

$$\begin{cases} \lambda_{ij} \cdot \{m_{ij} + x_{ij} / \mu_{ij}^* - p_i^d + p_j^d\} = 0 \\ m_{ij} + x_{ij} / \mu_{ij}^* - p_i^d + p_j^d \geq 0, \lambda_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad \forall(i, j) \quad (11)'$$

また，式(9)は  $p_k^d$  と組み合わせることにより，次のような相補性条件として表現できる（等価性の証明は省略）．

$$\begin{cases} p_k^d \cdot \left\{ \sum_{j \in O(k)} \lambda_{kj} + \sum_{i \in I(k)} (x_{ik} - \lambda_{ik}) - r_k^d \right\} = 0 \\ \sum_{j \in O(k)} \lambda_{kj} + \sum_{i \in I(k)} (x_{ik} - \lambda_{ik}) - r_k^d \geq 0, p_k^d \geq 0 \end{cases} \quad (9)'$$

以上により，式(7)～(11)で表された条件が等価な相補性条件式(7)'，(9)'，(11)'として表現された．したがって， $\Omega = R_+^{|L|} \times R_+^{|L|} \times R_+^{|N|}$ ， $\mathbf{Y} = [\mathbf{x} \quad \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{p}]^T$ ，

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A}_- & \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\mu}} \\ \mathbf{m} \\ -\mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (12)$$

と定義すれば，均衡条件式(7)'，(9)'，(11)'は以下のNCPと等価である．

$$\begin{aligned} \text{[NCP]} \quad & \text{Find } \mathbf{Y} \in \Omega \quad \text{such that} \\ & \mathbf{Y} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = 0, \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで， $\mathbf{A}$  はリンク・ノード接続行列であり， $\mathbf{A}_+$  ( $\mathbf{A}_-$ ) はリンク・ノード接続行列において-1(1)要素を0に置き換えた行列である．また， $\mathbf{M}$  は対角要素に  $\mu_{ij}^*$  を持つ  $|L| \times |L|$  次対角行列である．

## 4. モデル構造に関する考察

### (1) モデルの数理構造

式(12)，(13)で表される相補性問題は，このままでは変数間の依存関係がわかりにくい．そこで，モデルの本質的な構造と変数間の関係を調べよう．

そのために，全リンクに流入交通が存在し，かつ全リンクが渋滞状態にある状況を仮定する．このとき，NCPは  $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$  という線形連立方程式問題に帰着する．さらに，式(12)の1行目と3行目から  $\boldsymbol{\lambda}$  を消去すると， $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{p}$  に関する次の連立方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{r} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (14)$$

ここで，式(14)の第1行目はフローに関する条件式(7)'，(9)'から得られた条件であり，2行目は利用者行動に関する条件式(11)'から得られた条件である．均衡解は，これら2つの式から数量変数  $\mathbf{x}$  と価格変数  $\mathbf{p}$  の同時決定によって定まる．

また，式(14)から均衡解は次のように求められる．

$$\begin{cases} \mathbf{p} = (\mathbf{A}_+ \mathbf{M} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}_+ \mathbf{M} \mathbf{m} - \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{r}) \\ \mathbf{x} = \mathbf{M} \mathbf{A}^T \mathbf{p} - \mathbf{M} \mathbf{m} \end{cases} \quad (15)$$

これはDUE配分で同様の仮定を置いた場合の均衡解と同型である．すなわち，時間帯別配分問題はDUE配分と類似した構造を持っていることがわかった．

### (2) DUO配分・DUE配分との比較

提案したモデルは，時間帯の長さを変えることにより，動的利用者最適(DUO)配分，動的利用者均衡(DUE)配分のいずれかに近くなる．このことは，利用者が1回のトリップで行う経路選択の回数の違いによって，以下のように説明できる．

経路選択均衡条件式(4a)は，利用者が時間帯ごとに，今いるノードから終点までの最短経路を，その時間帯における情報をもとに選択することを表している．ここで，トリップの最中に時間帯が変化した場合，利用者はその瞬間にいるノードを起点として，終点までの最短経路を選択し直すことになる．よって，1時間帯の幅を短くとしたとき，利用者は各時間帯での最短経路を逐次的に選択していくことになり，その結果，均衡解はDUO配分に近いものとなる．逆に，1時間帯の幅を長くした場合には，利用者の多くが1回だけの経路選択を行うことになり，均衡解はDUE配分に近いものになるといえる．

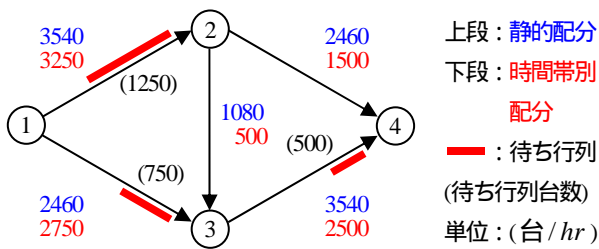


図-2 各配分におけるリンク流入台数

表-1 均衡状態でのリンク旅行時間 (hr)

リンク番号	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
自由走行時間	0.17	0.50	0.08	0.50	0.17
静的配分	0.71	0.80	0.09	0.80	0.71
時間帯別配分	0.79	0.88	0.08	0.50	0.42

## 5. 数値計算例

### (1) ネットワークの設定

図-2に示すbraessネットワークにおいて、時間帯別配分と静的配分による均衡解をそれぞれ求め、比較する。ここで、ODペアは (1,4) のみ、各リンクの自由走行時間は表-1に示す値とし、最大流出率はいずれのリンクも 2000(台/hr) とする。なお、静的配分でのリンク旅行時間はリンク交通量  $y_{ij}$  に対して以下のBPR関数で与えられるものとし、BPRパラメータの値を  $\alpha = 0.5$  ,  $\beta = 4$  と設定する。

$$c_{ij} = m_{ij} \{1 + \alpha(y_{ij} / \mu_{ij}^*)^\beta\} \quad (16)$$

### (2) 1時間帯での静的配分との比較

OD交通量は6000(台/hr)とし、初期に待ち行列がない状態で1時間帯(1hr)だけ均衡解を求めた。これによって得られた均衡交通量を図-2に並べて示す。また、均衡状態でのリンク旅行時間を表-1に示す。

この例では静的配分の問題点が明らかである；フローがリンクの物理的に満たすべき容量を超えて流出してしまい、そのために、渋滞リンクの下流でリンク旅行時間を過大に評価 (eg. リンク(2,4), (3,4)) している。これに対し、時間帯別配分では容量を超えたフローが待ち行列として表現されており、静的配分のバイアスが改善されていることがわかる。

### (3) 多時間帯での静的配分との比較

次に多時間帯でOD交通量を表-2のように与えた場合の均衡解を示す。ただし、ここでの静的配分による均衡解とは、各時間帯ごとに静的配分を繰り返すことによって得られた結果である。

紙面の都合上リンク(1,2)のみに着目し、均衡交通量の推移を表-2に示した。表-2から、この例でも静的配分ではフローがリンクの容量を超えて流出していることがわ

表-2 各配分によるリンク(1,2)の交通量 (台/hr)

時間帯	1	2	3	4	5	
OD交通量	4000	5000	3500	2000	1000	
静的配分	交通量	2713	3070	2601	2000	1000
時間帯別配分	流入台数	2500	2500	1750	1750	1000
	流出台数	2000	2000	2000	2000	1500
	待ち行列台数	500	1000	750	500	0

OD 旅行時間 (hr)

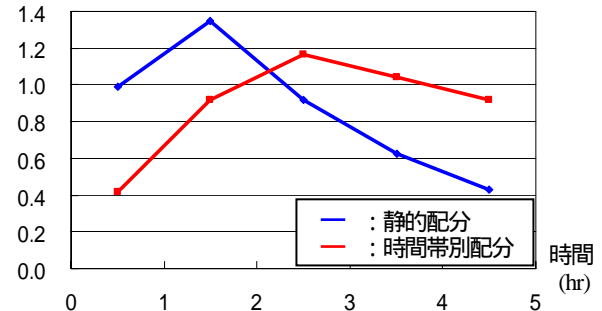


図-3 各配分によるOD旅行時間の推移

かる。これに対し、時間帯別配分では、容量を超えたフローが待ち行列として次の時間帯に繰越されている。すなわち、待ち行列を考慮することによって、時間帯を追ったフローの変化が適切に表現されていることが確認できる。

また、静的配分では次の時間帯に変化する際にそれまでのフローをリセットしてしまっている。このため、実際には待ち行列が残っていても、それが以降の交通状態に影響を与えることはない。一方、時間帯別配分では待ち行列の繰越しによって、以降の時間帯への遅延の影響を考慮することができる。OD旅行時間の推移を表した図-3では、時間帯別配分で旅行時間のピークが遅延し、緩和されている様子が確認できる。

## 6. おわりに

本研究では、時間帯別交通均衡配分モデルを提案し、時間帯ごとの配分問題が等価なNCPIに帰着されることを示した。さらに、その数理構造を解析し、DUO, DUE 両配分との関係を示した。また、数値計算によって静的配分との比較を行った。

### 参考文献

- 1) Takashi Akamatsu: An efficient algorithm for the dynamic traffic equilibrium assignment with queues, Transportation Science, Vol.35, pp.389-404, 2001.
- 2) 赤松隆, 牧野幸雄, 高橋栄行: 待ち行列の進展と時間帯別OD需要を内生化した準動的な交通均衡配分, 土木計画学研究・論文集, No.15, pp.533-545, 1998.