

時間帯別ボトルネック通行権の最適発行パターン*

Optimal Time-Dependent Patterns of Bottleneck Permits with Stochastic Queues*

笠原衣織**・赤松隆***

By Iori KASAHARA**・Takashi AKAMATSU***

1. はじめに

交通混雑に対する解決策として、これまでに価格規制と数量規制が提案されている。前者の代表例である混雑料金制では、誤った利用者の需要情報をもとに料金設定を行うと、社会的損失が発生しうる。実際、道路管理者が利用者の交通需要条件を正確に把握することは困難であり、この制度を導入しても社会厚生レベルを改善できるとは限らない。後者の代表例である単純割当制（eg. ランプ制御）は、利用者の需要情報を必要とせずに、渋滞を解消することができる。しかしながら、利用者の自由な選択（eg. 希望到着時刻）を制限するため、制限に起因する社会的損失が発生する可能性がある。

そこで、利用者の自由な選択を保障した割当制として赤松ら¹⁾は、“ボトルネック通行権取引制度”を提案した。これは、道路管理者が特定のボトルネックを特定の時刻に通行できる権利（ボトルネック通行権）を発行し、利用者が自由にその権利を取引する制度である。赤松ら¹⁾によると、全ての利用者がボトルネック通行権の指定時刻ちょうどに到着する理想的な状況を仮定すると、この制度の導入により、社会的に最適な状態が達成される。しかしながら、より現実的な状況を想定すると、全ての利用者が指定時刻通りに到着できるとは限らず、権利の指定時刻より早着・遅着する利用者も存在する。そのため、権利発行枚数をボトルネック容量と等しく設定すると、利用者の確率的な到着挙動に起因する損失が発生し、社会厚生レベルは制度導入前よりも悪化する。

そこで、本稿では、利用者の確率的な到着挙動を考慮した上で、利用者全体の期待総不効用を最小化する問題を定式化し、社会的最適状態を実現する権利発行数の時間的推移（最適発行パターン）を明らかにすることを目的とする。



図 - 1 交通ネットワークの設定

2. 状況設定とモデルの概要

(1) 状況設定

a) 交通条件の設定

本稿では、総利用者数 N が住宅地からCBDへ通勤する単一ODで構成された道路を想定する。図 - 1 で示すように、途中に交通容量 μ の単一ボトルネックが存在し、全ての利用者は移動する際に必ずこのボトルネックを通過する。ボトルネック通過時には、原則的に、通過時刻のボトルネック通行権を所有していなければならない。しかし、権利の指定時刻より早着・遅着した場合でも、ボトルネックを通過できる。

道路管理者は、時々刻々のボトルネック通行権を発行し、利用者は各自の勤務開始時刻を下に、希望通過時刻のボトルネック通行権を所有している状況を想定して、以降の解析を進める。

b) 利用者の確率的な到着挙動

利用者のボトルネック到着時刻は、指定時刻を中心に分布するような、時刻に関する確率変数である。そのため、各時刻のボトルネックにおける到着者数は、確率的に推移する。ここで、確率的な到着挙動を想定しているため、待ち行列時間などの経済損失は確率変数となることに注意しなければならない。

3. モデルの定式化

利用者全体の期待総不効用を最小化するような、ボトルネック通行権の最適発行パターンを求める。本章の構成は以下の通りである。まず、(1)では、利用者の経済損失を、拡散方程式を用いて解析する。ここで、経済損失はある条件付確率密度関数に従う確率変数として与えられる。次に、(2)では、得られた経済損失

*キーワード：交通制御，交通流，ボトルネック混雑，待ち行列の拡散近似

**学生員，東北大学大学院情報科学研究科
(仙台市青葉区荒巻字青葉 06，
TEL 022-795-7507，FAX 022-795-7505)

***正会員，工博，東北大学大学院情報科学研究科

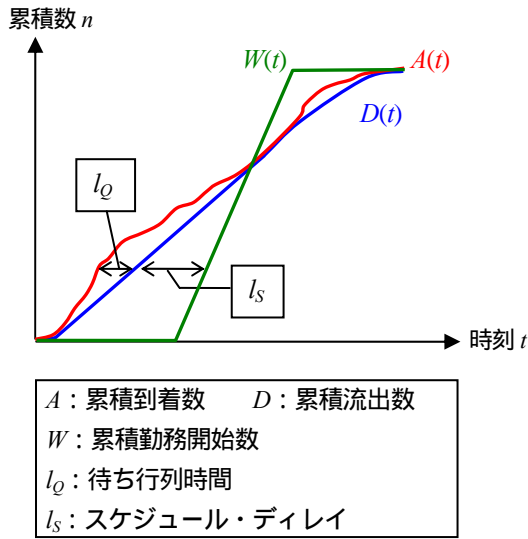


図-2 ボトルネック地点の累積図

の指標として、経済損失を変数にもつ不効用関数を設定する。そして、時々刻々のボトルネック通行権の発行枚数を制御して、利用者全体の期待総不効用を最小化するような、最適化問題を定式化する。最後に、最適化問題を時刻に関して分解し、数値的に解析可能な問題へ変換する。

(1) 利用者一人当たりの経済損失

ボトルネック地点では、利用者一人当たりの経済損失 $l(t)$ として、累積図-2のように、待ち行列時間による損失 $l_Q(t)$ とスケジュール・ディレイによる損失 $l_S(t)$ が発生する。そこで、時刻 t にボトルネックへ到着した利用者の損失 $l(t)$ を、 $l_Q(t)$ と $l_S(t)$ の線形和：

$$l(t) \equiv \alpha \cdot l_Q(t) + l_S(t) \quad (1)$$

と定義する。ここで、 α は待ち行列時間による損失を重み付けするパラメータであり、確率的な待ち行列時間による損失の影響度を示す。

a) 待ち行列時間による損失

時刻 t における到着者数 $\hat{\lambda}(t)$ は、期待値にボトルネック通行権の発行枚数 $\lambda(t)$ をもつ、正規分布に従うと仮定する：

$$\hat{\lambda}(t) \sim N(\lambda(t), \Delta^2(\lambda)) \quad (2)$$

ここで、 $\Delta^2(\lambda)$ は到着者数 $\hat{\lambda}(t)$ の分散であり、時間帯 $[t, t+dt]$ の発行枚数 $\lambda(t)$ は一定とする。

したがって、待ち行列長 q の時間帯 $[t, t+dt]$ における推移は、ボトルネック通行権の発行枚数 $\lambda(t)$ 、ボトルネック容量 μ を用いて、次のように得られる。

$$q(t+dt) - q(t) \sim N((\lambda(t) - \mu)dt, \Delta^2(\lambda)dt) \quad (3)$$

このとき、待ち行列長 q と待ち行列時間 l_Q には、次の条件：

$$l_Q(t) = q(t)/\mu \quad (4)$$

が成立する。これより、待ち行列時間 l_Q の時間帯 $[t, t+dt]$ における推移は、以下のように与えられる。

$$l_Q(t+dt) - l_Q(t) \sim N((\lambda(t)/\mu - 1)dt, \Delta^2(\lambda)dt/\mu) \quad (5)$$

b) スケジュール・ディレイによる損失

スケジュール・ディレイによる損失 l_S に関しては、簡単のため、確定的な関数に近似して求める。このとき、時刻 t に到着した利用者のスケジュール・ディレイ l_S の時間帯 $[t, t+dt]$ における推移は、以下のように与えられる。

$$l_S(t+dt) - l_S(t) = \begin{cases} (1 - \lambda(t)/w)dt & \text{if } D(t) < W(t) \\ (\lambda(t)/w - 1)dt & \text{if } D(t) \geq W(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$\equiv s(t, \lambda(t))$$

ここで、 w は単位時間当たりの通勤開始数、 $D(t)$ はボトルネック地点での累積流出数であり、 $W(t)$ は累積勤務開始数である。

c) 経済損失の従う条件付確率密度関数の導出

利用者一人当たりの経済損失 l の時間帯 $[t, t+dt]$ における推移は、以下のように与えられる。

$$l(t+dt) - l(t) \sim N(m(t, \lambda(t))dt, v(t, \lambda(t))dt) \quad (7)$$

$$m(t, \lambda(t)) = \frac{\alpha\lambda(t)}{\mu} - 1 + s(t, \lambda(t)), \quad v(t, \lambda(t)) = \frac{\Delta^2(\lambda)}{\mu}$$

このとき、時々刻々の利用者一人当たりの経済損失 l の確率分布関数は、次の拡散方程式 (Fokker-Planck方程式) に従う：

$$\frac{\partial F(l, t | L_0, \tau)}{\partial t} = -m(t, \lambda(t)) \cdot \frac{\partial F(l, t | L_0, \tau)}{\partial l} + v(t, \lambda(t)) \cdot \frac{\partial^2 F(l, t | L_0, \tau)}{2\partial l^2} \quad (8)$$

$$s.t. \quad F(\infty, t | L_0, \tau) = 1, \quad F(s(t, \lambda), t | L_0, \tau) = 0 \quad \forall t$$

$$F(l, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } l > L_0 \\ 0 & \text{if } l \leq L_0 \end{cases}$$

ここで、 $F(l, t | L_0, \tau)$ は時刻 $\tau (< t)$ での経済損失が L_0 である条件下で、時刻 t に経済損失が l となる条件付確率分布関数を表す。その F を用いて、同じ条件下での、条件付確率密度関数 f は、以下のように与えられる：

$$f(l, t | L_0, \tau) = \frac{\partial F(l, t | L_0, \tau)}{\partial l} \quad (9)$$

(2) 最適化問題の定式化

この経済損失 l は確率変数であるため、確率的に評価しなくてはならない。そこで、不効用関数 $U(l)$ を設定し、時刻 $\tau(<t)$ での経済損失が L_0 である条件下での、時刻 t における不効用の条件付期待値(期待不効用) $E_t\{U\}$ ：

$$E_t\{U(t, \lambda(t) | L_0, \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U(l, t | L_0, \tau) f(l, t | L_0, \tau) dl \quad (10)$$

を利用者一人当たりの経済損失 l の指標に用いる。

利用者全体の期待損失は、利用者一人当たりの期待不効用 $E\{U\}$ の総和で表される。従って、最適発行パターンを求める問題は、時々刻々の権利発行枚数 $\lambda(t)$ を制御変数とする、期待総不効用の最適化問題として定式化できる。

$$\min_{\{\lambda(t)\}} \int_0^T \lambda(t) \cdot E\{U(t, \lambda(t) | L_0, \tau)\} dt \quad (11)$$

s.t. $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t, \text{ Eq.(8)}$

ただし、 T はボトルネック通行権の発行時間帯長である。各時刻の期待不効用は、拡散方程式(8)を解いて得られる、経済損失 l の条件付確率密度関数 f を式(10)に代入して求められる。

このとき、発行時間帯を通じた権利発行枚数の推移パターン $\{\lambda(t)\}$ は、各時刻の権利発行枚数の組み合わせ次第で無数に存在しうる。そのため、無数の発行パターンの中から期待総不効用を最小化する発行パターンを見つけることは難しい。

そこで、本研究では、問題(11)を時刻に関して分解して、数値的に解析可能なアルゴリズムを開発した。具体的には、最適化問題(12)を時刻に関して分解し、分解した問題を時刻0から前向きに解くアルゴリズムである。そして、得られた各時刻における最適発行数を時刻0から T まで並べたものが、最適発行パターンとなる。

4. 最適発行パターンの検討

前章で定式化した最適化問題(11)を、表-1のパラメータを用いて数値計算で解く。ここで、各パラメータの単位は、人数と時刻をそれぞれ(人)と(分)に基準化して与えている。

前章で定義した不効用関数 $U(l)$ は、経済損失 l の期待値と分散を評価するため、経済損失 l の2次関数とする。

$$U(t) = r \cdot l(t)^2 + l(t) \quad (12)$$

表-1 各変数の設定

パラメータ	数値
ボトルネック容量 μ	1
通行権の発行枚数 $\lambda(t)$	$0 \leq \lambda(t) \leq 1$
到着者数の分散 $\Delta^2(\lambda)$	0.25
$l_Q(t)$ の重み付けパラメータ α	$0 \leq \alpha \leq 5$
リスク回避度 r	$0 \leq r \leq \infty$
全通勤者数 N	60
勤務開始率 w	1.5
時刻 $t=0$ の待ち行列時間 $l_Q(0)$	0

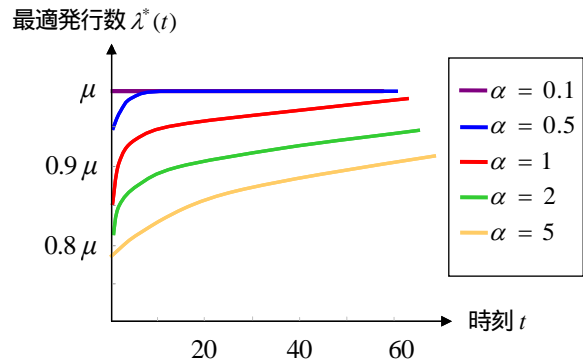


図-3 α と最適発行パターンの関係($r=1$)

ただし、 r は利用者のリスク回避度である。このとき、不効用関数 $U(l)$ を $l=E\{l\}$ まわりでTaylor展開して、式(10)に代入すると、以下のように期待不効用 $E_t\{U\}$ が求められる。

$$E_t\{U(t, \lambda(t) | L_0, \tau)\} = E\{l(t, \lambda(t) | L_0, \tau)\} + r \left([E\{l(t, \lambda(t) | L_0, \tau)\}]^2 + \text{Var}\{l(t, \lambda(t) | L_0, \tau)\} \right) \quad (13)$$

(1) 最適発行パターンの定性的性質

図-3, 4は、最適な権利発行数 $\lambda^*(t)$ の時間的推移を示している。これより、利用者の確率的な到着挙動を考慮した場合、時間帯の初期に発行数を少なく設定していることがわかる。これは、時間帯の初期に待ち行列を発生させると、後々までその影響が残存するという待ち行列の“時間的外部性”に起因するものである。この外部性のため、時間帯の初期には、なるべく待ち行列を発生させないように発行数を少なく設定している。また、時間帯を通じて、ボトルネック容量 μ よりも少ない発行枚数が最適となる。

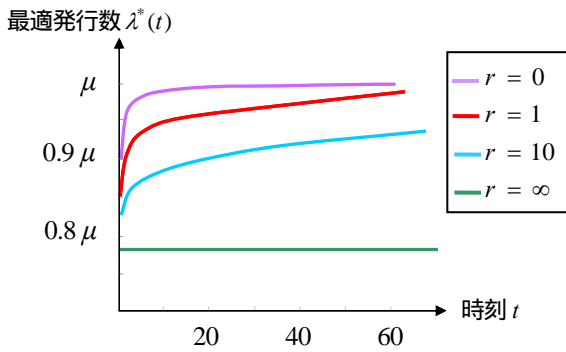


図 - 4 r と最適発行パターンとの関係 ($\alpha = 1$)

(2) α と最適発行パターンとの関係

待ち行列による時間損失を重み付けするパラメータ α と最適発行パターンとの関係を、図 - 3 に示す。図より、 α を小さく（大きく）設定する場合、発行数を少なく（多く）設定することがわかる。これは、待ち行列時間とスケジュール・ディレイのトレード・オフ関係から、スケジュール・ディレイを増やしても待ち行列時間を発生させない発行パターンが最適となるためである。

(3) r と最適発行パターンとの関係

図 - 4 は、リスク回避度 r を変化させた場合における、最適な権利発行枚数 λ^* の時間的推移を示している。図より、 r を大きく（小さく）設定するほど、経済損失の分散 $\text{Var}\{l\}$ （期待値 $E\{l\}$ ）を回避する傾向が強まることがわかる。具体的には、 $r \rightarrow \infty$ のとき経済損失の分散 $\text{Var}\{l\} \rightarrow 0$ となる発行パターン（ $\lambda^* = 0.78$ ）が最適となる。逆に、 $r \rightarrow 0$ の場合、経済損失の期待値 $E\{l\}$ が最小となる発行パターンが最適となる。

(4) フロントティア図

問題(11)の解は、リスク回避度 r を固定した場合、利用者一人当たりの経済損失の期待値 $E\{l\}$ と分散 $\text{Var}\{l\}$ の空間上に1点プロットできる。さらに、 r を変化させて問題(11)を解くと、損失の期待値 $E\{l\}$ と分散 $\text{Var}\{l\}$ の空間上に、曲線“フロントティア”が図 - 5 に示すようにひける。フロントティアは、あるリスク回避度 r 毎に、これ以上利用者の不効用を改善することができない限界点をプロットし、さらに、 r を連続的に変化させた場合の限界点を連ねた曲線である。

ここで、リスク回避度 r が大きい（小さい）利用者ほど、経済損失の分散 $\text{Var}\{l\}$ （期待値 $E\{l\}$ ）を回避して、フロントティア上を $\text{Var}\{l\} \rightarrow 0$ へシフトする。

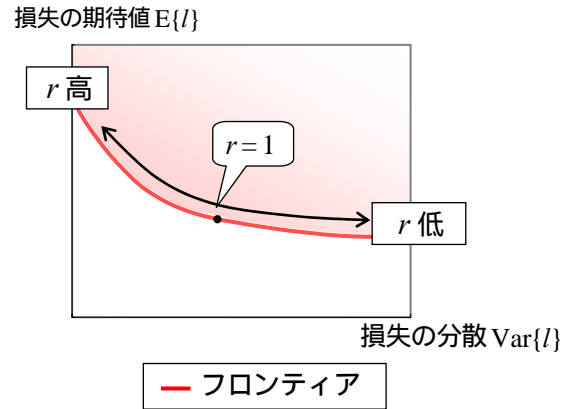


図 - 5 フロントティア図 ($\alpha = 1$)

一般的な利用者は、ある程度損失の分散 $\text{Var}\{l\}$ を回避する傾向があると考えられるため、 $E\{l\}$ と $\text{Var}\{l\}$ の組み合わせを最小化する発行パターンが最適となる。

5. おわりに

本稿では、利用者の確率的な到着を考慮した上で、利用者全体の期待総不効用を最小化する問題を定式化し、ボトルネック通行権の最適発行パターンを解析した。その結果、最適発行パターンは、次の4点の特性を持つことがわかった：

- (1) 通勤時間帯の初期は発行数を少なく設定し、徐々に増加、
- (2) 発行数をボトルネック容量より少なく設定、
- (3) 待ち行列時間を重く評価する場合、通勤時間帯を通じて発行数を少なく設定、
- (4) リスク回避傾向が高い場合、通勤時間帯を通じて発行数を少なく設定。

参考文献

- 1) 赤松 隆, 佐藤慎太郎, Nguyen, X. L.: ボトルネック通行権取引制度に関する研究, 土木学会論文集(投稿中)。
- 2) Newell, G. F.: Application of Queueing Theory, Chapman and Hall, 1971 [森村・森訳, 待ち行列理論の応用 - その新しい方法, サイエンス社, 1973]。
- 3) Kleinrock, L.: Queueing Systems, Wiley-Interscience, 1979. [手塚・真田・中西訳, 待ち行列システム理論, マグロウヒル好学社, 1979]。
- 4) 桑原雅夫: 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, 土木学会論文集, No.604, -41, 73-84, 1998。
- 5) 高橋幸雄, 森村英典: 混雑と待ち (経営科学のニュー・フロントティア7), 朝倉書店, 2001。