都市の集積・分散モデルとその分岐解析に関する研究 *

Research on bifurcation analysis of Core–Periphery model of city*

柳本彰仁 **, 池田清宏 **, 赤松隆 ***, 河野達仁 ***
By Akito YANAGIMOTO**, Kiyohiro IKEDA**, Takashi AKAMATSU***, Tatsuhito KONO***

1. はじめに

「財や人間の多様性・生産における規模の経済・財や情報の輸送費」の 3 者の相互作用により内生的に生じる集積力に注目し，都市・地域および国際間における空間経済システムの変遷を分析する分野が注目を浴びている．Krugman[1)]は Dixit and Stiglitz の独占的競争モデル[2)]を空間経済に拡張し，大胆な仮定を加えることにより，輸送費の変化による工業の集積現象を分析した．このモデルは，集積について極めて示唆に富む結果をもたらしている．その代表的なものが分岐現象であり，例えば，2 つの都市において集積力が強い場合には，対称均衡が不安定となり，分岐によっていずれかの都市に経済活動が集中することが明らかにされている．

本論文では，人口またその置かれた状況が相互に全く等価な n 都市モデル（n は自然数）を考え,「この都市の数が多くなる場合に，どのような集積が発生するのか？」という命題に答えることとする．この命題は Krugman モデルに基づく，都市の集積過程の理解をより現実的なものとする上で重要である．

現在取り扱われている 2 都市や 3 都市モデルのような少ない都市数に対しては，現行の解析法で十分であるが，都市数が n 個に拡張されると安定な解がどこにあるのかを見つけることは大変な作業となるので，計算分岐理論による非線形方程式の局所的分岐解析法[3)]を導入することが望ましい．一方，対称性を持つ系の分岐の仕組みは群論的分岐理論[4),5)] により解明されており，本論文で対象とする n 都市モデルの分岐の仕組みも既に求められている．すなわち，この論文では，この 2 つの理論を用いることにより，n 都市モデルの分岐に伴う集積過程を上手に解析し，見通しよく理解することを目的とする．

2. Krugman モデル

互いに対等な n 個の都市を設定し，都市の人口集積の分岐による変化の過程のメカニズムを明らかにする．

(1) 一般均衡の枠組み

Krugman モデルの枠組みは以下に示すとおりである．

- 経済は，独占的競争が行われる工業部門と完全競争的な農業部門の２つの部門からなる．
- 経済全体では，工業労働者はμ，農業労働者は$(1-\mu)$ 存在する．
- 工業労働者は自身の効用を最大化するように自由に都市間を移動することができるが，農業労働者は移動不可能で，すべての都市に均等に分布しており，賃金 1 である．
- 工業品の輸送には輸送費がかかり，農業品の輸送には輸送費はかからないこととする．

本研究では，n 個の都市が円周に沿って等間隔に存在する競技場経済を考える．すなわち，都市 r と都市 s の間の輸送費 T_{rs} を

$$T_{rs} = e^{\tau|r-s|} \tag{1}$$

とする．($|r-s|$ は都市 r から都市 s に至る最短距離)

(2) モデルの定式化

消費者の効用最大化行動，生産者の利潤最大化行動，氷塊輸送を考慮したこの Krugman モデルにおいて，都市 r の工業労働者の賃金 w_r は以下に示す連立方程式によって決定される．

$$Y_r = \mu\lambda_r w_r + (1-\mu)/n \tag{2}$$

$$G_r = [\sum_{s=1}^{n} \lambda_s (w_s T_{sr})^{1-\sigma}]^{1/(1-\sigma)} \tag{3}$$

$$w_r = [\sum_{s=1}^{n} Y_s T_{rs}^{1-\sigma} G_s^{\sigma-1}]^{1/\sigma} \tag{4}$$

ここで，Y_r は都市 r の所得，G_r は都市 r の工業品価格指数，T_{sr} は工業品を都市 s から都市 r まで輸送したときの輸送費，σ は任意の差別化された 2 財間の代替弾力性である．λ_r は都市 r における工業人口全体に対する割合であり，すなわち次式を満足する．

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \tag{5}$$

* キーワード：人口分析，産業立地，システム分析

** 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻
*** 東北大学大学院情報科学研究科
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,
TEL: 022-795-7420; FAX: 022-795-7418)

また，実質賃金

$$\omega_r = w_r G_r^{-\mu} \tag{6}$$

は，平衡点において以下の条件を満たす．

$$\begin{cases} \omega_r = \bar{\omega} & if\ \ \lambda_r > 0 \\ \bar{\omega} - \omega_r \geq 0 & if\ \ \lambda_r = 0 \end{cases} \tag{7}$$

ここで，$\bar{\omega}$ は均衡実質賃金である．

式 (7) に示した相補性条件は

$$\begin{cases} (\bar{\omega} - \omega_r)\lambda_r = 0, \\ \bar{\omega} - \omega_r \geq 0, \quad \lambda_r \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

と書き直すことができる．

3.　力学系の計算分岐理論

非線形連立方程式系を解くことにより，分岐挙動を求める計算分岐理論の一般論[3)]についてまとめる．

(1)　非線形方程式

非線形方程式の一般形

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, f) = \begin{pmatrix} F_1(u_1, \ldots, u_n, f) \\ \vdots \\ F_n(u_1, \ldots, u_n, f) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{9}$$

を考える．ここで $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)^{\mathrm{T}}$ は非線形方程式を表すベクトル関数，$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ は未知変数ベクトル，f はあるパラメータである．

非線形方程式 (9) を Newton-Raphson 法などの反復解法を用いて解くことにより，解曲線の集合 $(\mathbf{u}, f)$ を求めることとなる．

(2)　特異点

非線形方程式 (9) の解 $(\mathbf{u}, f)$ とその近傍の別の解 $(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}, f+\delta f)$ を考える．この 2 つの解が支配方程式を満足することから，増分支配方程式

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{F}(\delta\mathbf{u}, \delta f) &\equiv \mathbf{F}(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}, f+\delta f) - \mathbf{F}(\delta\mathbf{u}, \delta f) \\ &= J(\mathbf{u}, f)\delta\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial f}(\mathbf{u}, f)\delta f = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10}$$

が求められる．ここで

$$J(\mathbf{u}, f) = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial u_1 & \cdots & \partial F_1/\partial u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F_n/\partial u_1 & \cdots & \partial F_n/\partial u_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

はヤコビ行列である．

ヤコビ行列 $J(\mathbf{u}, f)$ が正則である場合には，増分方程式 (10) は唯一の解，すなわち通常解を持つ．

一方，ヤコビ行列 $J(\mathbf{u}, f)$ が正則でない場合には，増分方程式 (10) は唯一の解を持たなくなる，このような点を特異点と呼ぶ．ヤコビ行列 $J(\mathbf{u}, f)$ の固有値を e_i とし，固有ベクトルを $\boldsymbol{\psi}_i$ とすると $(i = 1, \ldots, n)$，標準固有値問題は

$$J\boldsymbol{\psi}_i = e_i\boldsymbol{\psi}_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

となる．このとき，特異点の条件は，少なくとも 1 個以上の固有値がゼロとなること，すなわち，

$$e_1 = \cdots = e_M = 0 \tag{13}$$

が成り立つことである．ここで M は特異点の多重度である．特異点は以下のように分類できる．

$$\begin{cases} \text{パラメータ } f \text{ の極大・極小点} \\ \text{分岐点} \begin{cases} \text{単純分岐点 } (M = 1) \\ \text{2 重分岐点 } (M = 2) \\ \vdots \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

(3)　安定性の判定

力学系ではヤコビ行列 J の固有値により系の安定性が判定されている．

(4)　分岐経路の探査

分岐点において枝分かれする分岐経路を追跡するのが分岐経路解析である．

単純分岐点の場合は，ゼロ固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_1$ の方向に分機解を探査すればよい．

2 重分岐点では，ゼロ固有値に対応する固有ベクトルが 2 つ $\boldsymbol{\psi}_1$，$\boldsymbol{\psi}_2$ 存在するので，次の方向に探査する．

$$\cos\,\alpha\,\boldsymbol{\psi}_1 + \sin\,\alpha\,\boldsymbol{\psi}_2 \tag{15}$$

ここで，α は解の方向を表すパラメータである．全ての α の方向に解が存在するわけではないので，解の方向に対応する α を如何に選ぶかが問題となる．後述の群論的分岐理論はこの問題の答えを与えるという意味で有用である．

4.　計算分岐理論の本モデルへの適用

Krugman モデルの定式化においては不等式条件が重要である．しかし，計算分岐理論では等式条件のみを取り扱うことが問題となる．

そこで，本論文では未知変数やパラメータは，

$$\mathbf{u} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \bar{\omega})^{\mathrm{T}}, \quad f = \tau \tag{16}$$

と取ることにする．等式条件式 (4) と式 (5) に，不等式条件 (8) を等式化した条件式を加えた，以下の $2n + 1$

個の連立方程式を考える．

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_n\\ F_{n+1}\\ \vdots\\ F_{2n}\\ F_{2n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\bar{\omega}-\omega_1)\lambda_1\\ \vdots\\ (\bar{\omega}-\omega_n)\lambda_n\\ [\sum_{s=1}^{n}Y_sT_{1s}^{1-\sigma}G_s^{\sigma-1}]-w_1^{\sigma}\\ \vdots\\ [\sum_{s=1}^{n}Y_sT_{ns}^{1-\sigma}G_s^{\sigma-1}]-w_n^{\sigma}\\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n-1\end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad (17)$$

この非線形連立方程式を満たす解を計算分岐理論により求め，その解の中で相補性条件式 (8) を満足するものを取り出すという方法論により，分岐解析を行う．

非線形方程式 (17) は，最初の n 個の方程式 F_1〜F_n が因数分解された形となっており，後述するように，パラメータを変化させてもそのパターンが崩れない自明解を持つ．例えば，全ての地域が同一の人口を持つ解

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1/n \qquad (18)$$

や 1 つの地域に集積してしまう解

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0 \qquad (19)$$

は最も代表的な自明解である．この自明解の存在がこのモデルにおいて特徴的である．

解曲線の追跡においては，自明解を最初に求め，次に分岐解を求めることになる．

5. 群論的分岐理論の一般論

一様な安定状態にある系が，パラメータがある値を超えると不安定化し，あるパターンを持った別な安定解が出現することが知られている．これはパターン形成と呼ばれる現象であり，その仕組みを記述する理論として群論的分岐理論が発展した．

非線形方程式 (9) の対称性は，ある群に関する同変性

$$T(g)\,\mathbf{F}(\mathbf{u},f)=\mathbf{F}(T(g)\,\mathbf{u},f), \quad {}^{\forall}g\in G \qquad (20)$$

により表される．ここに $T(g)$ は対称性を表す座標変換行列であり，g は対称性を表す要素であり，G はこの要素からなるある群である．

同変条件式 (20) を満足する系の分岐によるパターン形成は下記の性質を満たす．

- 系の対称性は分岐を起こすまでは保持される．
- 系の対称性や解の個数は分岐点で変化する．
- 系の安定性は特異点で変化する．
- 通常点では，系の対称性・安定性や解の個数は変化しない．すなわち，何も起こらない．

具体的な分岐の仕組みは，対象とする系がどのような対称性を持つかにより異なる個別論であり，系毎に調べられている．その具体例は次節で Krugman モデルに対して紹介する．

6. 群論的分岐理論の本モデルへの適用

(1) n 都市モデルの対称群

本研究で扱うモデルは n 個の都市が円周に沿って等間隔に存在する状況を考えているので，正 n 角形状の対称性を表す 2 面体群 $G=\mathrm{D}_n$ が対称群となる．2 面体群 D_n は

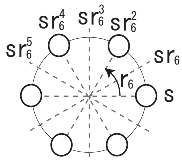
$$\mathrm{D}_n=\{e,r_n,\ldots,r_n^{n-1},s,sr_n,\ldots,sr_n^{n-1}\} \qquad (21)$$

と定義される．ここでこの式の右辺の各要素は下記の幾何学的対称性を表す座標変換である．

- 何も操作しない変換 (恒等変換) : e
- 正 n 角形の中心のまわりに反時計方向に $2\pi/n$ 回転する変換 (並進変換) : r_n (r_n^i:変換を i 回行う)
- 軸上に鏡を置いて映した像への変換 (鏡映変換) : s

図–1 に，$n=6$ の場合を示す．

本モデルの支配方程式 (17) は同変条件式 (20) を満足するため群論的分岐理論の成果が適用できる．$n\geq 3$ の場合には，都市モデルは $G=\mathrm{D}_n$ に対して不変となる．ただし，$n=2$ の場合は特殊であり，都市モデルは $G=\mathrm{D}_1$ に対して不変となる．



図–1 正 6 角形状に広がる都市とその変換

(2) 分岐

D_n 不変な経路の分岐点から分岐した後の対称性は低下し，その対称性は D_n の部分群により表される．

2 都市モデルに対応する群 D_1 不変な解は，鏡映対称性だけを持ち，非対称な解 $\mathrm{C}_1=\{e\}$ だけが分岐する．

n 都市モデルに対応する群 D_n 不変な解からの分岐解は次数 m が n の約数である 2 面体群

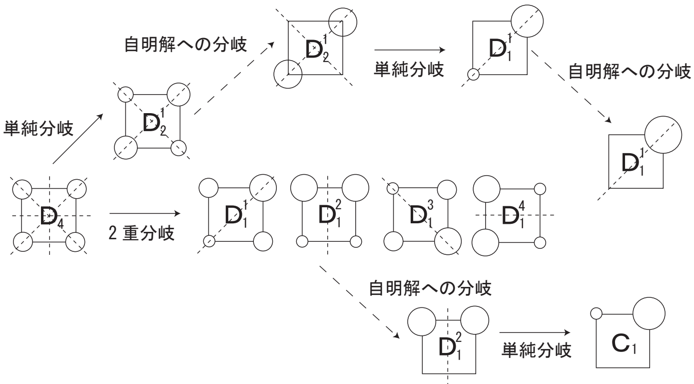
$$\mathrm{D}_m^k=\{r_m^i,sr_m^ir_n^{k-1}\mid i=0,1,\ldots,m-1\} \qquad (22)$$
$$(k=1,2,\ldots,n/m)$$

に関して不変である．ちなみに，$n=4$ に対する分岐解の対称性を表す部分群を**図–2** に示す．同様に，分岐経路からさらに分岐する経路の対称性を求めていくことにより，階層的分岐の規則が求められる．

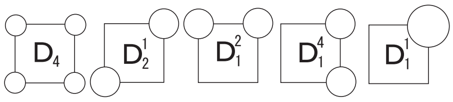
(3)　地域数 $n = 4$ の場合の分岐の理論予測

都市数 $n = 4$ に対する，地域が全て同じ人口を持つ自明解 ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_4 = 1/4$) から分岐する解の一例を**図–2** に示す．図中一番左側の D_4 不変な 4 都市が等価な解から，実線の矢印で示すような多段階の分岐を起こすことにより，色々な集積パターンが生み出されている．図中の〇の大きさにより，人口の大きさを示す．

都市数 $n = 4$ の自明解は，**図–3** に示す 5 つである（都市 1(右上) が人口最大としたとき）．このモデルは，ある地域の人口がゼロとなる場合に自明解と交差し，その点が分岐点となる場合があるという特徴をもっている．図中に点線の矢印により，この種の分岐を示す．



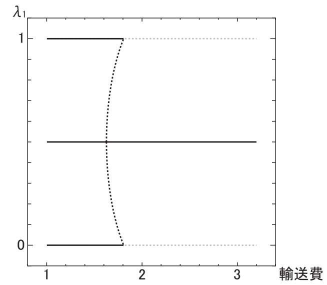
図–2　$n = 4$ の場合の分岐の例



図–3　都市数 $n = 4$ の場合に自明解となる人口分布パターン

7.　都市の集積解析結果

(1)　都市数 2 のとき

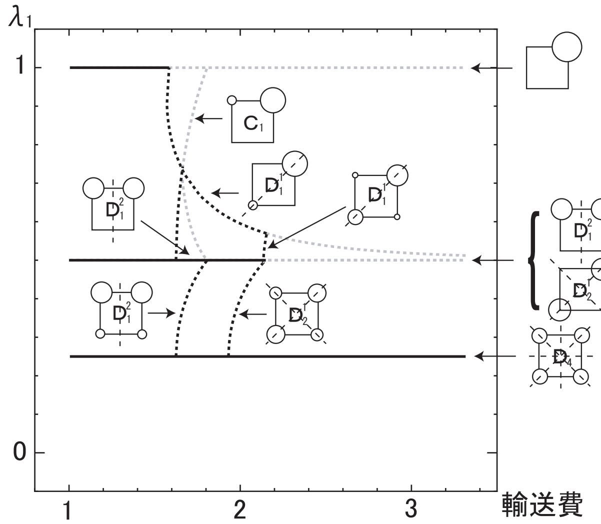


図–4　輸送費の変化に伴う平衡点の変化 (2 都市)

都市数が 2 の場合 ($n = 2$) に非線形連立方程式 (17) に対して，計算分岐理論を用いて解くことにより**図–4** に示す輸送費の変化による都市の人口の変化を求めた ($\mu = 0.4$，$\sigma = 5$)．ちなみに，横軸が輸送費を表し，縦軸が都市 1 の人口 λ_1 を表している．図中の 3 本の水平な実線は輸送費の大小に関わらず存在する自明解 $(\lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.5)$，$(1, 0)$，$(0, 1)$ である．図中の黒色破線は自明解の分岐点から異なる自明解の分岐点を結ぶ経路であり，これにより分岐構造の存在が確認できる．また，相補性条件式 (8) を満たさない経路を灰色破線で表す．以上の結果は文献[1]の結果を再現できている．

(2)　都市数 4 のとき

都市数 2 の場合と同様，都市数 4 における輸送費の変化に伴う平衡点の変化を計算分岐理論に従って追っていくと，**図–5** が得られる．



図–5　輸送費の変化に伴う平衡点の変化 (4 都市)

図–5 を見ると，輸送費の変化に伴い分岐が起こり，一様分布から複数均衡を経て，一極集中するという都市形成の基本的なメカニズムが確認できる．

ちなみに，**図–5** では代表的な経路のみを描いており，この他にも平衡解の経路は数多く存在する．

8.　おわりに

本研究では，Krugaman モデルに計算分岐理論・群論的分岐理論を適用することにより，都市の集積・分散のメカニズムを分岐という視点にもとづき解析し，多段階の分岐による都市の集積の進行過程を示すことができた．しかし，安定性の議論や実在都市への本解析結果の適用に関しては更なる検討が必要である．

参考文献

1) M. Fujita, P. Krugman,and A.J. Venables, The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade, MIT Press, 1999.
2) A.K. Dixit, and J.E. Stiglitz, Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, American Economic Review, 67(3). pp.297–308, 1997.
3) 藤井文夫，大崎純，池田清宏, 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.
4) M. Golubitsky, I. Stewart, and D.G. Schaeffer, Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 2. Springer-Verlag, New York, 1988.
5) K. Ikeda, and K. Murota, Imperfect Bifurcation in Structures and Materials, Springer-Verlag, New York, 2002.