

リアルタイム観測情報を活用した確率動学的システム最適配分問題^{*1}

Stochastic Dynamic System Optimization of 2-link Network under Free-flow Travel Time Uncertainty ^{*1}

長江 剛志^{*2} ・ 赤松 隆^{*3}

By Takeshi NAGAE^{*2} and Takashi Akamatsu^{*3}

1 はじめに

近年の IT 技術の進展は、時々刻々変動する交通状況のリアルタイム観測を可能とした。しかしながら、こうした交通状況の動学的不確実性と明示的に考慮したリアルタイム観測情報の高速道路ランプ制御などへの活用に関する研究はわずかである。棟方・赤松¹⁾は、従来の(確定的な枠組下での)動的システム最適(DSO: *Dynamic System Optimization*)問題を、旅行時間が確率動学的に変動する場合へと一般化した。しかし、この研究では、問題の定式化および問題を解くための数値計算手法が提案されたのみであり、具体的な数値計算結果は示されていない。そこで、本研究では、棟方・赤松¹⁾の確率的 DSO 問題に対して数値解析を行なう。そして、最適制御ルールの特性およびメカニズムを明らかにし、リアルタイム観測情報の効果的な活用がもたらすネットワークの効率性を分析する。

本稿は以下のように構成される。まず、2 および 3 で棟方・赤松¹⁾のモデルを概説する。具体的には、2 で確率 DSO 問題を定式化し、3 でその最適性条件を一般化相補性問題(GCP: *Generalized Complementarity Problem*)として記述する。4 ではこうして記述された問題に対する数値計算結果を示し、最適制御ルールの特性を明らかにする。最後に、5 はまとめである。

2 モデルの定式化

本章では、旅行時間の動学的不確実性下でのランプ制御問題を定式化する。まず、(1) 節でモデルの枠組を示し、続く(2) 節および(3) 節では、それぞれ、状態変数の時間進展を記述する。最後に、(4) 節では、これらの状態(遷移)方程式を制約条件とした確率制御問題としてランプ制御問題を定式化する。

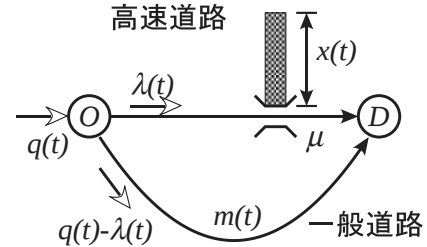


図1 対象とするネットワーク

(1) モデルの枠組

1 つの起終点ペアと 2 つのリンクから構成される図 1 のようなネットワークを考え、一方のリンクを高速道路、もう一本のリンクを(集約化された)一般道路とする。本稿では、モデルの性質およびメカニズムを判りやすく示すため、高速道路および一般道路に対して、下記の対比的な仮定を置く。まず、高速道路は旅行時間が 0 で、有限の容量 μ を持つ(i.e., 待ち行列が発生)とする。任意の時刻 t における待ち行列を $x(t)$ と記述する。このとき、時刻 t に高速道路に誘導された利用者の所要時間は $x(t)/\mu$ となる。一方、一般道路は無限の容量を持つ(i.e., 待ち行列が発生しない)が、正の旅行時間 $m(t)$ を持ち、その値が時々刻々確率的に変動すると仮定する。ある計画時間 $[0, T]$ を考え、時刻 $t \in [0, T]$ の単位時間当りの OD 間交通需要を時間に関する所与の関数 $q(t)$ で表現する。管理者は、毎時刻ランプ制御を行うことで、この OD 需要を高速道路と一般道路に振り分けられるとする。時刻 t に高速道路に誘導される交通フローを $\lambda(t)$ 、一般道路に誘導される交通フローを $q(t) - \lambda(t)$ とする。

(2) 高速道路の待ち行列の進展

時刻 $t \in [0, T]$ に高速道路に誘導される単位時間当りの交通量(以下、誘導フロー)を $\lambda(t)$ と記述し、微小時間 dt 間の待ち行列の増分 $dx(t) \equiv x(t + dt) - x(t)$ を

$$dx(t) = \begin{cases} \{\lambda(t) - \mu\} dt & \text{if } x(t) > 0, \\ \{\lambda(t) - \mu\} dt & \text{if } x(t) = 0 \text{ and } \lambda(t) \geq \mu, \\ 0 & \text{if } x(t) = 0 \text{ and } \lambda(t) < \mu. \end{cases} \quad (1)$$

^{*1} キーワーズ: 交通制御, 動的不確実性

^{*2} 正会員, 博士(情報科学) 神戸大学大学院自然科学研究科
(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

^{*3} 正会員 工博 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

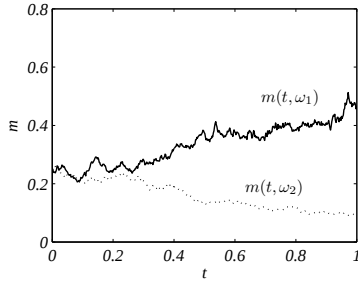


図2 一般道旅行時間 $m(t)$ の標本過程

と表現する．この式は，次のように説明できる：まず，時刻 t に正の待ち行列 $x(t) > 0$ が存在する場合，誘導フローが容量を超えていれば待ち行列は増加し，容量を下回れば待ち行列は減少する．次に，時刻 t に待ち行列が存在しない (i.e., $x(t) = 0$) 場合，誘導フローが容量を超えていれば待ち行列は増加するが，容量を下回る場合は待ち行列は 0 のまま変化しない．

(3) 一般道路の旅行時間の進展

本稿では，一般道路の旅行時間 $m(t)$ が図2のように時々刻々確率的に変動するものと仮定し，その進展を確率過程として表現する．まず，事象 (標本過程) の集合を Ω ，その適当な σ -加法族を $\mathcal{F}$ とし，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度を $\mathcal{P}$ とする．そして一般道路の旅行時間をこの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の確率過程 $m : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}_+$ とし，その動学を確率微分方程式：

$$dm(t) = \alpha[t, m(t)]dt + \sigma[t, m(t)]dW(t), \quad m(0) = m_0, \quad (2)$$

で表現する．ここで， α, σ は，いずれも時刻および一般道旅行時間に関する所与の関数であり，それぞれ，単位時間当りの一般道旅行時間の増分の期待値および分散を表している． $W(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される 1 次元 Wiener 過程であり， $dW(t)$ はその微小時間 dt における増分を表す．

(4) DSO 問題の定式化

管理者は，計画期間 $[0, T]$ 中のネットワーク全体の期待総走行時間を最小化するように，リアルタイムに状態を観測しながら状況依存的 (state contingent) なランプ流入制御を行う．具体的には，毎時刻 t において待ち行列 $x(t)$ ，および一般道旅行時間 $m(t)$ を観測し，それらに応じて高速道路への誘導交通フロー $\lambda(t) \in [0, q(t)]$ を決定する．すなわち，最適制御戦略は時刻 t および系の状態変数 x, m の関数 $\lambda(t, x, m)$ として定義される．以下では，全ての時刻および状態の組合わせに対する制御を，制御ルールと呼び，

$\lambda \equiv \{\lambda(t, x, m) | \forall (t, x, m) \in [0, T] \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_{++}\}$ と記述する．これを用いて，ランプ制御問題は以下のように定式化される．

$$[\text{SDSO}] \quad \min_{\lambda} \mathbb{E} [\mathcal{J}(0, T, \lambda, \omega) | (0, 0, m_0)]$$

ここで， $\mathbb{E}[\cdot | (t, x, m)]$ は，時刻 t に待ち行列および一般道旅行時間が，それぞれ， $x(t) = x$ ，および $m(t) = m$ と観測された下での条件付期待演算である．また， $\mathcal{J}(t, T, \lambda, \omega)$ は，制御ルール λ の下で，ある事象 (標本過程) $\omega \in \Omega$ が実現したときに時間 $[t, T]$ に発生する総走行時間であり，以下の式で定義される．

$$\mathcal{J}(t, T, \lambda, \omega) \equiv \int_t^T \left\{ \lambda(s) \frac{x(s)}{\mu} + \{q(s) - \lambda(s)\} m(s) \right\} ds \quad (3)$$

式 (3) の積分演算内の第 1 項および第 2 項は，それぞれ，各時刻において高速道路および一般道路で発生する総走行時間を表す．

3 最適制御ルールおよび最適性条件

問題 [SDSO] の最適性条件は一般化相補性問題として記述できる¹⁾．本章ではこれを概説しよう．まず，時刻 t に系の状態が $[x(t), m(t)] = [x, m]$ と観測されたときの問題 [SDSO] の最適値関数を以下のように定義する．

$$V(t, x, m) \equiv \min_{\lambda} \mathbb{E} [\mathcal{J}(t, T, \lambda, \omega) | (t, x, m)]. \quad (4)$$

DP 原理を適用し，伊藤の補題を適用すれば，当該状態 $[t, x, m]$ で成立する以下の HJB 方程式を得る．

$$\min_{0 \leq \lambda(t, x, m) \leq q(t)} \left[\lambda(t, x, m) x / \mu + \{q(t) - \lambda(t, x, m)\} m + \{\mathcal{D}_m + \mathcal{D}_x\} V(t, x, m) \right] = 0. \quad (5)$$

ここで， $\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_x$ は，それぞれ，以下のように定義される偏微分作用素である．

$$\mathcal{D}_m \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \alpha[t, m] \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \{\sigma[t, m]\}^2 \frac{\partial^2}{\partial m^2}$$

$$\mathcal{D}_x \equiv \begin{cases} \{\lambda(t, x, m) - \mu\} \frac{\partial}{\partial x} & \text{if } x > 0 \\ \{\lambda(t, x, m) - \mu\} \frac{\partial}{\partial x} & \text{if } x = 0 \text{ and } \lambda(t, x, m) \geq \mu \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ and } \lambda(t, x, m) < \mu \end{cases}$$

次に，HJB 方程式 (5) の目的関数が制御変数 $\lambda(t, x, m)$ について線形であることを利用すれば，任意の時刻 t

および状態 (x, m) における最適ランプ制御 $\lambda^*(t, x, m)$ は, 表 1 のように求められる. ここで, $\partial_x V(t, x, m) \equiv$

表 1 最適制御

	$x = 0$	$x > 0$
$q(t) < \mu$	$\lambda^*(\cdot) = q(t)$	$\lambda^*(\cdot) = q(t)$
$q(t) \geq \mu$	$\lambda^*(\cdot) = q(t)$ if $m \geq \partial_x V(\cdot)$	if $m \geq x/\mu + \partial_x V(\cdot)$ $\lambda^*(\cdot) = 0$
	$\lambda^*(\cdot) = \mu$ if $m < \partial_x V(\cdot)$	if $m < x/\mu + \partial_x V(\cdot)$

$\partial V(t, x, m)/\partial x$ は, 待ち行列を 1 単位増加させた時の期待総走行時間の増加量 (i.e., 時間外部性) を表わす.

表 1 の最適制御を元の HJB 方程式 (5) に代入すれば, 任意の状態最適値関数が従うべき最適性条件を導出できる. まず, $x > 0$ の場合, 最適値関数 $V(t, x, m)|_{x>0}$ は, 以下の (無限次元) 一般化相補性問題の解として特徴づけられる.

[GCP-A] Find $V(t, x, m)|_{x>0}$ such that

$$\min. \left\{ \mathcal{L}_{q-\mu} V(t, x, m) + q(t)x/\mu, \right. \\ \left. \mathcal{L}_{-\mu} V(t, x, m) + q(t)m \right\} = 0, \quad \forall (x, m) \in \mathcal{R}_{++} \times \mathcal{R}_{++}.$$

ここで, $\mathcal{L}_{q-\mu}$ および $\mathcal{L}_{-\mu}$ は, それぞれ, 待ち行列の変化が $dx(t) = (q - \mu)dt$ および $dx(t) = -\mu dt$ であるときの状態変数 $[x(t), m(t)]$ の生成作用素 (generator) であり, それぞれ, 以下のように定義される.

$$\mathcal{L}_{q-\mu} \equiv \mathcal{D}_m + (q - \mu) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{L}_{-\mu} \equiv \mathcal{D}_m - \mu \frac{\partial}{\partial x}.$$

次に, $x = 0$ かつ $q(t) \geq \mu$ の場合, 最適値関数 $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) \geq \mu}$ は, 以下の一般化相補性問題:

[GCP-B] Find $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) \geq \mu}$ such that

$$\left\{ \mathcal{L}_{q-\mu} V(t, x, m), \mathcal{L}_0 V(t, x, m) + [q(t) - \mu]m, \right\} = 0, \\ \forall m \in \mathcal{R}_{++}.$$

の解として求められる. ここで, $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{D}_m$ は, 待ち行列が変化しない (i.e., $dx(t) = 0$) ときの状態変数の生成作用素である.

最後に, $x = 0$ かつ $q(t) < \mu$ の場合, 最適値関数は, 以下の偏微分方程式を満たす.

[PDE-C] Find $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) < \mu}$ such that

$$\mathcal{L}_0 V(t, x, m) = 0, \quad \forall m \in \mathcal{R}_{++}. \quad (6)$$

ここまで示した最適性条件は, 図 3 のように表せる. 図 3 a), b) は, いずれも, 横軸に待ち行列 x , 縦軸に一般道旅行時間 m を取り, ある時刻 t において, 各状態 (x, m) で最適値関数が従う偏微分方程式を示したものである. 図 3 a) は, 時刻 t におけるネットワークへの流入率が高速道路の容量以上の場合 (i.e., $q(t) \geq \mu$), 図 3 b) は $q(t) < \mu$ の場合の最適性条件を, それぞれ, 表している. 各図において, 境界 $m^*(t, x) = x/\mu + \partial_x V(\cdot)$ は, 最適ランプ制御 $\lambda^*(\cdot)$ および最適値関数が従う偏微分方程式が, (x, m) 平面上のどこで切り替わるかを表している. ここで, この境界は, 問題 [GCP-A] あるいは [GCP-B] を解くことによってはじめて決定される “自由境界” であることに注意されたい.

4 数値計算

問題 [GCP-A], [GCP-B] および [PDE-C] は, 適当な離散的枠組の下で, それぞれ, 有限次元 GCP および線形方程式として表現し直される. これにより, 問題 [SDSO] は, 各離散時点で成立するこれらのサブ問題を順に解く問題に帰着する. 本稿では, 紙面の都合上,

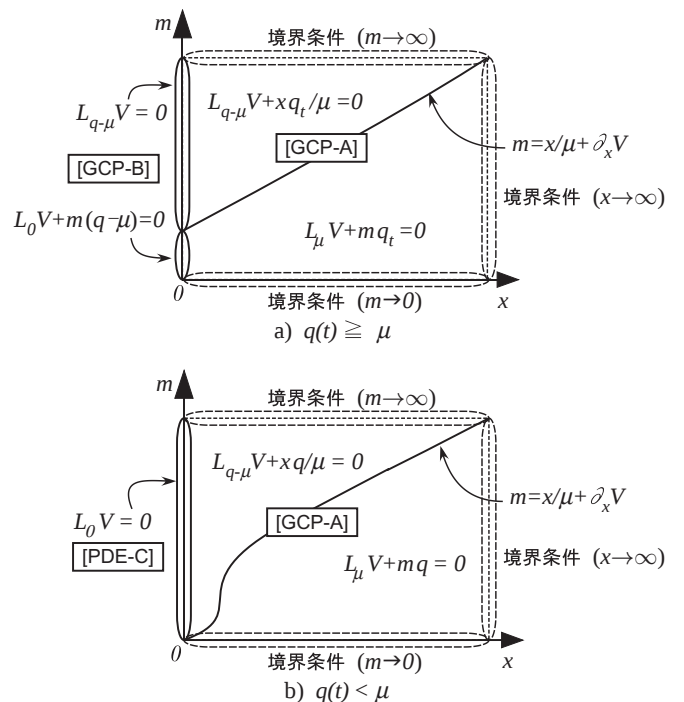


図 3 最適性条件の概念図

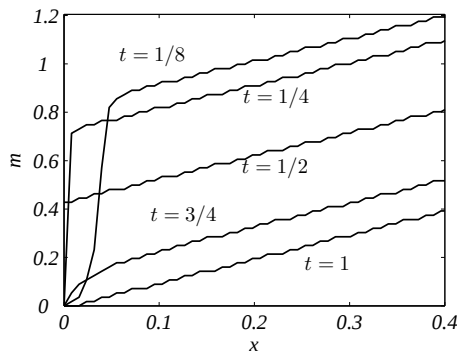


図4 最適制御ルール

その解法の詳細を省略し，計算結果の例のみを示す．

本稿では，まず，モデルの特性を判り易く示すため，交通需要 $q(t)$ を，次のような性質を持つ関数として特定化する： $t \in [T/4, 3T/4]$ で $q(t) \geq \mu$ ； $t = T/2$ でピークとなる； $q(0) = q(T) = 0$ ．本稿では，数値計算のベース・ケース・パラメータとして以下を用いる．

$$T = 1, \quad \mu = 1, \quad \alpha[t, m(t)] = 0, \quad \sigma[t, m(t)] = 0.4m(t)$$

図4は，時刻 $t = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ における最適制御ルールを表わしたものである．この図は，横軸に高速道路の待ち行列，縦軸に一般道路の旅行時間を取り，最適制御が切り替わる境界 $m^*(t, x) = x/\mu + \partial_x V(\cdot)$ をプロットしたものである．

この最適制御ルールを用いた制御方法を図5に示す．この図の横軸と縦軸は，それぞれ，時間および一般道旅行時間を示す． $m(t)$ は $m_0 = 0.25$ を初期値とした一般道旅行時間のある標準過程を， $m^*[t, x(t)]$ は各時刻における最適制御境界を，それぞれ表わす．この図を用いて，最適制御は以下のように求められる：観測された旅行時間 $m(t)$ が m^* を上回っていれば，全てのOD需要を高速道路へ誘導 ($\lambda^*(t) = q(t)$) し， $m(t) < m^*$ ならば容量 μ に等しいだけの交通量を高速道路へ誘導する ($\lambda^*(t) = \mu$)．

最後に本研究で用いたリアルタイム観測情報を用いたフィードバック型ランプ制御の効率性を表2に示す．各要素は，一般道路旅行時間の初期 m_0 ，パラツキの大きさ σ ，および制御ルール (FB/OL/DSO) ごとの期待総走行時間を表わしている；表の各行は一般道路旅行時間のパラツキの大きさ $\sigma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ に対応し，各列は，一般道路旅行時間の初期値が $m_0 = 0.2$ および $m_0 = 0.4$ の場合について，以下の3つの制御：①リアルタイム観測情報を用いたフィードバック (FB:

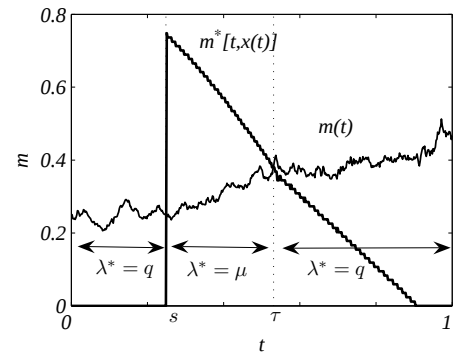


図5 一般道旅行時間 $m(t)$ と最適制御の例

表2 リアルタイム観測制御の効率性

	$m_0 = 0.2$			$m_0 = 0.4$		
σ	FB	OL	LF	FB	OL	LF
0.0	2.1145	2.1345	4.6802	3.7402	3.7727	4.6814
0.2	2.1074		4.6699	3.7013		4.6814
0.4	2.0843		4.5982	3.5938		4.6803
0.6	2.0427		4.4453	3.4374		4.6568
0.8	1.9809		4.2240	3.2206		4.5508
1.0	1.8945		3.9530	2.9454		4.3342

($\times 10^{-3}$)

feedback) 制御；②一般道路旅行時間が初期値のまま一定としたときのオープンループ (OL: open-loop) 制御；③全く制御を行なわないレッセ・フェール (laissez-faire) を，それぞれ行なった場合に対応する．この表より，以下の2点が判る．まず，リアルタイム観測情報を活用する・しないに関わらず，FBあるいはOL制御を行なうことは，制御を全く行なわないLFに比べて明らかに効率的である．次に，リアルタイム観測情報を適切に活用したFB制御は，どのようなパラメータ m_0, σ の下でも最も効率的であり， σ が大きいほど他の制御に比べて効率性の改善が顕著である．

5 おわりに

本研究では，リアルタイム観測情報を活用した高速道路ランプ制御問題に対して数値計算を行ない，その最適制御ルールの特性を明らかにした．

参考文献

- 1) 棟方章晴，赤松隆：旅行時間の不確実性を考慮した動的システム最適配分問題の解法，土木計画学研究・講演集，Vol. 30, 2004, CD-ROM.
- 2) Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problem, *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp. 533–563, 1999.