災害の希少性を考慮した災害債券設計問題：ロバスト期待効用アプローチ*1

Pricing and Optimal Allocation of Catastrophic Risk: A Robust Expected Utility Approach *1

長江 剛志*2・白井 宏明*3

By Takeshi NAGAE*2 and Hiroaki Shirai*3

1　はじめに

近年，地震やハリケーンなどの自然災害がもたらす金銭的リスク (以下，単に災害リスク) の移転手法の一つとして，災害債券 (CAT bond: *catastrophic bond*) が注目されている．災害債券とは，満期での支払い金額が，償還期間内に生起した災害の規模や被害に応じて決定される債券である：期間中に災害が生起した場合，その規模 (e.g. マグニチュード，保険業界損害インデックスなど) に応じて元本の一部あるいは全部が債券保持者から債券発行者に移転される．災害債券の発行者 (企業や保険会社) は，この債券を発行することで，非流動的 (illiquid) なリスクの全部あるいは一部を買手 (投資家) に移転できる．一方，災害債券の保持者 (投資家) は，この債券をポートフォリオに組込むことで，通常の債券よりも高いプレミアムとゼロ・ベータ資産によるリスク分散効果を得られる．

このような優れた機能・特徴が注目される一方，災害債券の設計問題 (i.e. プレミアムおよび発行額の決定) に関しては，見通しの良い分析手法を開発することは容易ではない．これは，災害債券が持つ以下の 2 つの特徴による．第 1 に，災害債券の収益は一般に “曖昧性 (ambiguity)” を持つ．すなわち，災害債券の収益は確率変数であるが，その確率分布を一意に特定化することが困難である．これは，地震やハリケーンなどの自然災害は発生回数が少ない上，災害が発生した時の規模 (i.e. 被害額) についてのデータ・経験が極めて乏しいためである．このように将来の収益の確率分布が判らない曖昧性は，確率分布が既知の “リスク” とは明示的に区別される．なぜなら，“Ellsberg の壺 [1)]” に代表されるように，曖昧性を回避しようとする投資家の性向が，古典的な期待効用理論では表現できないためである．第 2 に，災害債券は，非流動的リスクを移転するデリバティブであると同時に，保険としての性質を持つ．この場合，債券の発行者 (売手) と投資家 (買手) の間に次のような非対称な関係が存在することが知られている [2)]：災害債券の発行者は，最適な契約条件 (i.e. プレミアムと発行額) を決定するが，投資家はその契約条件を与件として，債券を購入するか否かのみを決定する．従来，災害債券を含むデリバティブ設計問題を扱った研究はファイナンスや経済学の分野で散見されるが，以上の 2 点の両方を明示的に考慮した手法は，筆者らの知る限り，皆無である．

こうした背景に鑑み，本研究では，自然災害の曖昧性と買手・売手間の非対称性を明示的に考慮した上で，災害債券設計問題を定量的・定性的に分析するための枠組を提案する．具体的には，まず，曖昧性下での投資家の行動を “ロバスト期待効用モデル [3)]” を用いて記述する．ここで，ロバスト期待効用理論は，従来の期待効用理論を曖昧性回避性向を考慮できる枠組へと一般化した意思決定・リスク評価問題の扱いやすい表現・分析手法として位置付けられる．次に，このロバスト期待効用理論を用いて，買手と売手の非対称な行動を明示的に考慮した保険デリバティブ設計の枠組 [4)] を一般化する．こうして定式化した問題に対して数理解析および数値解析を行ない，モデルの特性およびメカニズムを明らかにする．

本稿は以下のように構成される．第 2 章では災害債券設計問題をインセンティブ設計問題として定式化する：まず，モデルの枠組を示し，債券の買手および売手の行動を最適化問題として，それぞれ記述する．第 3 章では，こうして定式化された問題の数値解法を示し，感度解析を行なってモデルの特性およびメカニズムを明らかにする．最後に，まとめと今後の課題を第 4 章で述べる．

---

*1 キーワーズ：災害債券，曖昧性回避選好，ロバスト期待効用理論

*2 正会員，博士（情報科学）神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

*3 学生会員，神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

2　定式化

(1)　モデルの枠組

期首と期末の 2 時点を考え，期末における事象集合を $\Omega \equiv \{\omega_0, \omega_1\}$ とする．ここで，$\omega = \omega_0$ は当該期間中に災害が生起しない事象，事象 $\omega = \omega_1$ は災害が生起する事象である．

災害債券の発行主体 (以下，企業) と，それを購入する投資家の 2 主体を考える．災害が生起した場合，企業は Θ だけの損害を被る．企業は，災害債券を発行することで，この損害の内，$\alpha \in [0, 1]$ だけを投資家に移転する．本稿では，企業が提示する災害債券のスキームが，発行額 $\alpha\Theta$，プレミアム π および将来事象についての確率分布 $\mathcal{P} \equiv \{1 - p, p\}$ から構成されるとする．ここで，p は (企業が信じる) 期間内の災害発生確率である．投資家は初期富 e^0 を持つとし，企業から提示される債券スキーム $(\alpha\Theta, \pi, p)$ を与件として債券を購入するか否かを決定する．

災害債券契約が取引されない場合の企業および投資家の期末での富は，それぞれ，

$$\tilde{x}^0 \equiv \{0, -\Theta\}, \qquad \tilde{y}^0 \equiv \{e^0, e^0\}$$

で表わされる．発行額 $\alpha\Theta$ およびプレミアム π の災害債券が取引される場合，企業が災害発生時の損害を $(1 - \alpha)\Theta$ に抑えられるが，災害が発生しなかった時に投資家に $\alpha\Theta\pi$ だけのペイオフを支払う必要がある．投資家は，初期富 y^0 に加え，災害発生時には $\alpha\Theta$ だけの損失を被るが，災害が発生しなければ $\alpha\Theta\pi$ だけのペイオフを受け取る．これより，災害債券が取引される場合の各主体の期末の富は，それぞれ，

$$\tilde{x}^1 \equiv \{-\alpha\Theta\pi, -(1 - \alpha)\Theta\}, \quad \tilde{y}^1 \equiv \{e^0 + \alpha\Theta\pi, e^0 - \alpha\Theta\}$$

で表わされる．以上の各主体の期末の富は，表 1 のようにまとめられる．次節以降では，この枠組の下で，投資家および企業の行動を，それぞれ定式化する．

表 1　各主体の期末での富

	債券取引なし		債券取引あり	
	災害なし	災害発生	災害なし	災害発生
企業	0	$-X$	$-\alpha\Theta\pi$	$-(1-\alpha)\Theta$
投資家	e^0	e^0	$e^0 + \alpha\Theta\pi$	$e^0 - \alpha\Theta$

(2)　投資家の行動

本稿では，投資家はリスク回避的であると同時に，災害の生起確率に対して曖昧性を感じ，それを回避する (曖昧性回避的) と仮定する．本稿では，この投資家の行動をロバスト期待効用理論 3) を用いて記述する：2 つの確率的収益 $\tilde{y}^0, \tilde{y}^1$ 間の選好関係を，次のように定義する．

$$\mathbb{E}^{Q^*(\tilde{y}^1;\xi)}\Big[u_I(\tilde{y}^1)\Big] \geq \mathbb{E}^{Q^*(\tilde{y}^0;\xi)}\Big[u_I(\tilde{y}^0)\Big] \Leftrightarrow \tilde{y}^1 \geq \tilde{y}^0.$$

ここで，$u_I : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は，von Neuman-Morgenstern 型効用関数である．$\mathbb{E}^Q[\cdot]$ は確率 $Q \equiv \{1 - q, q\}$ の下での期待演算であり，確率変数 $\tilde{u} \equiv \{u(\omega_0), u(\omega_1)\}$ に対して，

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{u}] \equiv (1 - q)u(\omega_0) + qu(\omega_1) \qquad (1)$$

と定義される．$Q^*(\tilde{y};\xi) \equiv \{1 - q^*(\tilde{y};\xi), q^*(\tilde{y};\xi)\}$ は，確率的収益 $\tilde{y} : \Omega \to \mathcal{R}$ に対するパラメータ ξ の下でのロバスト主観的確率と呼ばれ，次のように定義される．

$$Q^*(\tilde{y};\xi) \equiv \arg\min_{Q} \mathbb{E}^Q\Big[u_I(\tilde{y})\Big] + \frac{1}{\xi}\mathcal{D}(Q;\mathcal{P}). \qquad (2)$$

式 (2) の各項は，投資家が確率的収益 $\tilde{y}$ に対する自らの主観的確率 $Q^*(\tilde{y};\xi)$ を決める際に直面するトレードオフの 2 つの側面を，それぞれ，表している．まず，式 (2) の右辺第 1 項は，投資家が企業が提示する災害生起確率に対して，よりロバスト (曖昧性回避的) な投資意思決定を選好する側面を表わしている：投資家は自分に取って望ましくない収益をもたらす事象 (i.e. $\omega = \omega_1$) に対してより大きな確率を配分しておくことで，企業が提示する確率 $\mathcal{P}$ のブレに対して頑健な (安定した) 収益を確保しようとする．

一方，式 (2) 右辺の第 2 項は，投資家が，災害債券発行時に企業が提示する確率分布 $\mathcal{P} \equiv \{1 - p, p\}$ を参照し，そこから大きく乖離しないような主観的確率分布 $Q \equiv \{1 - q, q\}$ を選ぶという側面を表わしている．ここで，$\mathcal{D}(Q;\mathcal{P})$ は，2 つの確率 $\mathcal{P}$ と Q の乖離を測る指標であり，次のような相対エントロピーとして定義される．

$$\mathcal{D}(Q;\mathcal{P}) \equiv -\mathbb{E}^Q\left[\ln\frac{Q}{\mathcal{P}}\right] \equiv -(1-q)\ln\frac{1-q}{1-p} - q\ln\frac{q}{p}. \quad (3)$$

ところで，$\mathcal{D}(Q;\mathcal{P})$ の符号を正負反転させたものは，情報理論における KL (*Kullback-Leibler*) 情報量に他ならない．これより，式 (2) 右辺の第 2 項は次のようにも解釈できる：投資家は，企業の提示する確率 $\mathcal{P}$ の情

報量を最大化 (情報 $\mathcal{P}$ を可能な限り活用) しようとする側面を持つ．

投資家がもつこれら 2 つの側面の相対的な重要度は非負のパラメータ ξ に集約される：$\xi \to +0$ の場合，式 (2) の最小化問題は第 2 項のみが意味を持つため，投資家は曖昧性を完全に無視し，企業の提示する確率 $\mathcal{P}$ を主観確率として採用する；$\xi \to \infty$ 場合，式 (2) の第 1 項のみが意味を持ち，投資家は企業の提示する確率 $\mathcal{P}$ を無視して可能な限りロバストな主観確率を選ぶ．

このパラメータは式 (4) 投資家は，災害債券を購入することで，購入前よりもロバスト期待効用が改善できる場合にのみ債券を購入する．これより，災害債券が取引されるための投資家のインセンティブ条件は,

$$\mathbb{E}^{Q^*(\tilde{y}^1;\xi)}\left[u_I(\tilde{y}^1)\right] \geq u_I(y^0), \tag{4}$$

で表わされる．

(3) 企業の行動

企業は，投資家の債券購入インセンティブ条件 (4) を与件として，期末の富に対する期待効用が最大となるようにリスク移転比率 $\alpha \in [0,1]$ およびプレミアム π を決定する．この行動は以下のように定式化される．

$$\text{[P]} \quad \max_{\alpha,\pi}.\ \mathbb{E}^{\mathcal{P}}\left[u_F(\tilde{x}^1)\right],\ \text{s.t.(4)},$$

ここで，$u_F : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は企業の効用関数 (von Neuman-Morgenstern 型効用関数) であり，$\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\cdot]$ は企業が提案する (企業が信じる) 確率 $\mathcal{P}$ の下での期待演算である．

3 数値計算

(1) 一次元凸計画問題への帰着

一般に，問題 [P] は closed-form の解を持たないため，以下では，問題 [P] の数値解法を示す．まず，式 (2) の最適性条件より，確率的収益 $y^1(\alpha,\pi) \equiv \left\{e^0+\alpha\Theta\pi, e^0-\alpha\Theta\right\}$ に対するロバスト主観確率は，次の式で求められる．

$$q^*(\alpha,\pi;\xi) = \frac{p\exp\left[-\xi u_I[e^0-\alpha\Theta]\right]}{\mathbb{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\xi u_I[\tilde{y}^1(\alpha,\pi)]\right]\right]}, \tag{5}$$

この式の分母は，次のように定義される．

$$\mathbb{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\xi u_I[\tilde{y}^1(\alpha,\pi)]\right]\right] \equiv$$
$$(1-p)\exp\left[-\xi u_I[e^0+\alpha\Theta\pi]\right]+p\exp\left[-\xi u_I[e^0-\alpha\Theta]\right].$$

次に，投資家のインセンティブ条件は明らかに束縛的 (binding) であるため，式 (4) では常に等号が成立する．これより，リスク移転率 α が与えられたときの最適なプレミアム $\pi^*(\alpha)$ は，下記の方程式を π について解くことで求められる．

$$q^* u_I[e^0-\alpha\Theta] + (1-q^*)u_I[e^0+\alpha\Theta\pi] = u_I[y^0]. \tag{6}$$

ただし，$q^* \equiv q^*(\alpha,\pi;\xi)$ は，債券スキーム $(\alpha,\pi,\mathcal{P})$ および曖昧性回避度 ξ が与えられたときのロバスト主観確率で，式 (5) で与えられる．

最後に，こうして得られた $\pi^*(\alpha)$ を代入することで，問題 [P] は，下記のような 1 次元凸計画問題に帰着する．

$$\text{[P']} \quad \max_{0\leq\alpha\leq 1}.\ \{(1-p)u_F[-(1-\alpha)\Theta] + p u_F[-\alpha\Theta\pi(\alpha)]\}$$

(2) 数値計算例

本節では，前節の方法を用いて数値計算を行なった結果を示し，感度分析を通じて問題の特性およびメカニズムを明らかにする．まず，投資家および企業の効用関数を，それぞれ，以下の絶対的危険回避度一定型として特定化する．

$$u_I(y) \equiv -\exp\left[-\gamma_I y\right]/\gamma_I, \quad u_F(x) \equiv -\exp\left[-\gamma_F x\right]/\gamma_F$$

ベース・ケース・パラメータとして，以下を用いる．

$$\begin{array}{lll} p = 0.01, & \Theta = 1, & e^0 = 1, \\ \gamma_I = 1, & \gamma_F = 2, & \xi = 1. \end{array}$$

図 1，図 2 は，曖昧性回避度に対する最適災害債券スキーム (α^*,π^*) の感度分析結果を示したものである．それぞれの図は，横軸に曖昧性回避度 ξ の対数軸を取り，縦軸にリスク移転率 α^* およびプレミアム π^* をプロットしたものである．各図の太い曲線，細い曲線および破線は，それぞれ，投資家のリスク回避度を $\gamma_I = 1,3,5$ とした時の解である．これらの図より，以下のことが判る．まず，投資家の曖昧性回避度 ξ が大きいほど，災害債券に要求されるプレミアム π が増加し，リスク移転率 α が減少する．これは，投資家がよりロバスト的 (曖昧性回避的) であるほど災害債券に対して高いプレミアムを要求し，結果として，企業のリスク移転動機を減少させることを反映している．次に，このプレミアムの上昇およびリスク移転率の減少は，投資家の危険回避度 γ_I が小さいほど大きい．これ

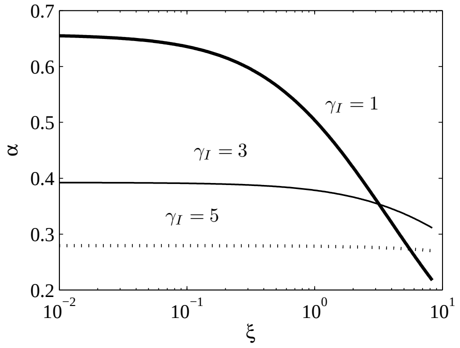

図 1　最適リスク移転率 α

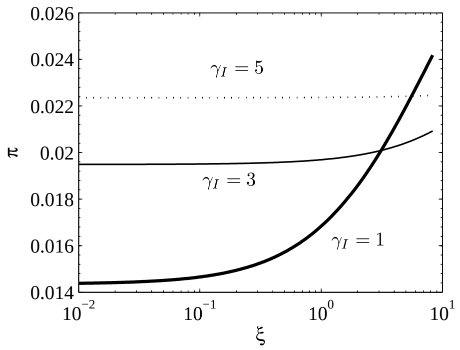

図 2　最適リスク移転率 π

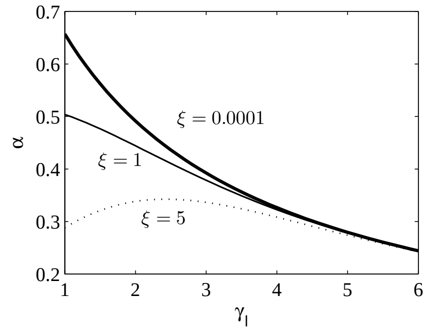

図 3　最適リスク移転率 α

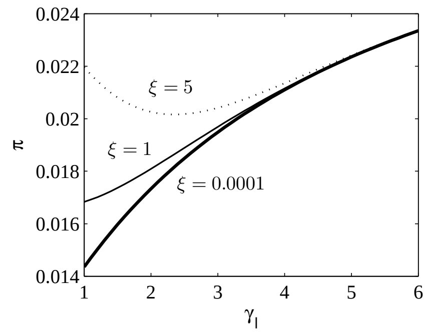

図 4　最適リスク移転率 π

は，危険回避度が大きい場合は曖昧性の効果が相対的に小さくなることを意味している．最後に，投資家がより曖昧性回避的である (ξ が大きい) 場合，危険回避度 γ_I に対して α, π は必ずしも単調とならない．

このような危険回避度 γ_I に対するリスク移転率およびプレミアムの非単調性を図 3，4 に示す．これらの図は，いずれも，横軸に投資家の危険回避度 γ_I を取り，縦軸にリスク移転率 α^* およびプレミアム π^* をプロットしたものである．各図の太い曲線，細い曲線および破線は，それぞれ，投資家の曖昧性回避度を $\xi = 0.0001, 1, 5$ とした時の解を表わす．この図より，曖昧性回避度が大きい ($\xi = 5$) 場合，投資家の危険回避度 γ_I に対して α および π が非単調となることが判る．これは，投資家の危険回避度が増加した時，次の 2 つの効果が働くことを意味する．第 1 に，直感的にも明らかなように，債券購入者がより危険回避的であるほど，より高いプレミアムが要求され企業のリスク移転動機が減少する．第 2 に，投資家の危険回避度の増加は，投資家の相対的な曖昧性回避性向を弱め，プレミアムの減少とリスク移転率の上昇をもたらす．そして，γ_I が小さい間は前者に比べて後者の方が大きいために α^* が上昇し π^* が減少するが，γ_I が大きくなるにつれ後者の効果が小さくなるため，α^* の減少および π^* の上昇をもたらす．

4　おわりに

本研究では，災害の希少性を明示的に考慮した上で，災害債券設計問題を分析するための枠組を提案した．そして，この問題に対する数値解析を行ない，最適な債券発行額と債券プレミアムの特性およびメカニズムを明らかにした．今後の課題として，災害債券以外の資産取引市場が存在する場合への拡張および無裁定原理の導入，災害発生のみならず災害の規模に対する曖昧性の導入などが挙げられる．

参考文献

1) Ellsberg, D.: Risk, ambiguity, and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, pp. 643–669, 1961.
2) Raviv, A.: The design of an optimal insurance policy, *American Economic Review*, Vol. 69, No. 1, pp. 84–96, 1979.
3) Anderson, E. W., Hansen, L. P. and Sargent, T. J.: A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection, *Journal of the European Economic Association*, Vol. 1, No. 1, pp. 68–123, 2003.
4) Barrieu, P. and El Karoui, N.: Reinsuring climatic risk using optimally designed weather bonds, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, Vol. 27, pp. 87–113, 2002.