

施設間の代替・補完関係を考慮した社会基盤システムの補修戦略に関する基礎的研究*

A stochastic impulse control approach for preventive maintenance problem of deteriorating infrastructure systems*

吉岡龍右** 長江剛志*** 黒田勝彦****

by Ryosuke YOSHIOKA**・Takeshi NAGAE***・Katsuhiko KURODA****

1. はじめに

本研究では、確率的動的に劣化する複数の施設からなるインフラシステムの中でも特にある程度数が限られていてかつ維持管理費用が比較的高い施設からなるシステムに対して、精緻な補修計画を提案したい。具体的には、劣化過程の動学的不確実性と施設間の機能の違いを明示的に考慮した最適補修問題を分析するための枠組みを示し、その場合の最適な補修ルールを提案することを目的とする。

劣化する施設の最適補修計画の研究は膨大な数が存在する。Wang¹⁾のsurvey論文やその他の研究によると、既往の研究では膨大な数の施設を対象として大まかな補修戦略を提案しているため、本研究で対象とするような施設に対して既往の研究の手法をそのまま適用させることには以下の2つの問題点がある。第一の問題点は、インフラ施設の多くは複数の施設が相互に関係しながら機能しているが、既往の研究では単一の施設のみを扱っているか、もしくは複数施設を扱っていてもそれらを集約して一まとまりの施設であるとみなして扱っている点である。



図 1-1 本州四国連絡橋の関係

例えば図 1-1 の本州四国連絡橋を例に挙げる。しまなみ海道と瀬戸大橋を補修する場合には一方の橋が使えなくてももう一方の橋を使うことによって本州・四国間をつなぐことができるが、明石海峡大橋と大鳴門大橋を補修する場合には両方の橋が通れないと本州・四国間をつなぐことができないため、補修戦略が違うであろうことは直感的に理解できるはずである。

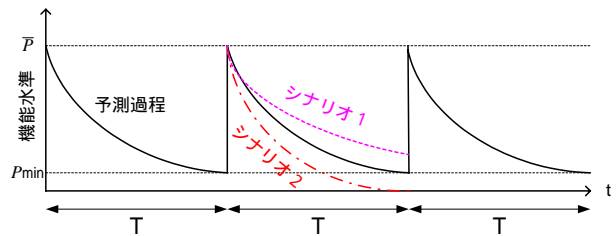


図 1-2 定期補修の概念図

第二の問題点は、従来の研究では確定的ルールすなわち定期補修ルールを提案していた点である。確定的ルールは補修を開始する水準と定期的な補修の間隔を求めることが等価になっている。実際の劣化が図 1-2 のシナリオ 1 のようであった場合、過大な補修を行うことになってしまう。またシナリオ 2 のようであった場合、過大な補修を行うことになってしまう。しかし、施設の劣化が不確実でしかも時々刻々観測可能ならば、補修開始水準のみを求めるルールが有効となるはずである。

そこで本研究では、従来研究とは違う新しい方向からのアプローチとして、連続時間連続状態のもとで劣化過程が不確実な複数の施設を対象にして、上記の二つの問題点を克服するために、施設間の機能の違いをシステムティックに表現し、劣化過程の動学的不確実性を確率微分方程式で記述することを明示的に考慮した最適補修問題を分析する新しい枠組みを提案し、その性質を明らかにした上で使いやすい簡便な補修ルールを提案する。

*キーワード: 土木施設維持管理, 動学的不確実性, 代替・補完関係, インパルス制御

**学生員, 神戸大学大学院自然科学研究科 (神戸市灘区六甲台町 1-1, TEL 078-803-6017)

***正員, 博(情報科学), 神戸大学工学部建設学科

****フェロー, 工博, 神戸大学工学部建設学科

2. 本研究の基本的考え方

(1) 問題の枠組み

本問題の枠組みとして以下を仮定する．

- 1つの管理主体が機能の違う2つのインフラ施設を管理運営している．
- 管理者がこれら施設を運営することで社会的便益が発生し、その便益を受け取るものもまた管理者である．
- 管理者は施設を供用するか補修するかの2通りの戦略を採ることができる．
- 施設は供用され続けている間は劣化が進み、その機能水準が低下し、さらに社会的便益が発生する．
- 補修され続けている間は機能水準が回復してゆくが、発生する便益は少なく補修費用も発生する．
- 施設の劣化過程は不確実で、このときの劣化はサービス能力の低下によって発生便益が低下する．

(2) 施設の機能水準

本モデルでは施設の機能水準の状態を表す指標を時々刻々観測が可能であると仮定し、これを一次元の変数 $P_n(t)$ で集約的に表現する．ここで n は施設番号を、 t は時間を表す． $P_n(t)$ が大きいほど施設のサービス能力が高いと仮定し、施設が劣化することを $P_n(t)$ が減少することで、補修することを $P_n(t)$ が増加することで表現する．このときの劣化および補修の過程を確率微分方程式で記述する．この確率微分方程式を伊藤過程と呼ぶ．まず劣化の場合は以下の式で表現する．

$$dP(t) = -\mu(P(t)) \cdot dt + \sigma(P(t)) \cdot dW \quad (1)$$

ここで dt は時間 t の増分を表し、 $dW(t)$ はウィナー過程の増分、また $\mu(P(t)) > 0$ は $P(t)$ のトレンドの単位時間当たりの変化量、 $\sigma(P(t))$ は変動成分を表している．次に補修の場合は以下の式で表現する．

$$dP(t) = x(P(t)) \cdot dt + \sigma(P(t)) \cdot dW \quad (2)$$

$x(P(t)) > 0$ は $P(t)$ のトレンドの単位時間当たりの変化量を表す．

(3) 管理主体の戦略とキャッシュフロー

管理主体は2つの施設を運営するにあたり、対象施設を施設1・施設2と呼ぶとすると、以下の4つの戦略を採ることができる．

戦略0：施設を両方供用する．

戦略 R_1 ：施設1を補修し施設2を供用する．

戦略 R_2 ：施設1を供用し施設2を補修する．

戦略 R_{12} ：施設を両方補修する．

施設を運営することによって発生するキャッシュフローは以下の3つを仮定する．施設を供用することによって発生する社会的便益を $P_n(t)$ に関する関数 $\pi(P_1(t), P_2(t))$ で表現する．補修中に発生する補修費用は時刻 t に関する関数 $C_n(t)$ で表現する．また戦略を切り替える際には施設の補修を始める・または停止するために必要な切り替え費用が発生し、これを固定費用 M で表現する．

(4) 施設の機能の違い(代替・補完関係)

本研究で注目する機能の違いを「代替・補完関係」とであるとみなす．ある施設が持つ機能を別の施設が負担できる場合を機能が代替的であると言い、ある施設が持たない機能を別の施設が持っている場合を機能が補完的であると言う．本研究ではこの代替・補完関係をシステムティックに表現できる関数として、経済分野において頻繁に用いられる「CES型効用関数」を社会的便益 $\pi(P_1(t), P_2(t))$ に採用する．これは代替・補完関係をパラメータひとつでシステムティックに表現できる関数であり、を代替補完パラメータ呼ぶこととする．ここで社会的便益 $\pi(P_1(t), P_2(t))$ を以下の式で表現する．

$$\pi(P_n(t)) = \left\{ \alpha_1^{1/\beta} \cdot P_1^{1-1/\beta}(t) + \alpha_2^{1/\beta} \cdot P_2^{1-1/\beta}(t) \right\}^{\beta/(\beta-1)} \quad (3)$$

$$\alpha_n > 0, \quad \beta \geq 0, \quad n=1,2 \quad (4)$$

式(3)において、 $\beta=0$ のとき線形関数となり、完全代替型を表す． $\beta=1$ のときコブ=ダグラス型関数となる． $\beta \rightarrow \infty$ のときレオンチェフ型関数となり、完全補完型を表す．全ての施設の関係は完全代替と

完全補完の間で表現することができる。

3. 確率的インパルス制御問題

(1) 問題の定式化と最適性条件

管理者は施設の運営によって発生するキャッシュフローを最大化することを目的としている。そこで、管理者の行動を以下の確率的インパルス制御問題として定式化する。

$$[\text{Prob}] \quad Z = \max_{\{m(t)\}_0^\infty} E \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \{ \pi_{m(t)}(\mathbf{P}(t)) - C_{m(t)}(t) - M_{m(t^-), m(t)} \} dt \mid \mathbf{P}(0) = \mathbf{P} \right] \quad (5)$$

ここで $m(t)$ は時刻 t での戦略を表し、戦略 O のときは $m(t)=1$ 、戦略 R_1 は $m(t)=2$ 、戦略 R_2 は $m(t)=3$ 、戦略 R_{12} は $m(t)=4$ とする。 $C_{m(t)}(t)$ は補修中にかかるコストである。また、直前の t の値を t^- とすると、 $M_{m(t^-), m(t)}$ は $m(t^-)$ から $m(t)$ への戦略の切り替え費用を表している。また $\mathbf{P}(t) = \{P_1, P_2\}$ で、 ρ は割引率を表す。

例えば、時刻 t で $\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}$ が観測され、戦略 O ($m(t)=1$) をとっているときの最適値関数 (Value Function) は以下のように表現される。

$$V_1(\mathbf{P}(t)) = \max_{\{m(t)\}_0^\infty} E \left[\int_t^\infty e^{-\rho t} \{ \pi_{m(t)}(\mathbf{P}(t)) - C_{m(t)}(t) - M_{m(t^-), m(t)} \} dt \mid \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}, m(t) = 1 \right] \quad (6)$$

これを、時刻 t から $t + dt$ までと、 $t + dt$ からそれ以降に DP 分解して、時刻 $t + dt$ で 4 つの戦略をとっている場合に分けることができる。以下、表記の簡単のため $V_{m(t)}(\mathbf{P}(t))$ 等の添え字 ($\mathbf{P}(t)$) の表記を省略し、それらをまとめると以下の式になる。

戦略 O のまま：

$$F_{1,1}(\mathbf{V}) = \left(-\rho - \mu_1 \frac{\partial}{\partial P_1} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial P_2} + \frac{(\sigma_1)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial P_1^2} + \frac{(\sigma_2)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial P_2^2} \right) \cdot V_1 - \pi_1 \quad (7)$$

$$= -L_1 \cdot V_1 - \pi_1 \geq 0$$

$$\text{戦略 } R_1 \text{ へ切り替え： } F_{1,2}(\mathbf{V}) \equiv V_1 - V_2 + M_{12} \geq 0 \quad (8)$$

$$\text{戦略 } R_2 \text{ へ切り替え： } F_{1,3}(\mathbf{V}) \equiv V_1 - V_3 + M_{13} \geq 0 \quad (9)$$

$$\text{戦略 } R_{12} \text{ へ切り替え： } F_{1,4}(\mathbf{V}) \equiv V_1 - V_4 + M_{14} \geq 0 \quad (10)$$

上式において L_1 は変微分作用素、また $\mathbf{V} = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$ である。ここで $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$ が観測されたときに上記 4 本の不等式のうち 1 つのみが等号が成り立ち、その式が表す戦略が最適な戦略となる。時刻 t で $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$ が観測され、戦略 O ($m(t)=1$) がとられているときの最適値関数 (Value Function) は以下の相補性条件として記述される。

$$\min. \{ F_{1,1}(\mathbf{V}), F_{1,2}(\mathbf{V}), F_{1,3}(\mathbf{V}), F_{1,4}(\mathbf{V}) \} = 0 \quad (11)$$

時刻 t で $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$ が観測され、他の戦略がとられているときも同様な方法で記述される。以上をまとめると、確率的インパルス制御問題 [Prob] は無限次元一般化線形相補性問題 (GLCP: Generalized Linear Complementarity Problem) [GLCP(t)] に帰着する。

[GLCP(t)] Find $\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))$ such that

$$\{ F_1(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))), F_2(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))), F_3(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))), F_4(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))) \} = 0 \quad (12)$$

$$F_1(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))) \geq 0, \quad F_2(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))) \geq 0, \quad (13)$$

$$F_3(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))) \geq 0, \quad F_4(\mathbf{V}(\mathbf{P}(t))) \geq 0$$

(2) 導出される結果とその意味

この問題を解くと、各 t ごとに図 3-1 のような 4 枚の絵が得られる。結果の分析はこの図を元に行う。

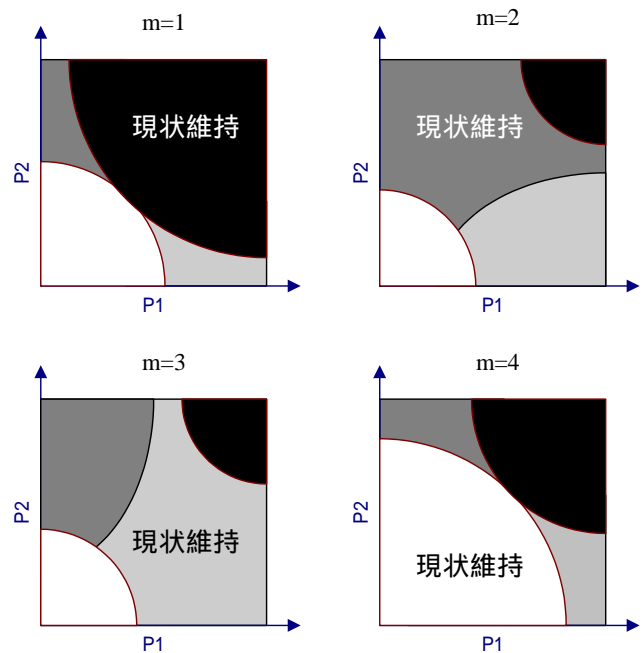


図 3-1 数値解析結果の例

図 3-1 の見方を説明する。例えば、現在の戦略が

戦略 $O(m(t)=1)$ であったとする。現在 $P(t)$ は $m(t)=1$ のグラフの“現状維持”の領域上にあるが、このとき施設を両方共用することによって施設が劣化してゆく。つまり、 P_1, P_2 が減少してゆく。ついに $P(t)$ が“ $m(t)=2$ ヘシフト”の領域上にきた場合、切り替え費用 M_{12} を投資し、直ちに戦略 $R_1(m(t)=2)$ へ切り替える。戦略を切り替えた後、 $P(t)$ は $m(t)=2$ のグラフの“現状維持”の領域上を動くことになり、別の領域上にきたときにまた同様に戦略を切り替える。これを繰り返すことで管理運営を行うことになる。この図4-1では“ $m(t)=1$ ヘシフト”を、は“ $m(t)=2$ ヘシフト”を、は“ $m(t)=3$ ヘシフト”を、は“ $m(t)=4$ ヘシフト”を表している。

4. 数値解析

問題 $[GLCP(t)]$ を数値解析するために $[GLCP(t)]$ を離散的枠組みの下で再定式化する。状態変数 P の最大値と最小値を決め、以下の格子で離散化する。

$$P_1(t) \rightarrow P_1^j \equiv P_1^{\min} + j\Delta P_1 \quad , \quad j=1,2,\dots,J \quad (14)$$

$$P_2(t) \rightarrow P_2^k \equiv P_2^{\min} + k\Delta P_2 \quad , \quad k=1,2,\dots,K \quad (15)$$

$$P_1 \quad (P_1^{\max} - P_1^{\min}) / J \quad (16)$$

$$P_2 \quad (P_2^{\max} - P_2^{\min}) / K \quad (17)$$

この下で全ての変数を離散・差分近似する。さらに式(7)の1階偏微分 $\frac{\partial V_{m(t)}}{\partial P_n}$ と、2階偏微分 $\frac{\partial^2 V_{m(t)}}{\partial P_n^2}$ を適当な差分スキームで差分近似すると、偏微分作用素 L_m は以下のように差分表現される。

$$L_m \cdot V_m(P(t)) \approx L_m^{j,k} \cdot V_m^{j,k} + N_m^{j,k} \quad (18)$$

ここで、 $L_m^{j,k}$ は偏微分作用素を適当な差分スキームで近似して得られる $JK \times JK$ 正方行列で、 $N_m^{j,k}$ は同様にして得られる JK 次の列ベクトルである。また、 $V_m^{j,k}$ は JK 次の列ベクトルである。以上より、 $[GLCP(t)]$ は以下のような離散的有限次元一般化線形相補性問題 $[GLCP^{jk}]$ で記述できる。

$$F_1(V) \cdot F_2(V) \cdot F_3(V) \cdot F_4(V) = 0 \quad (19)$$

$$F_1(V) \geq 0, F_2(V) \geq 0, F_3(V) \geq 0, F_4(V) \geq 0 \quad (20)$$

上式において、 $F_m(V)$ は式(12)の $F_m(V(P(t)))$ を差分近似して得られた JK 次の列ベクトルである。この時点で数値解析が可能になる。

数値解析の方法はいくつか存在するが、本研究では計算スピードが従来の方法より速いと言われるPeng&Lin⁴⁾のアルゴリズムを $[GLCP^{jk}]$ に適用することで数値計算を行う。このアルゴリズムの基本的考え方は、まず $[GLCP^{jk}]$ を以下のように再定義する。

$$H(V) \equiv \min\{F_1(V), F_2(V), F_3(V), F_4(V)\} = 0 \quad (21)$$

ここで定義した $H(V)$ を、平滑化パラメータ ξ を使って滑らかにする。

$$H(V, \xi) \equiv -\xi \cdot \ln \left\{ \exp \left[-\frac{F_1(V)}{\xi} \right] + \exp \left[-\frac{F_2(V)}{\xi} \right] + \exp \left[-\frac{F_3(V)}{\xi} \right] + \exp \left[-\frac{F_4(V)}{\xi} \right] \right\} \quad (22)$$

$\xi \rightarrow 0$ のとき $H(V, \xi) \rightarrow H(V)$ である。つまり、 $H(V, \xi) = 0$ を求めつつ、徐々に $\xi \rightarrow 0$ としていき、その解が $[GLCP^{jk}]$ の解と一致するとみなし、解を求める。

紙面の都合上、数値解析結果の詳細および分析は講演時に発表する。

主要参考文献

- 1) Hongzhou Wang : A survey of maintenance policies of deteriorating systems , European Journal of Operational Research ,139 (2002) ,pp.469-489 ,2002
- 2) 栗野盛光, 小林潔司, 渡辺晴彦 : 不確実性下における最適補修投資ルール, 土木学会論文集, No.667/ -50, pp.1-14, 2001
- 3) Avinash K. Dixit, Robert S. Pindyck : Investment Under Uncertainty , Princeton Univ. Pr. , 1994
- 4) Ji-Ming Peng , Zhenghua Lin : A non-interior continuation method for generalized linear complementarily problems , Mathematical Programming , Ser. A 86 , pp.533-563 , 1999

$[GLCP^{jk}]$ Find $V \quad [V_1^{j,k} \ V_2^{j,k} \ V_3^{j,k} \ V_4^{j,k}]$ such that