

ワイブルハザード関数を用いた多段階劣化予測モデル*

A Multi-Staged Deterioration Forecasting Model with Weibull Hazard Functions*

青木一也**・山本浩司***・津田尚胤****・小林潔司*****

by Kazuya AOKI**, Koji YAMAMOTO***, Yoshitane TSUDA**** and Kiyoshi KOBAYASHI*****

1. はじめに

土木施設のアセットマネジメントでは、ライフサイクルコストの低減化が図れるような最適補修戦略を求めることが重要な課題である。その際、将来時刻における土木施設の補修需要を予測し、維持補修のために必要となる予算計画を策定することが必要となる。土木施設の劣化予測モデルは、ライフサイクルコストや補修需要を推計するために重要な役割を果たす。劣化予測に関しては数多くの既往研究があるが、統計学的な推計方法に関しては初歩的な段階にとどまっている。また、複数レーティングで劣化状態が表現される土木施設の劣化予測に、マルコフ推移確率を用いた劣化予測モデルがしばしば採用される。しかし、マルコフ推移確率は、劣化過程が過去の劣化履歴に依存しないという性質を持っている。土木施設の中には、明らかに劣化過程が過去の履歴に依存する場合が少なくない。このような施設にマルコフ推移確率を用いることには問題がある。

本研究では、劣化状態が複数レーティングで表現されており、使用時間が劣化の進展速度に影響を及ぼすような土木施設の劣化予測モデルを多段階ワイブル劣化ハザードモデルとして提案する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 多段階ワイブル劣化ハザードモデル

統計的な劣化予測モデルは、多くの劣化サンプルから、劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化することを目的とする。信頼性解析の分野で施設や機械の寿命を予

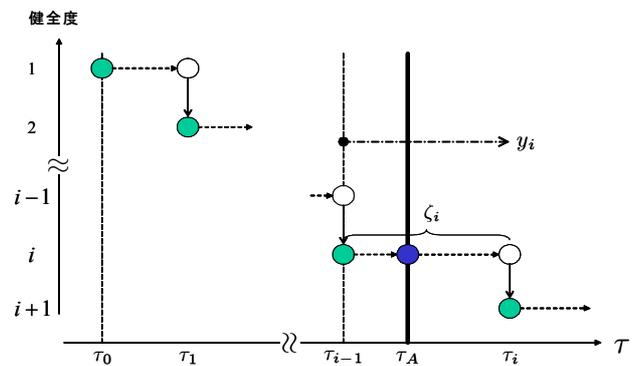


図-1 健全度の時間的推移

測するモデルとしてハザードモデルが提案されている。しかし、伝統的なハザードモデルでは、劣化状態が故障の有無という2値状態で表され、複数の健全度を取り扱う土木施設の劣化予測にはそのままでは適用できない。土木施設の劣化過程においては、ある状態から互いに排他的な状態の中の1つに推移するのではなく、劣化が順次進行することにより健全度が逐次悪化していくという特性がある。本研究ではこの特性に着目し、劣化状態が複数の健全度指標で表現されるような土木施設を対象として、健全度間の推移状態をワイブルハザード関数で表現する。さらに、推計したハザードモデルに基づき、土木施設の劣化過程を時間依存的な劣化状態確率で表現する。

(2) 劣化過程とレーティング指標

ある土木施設の劣化に関する履歴が図-1に示すように与えられたとしよう。同図は、施設が補修されずに放置された時に、劣化がどのように進展するかを表したものである。時刻 τ はカレンダー上の実時刻（以下、時刻と呼ぶ）を表す。時刻 τ_0 （以下、初期時刻と呼ぶ）で土木施設の使用が開始された直後から劣化が始まる。施設の健全度を表すレーティングを状態変数 i ($i = 1, \dots, I$)で表現しよう。施設が最も健全な状態を $i = 1$ で表し、 i の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。離散時刻 τ_i ($i = 1, \dots, I-1$)において、健全度が i から $i+1$ に進

*キーワード：土木施設維持管理、統計的劣化予測

**正員、京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻

(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL 075-753-5073)

***日本道路公団関東第二支社 管理事業部施設管理G施設整備T

(〒222-8510 横浜市港北区新横浜3-9-18)

****学生員、京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻

(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL 075-753-5073)

*****フェロー、工博、京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻

(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL 075-753-5073)

展している。以下、時刻 τ_i は「健全度が i から $i+1$ へ推移する時刻」を表す。現実には、土木施設施設の劣化過程には不確実性が含まれる。土木施設の使用開始後、対象とする施設の健全度を継続的に観測できれば理想的であるが、このような完全な検査情報を獲得することは難しい。目視点検では検査を実施した時刻 τ_A における健全度を観測できるが、健全度が変化した時刻に関するデータを獲得することは不可能である。

(3) 劣化状態確率

初期時刻から、一定の使用時間 s を経過した時刻における施設の劣化状態を時間依存的な状態確率で表現する。いま、時刻 τ_0 で使用が開始されたある施設の劣化予測を行う問題を考えよう。初期時刻から使用時間 s が経過した時刻 $\tau = \tau_0 + s$ における当該施設の健全度を状態変数 $h(s)$ を用いて表す。劣化過程は、使用開始時刻から時間 s が経過した時刻において健全度 $h(s) = i$ が生起する確率（以下、劣化状態確率と呼ぶ）を用いて記述される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(s) = i | h(0) = 1] = \pi_i(s) \quad (1)$$

と表せる。このような劣化状態確率を健全度 i ($i = 1, \dots, I$) に対して定義すれば、時間依存的な劣化状態確率ベクトル

$$\boldsymbol{\Pi}(s) = \begin{pmatrix} \pi_1(s) \\ \vdots \\ \pi_I(s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

を得ることができる。劣化状態確率(1)は時刻 $\tau = \tau_0 + s$ においてそれぞれの健全度が観測できる確率を示したものであり、初期時刻からの経過時間 s が異なれば劣化状態確率の値は異なる。また、劣化状態確率の定義より $\sum_{i=1}^I \pi_i(s) = 1$ が成立する。

3. モデルの定式化

(1) ワイブルハザードモデル

目視点検により獲得できる観測データには、個別施設の健全度だけでなく施設特性や土木施設の利用状態等、個別施設に特有な非集計データが含まれる。また、土木施設によって検査間隔が異なる場合もある。このような多様なデータに基づいて劣化状態確率を推計するためには、個別施設が有する多様性を考慮できる推計方法を開発することが望ましい。本研究では、1) 対象とするサンプルが有する個別データに基づいて施設劣化のハザードモデルを推計し、2) その結果を用いて劣化状態確率を推計

するという2段階の推計方法を提案する。

土木施設の劣化過程をハザードモデルを用いて定式化することを考える。いま、土木施設の劣化過程を図-1に示すようにモデル化しよう。ここで、時刻 τ_{i-1} を初期時点 $y_i = 0$ とする時間軸（以下、サンプル時間軸と呼ぶ）を導入する。サンプル時間軸上の時刻を、以下「時点」と呼び、カレンダー時間軸上の「時刻」とは区別する。同図で、当該施設の健全度が i に留まる期間長（以下、健全度 i の寿命と呼ぶ）は $\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ と表せる。健全度 i の寿命 ζ_i は確率変数であり、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する。ただし、健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の寿命 ζ_i の定義域は $[0, \infty)$ である。分布関数 $F_i(y_i)$ は健全度が i となった初期時点 $y_i = 0$ からサンプル時間軸上のある時点 y_i までに健全度が i から $i+1$ に変化した累積確率を表す。したがって、初期時点 $y_i = 0$ からサンプル時点 $y_i \in [0, \infty)$ まで、健全度が i のまま推移する確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は、

$$\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_i\} = \tilde{F}_i(y_i) = 1 - F_i(y_i) \quad (3)$$

と定義できる。ここで、施設の健全度が時点 y_i まで状態 i で推移し、かつ期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に状態 $i+1$ に進展する条件付き確率は

$$\lambda_i(y_i) \Delta y_i = \frac{f_i(y_i) \Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (4)$$

と表せる。この確率密度 $\lambda_i(y_i)$ をハザード関数と呼ぶ。以下では、土木施設の劣化過程がワイブルハザード関数に従うと仮定する。すなわち、

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \alpha_i y_i^{\alpha_i - 1} \quad (5)$$

が成立する。 θ_i は施設固有の定数パラメータ、 α_i は劣化の加速度パラメータである。 $\alpha_i > 1$ の場合は、使用時間 y_i が増加するにつれて加速度的に劣化が進行することを表す。逆に、 $\alpha_i < 1$ が成立する場合は、初期劣化が進むものの、使用時間が経過するにつれて、劣化の進行の程度が小さくなる。 $\alpha_i = 1$ の場合は、劣化の進行速度が使用時間に依存しないことを意味する。ワイブルハザード関数(5)を用いることにより、土木施設の使用時間に依存する劣化過程を表現することが可能となる。また関係式(4)より、

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i^{\alpha_i}) \quad (6)$$

$$f_i(\zeta_i) = \theta_i \alpha_i \zeta_i^{\alpha_i - 1} \exp(-\theta_i \zeta_i^{\alpha_i}) \quad (7)$$

と表せる。

(2) 初期時刻からの劣化状態確率

劣化状態確率(1)をワイブルハザードモデルを用いて

定義しよう。時刻 τ_0 に施設の使用が開始され（時刻 τ_0 での健全度を1とする）、現在時刻 τ の健全度が i であることが観測された場合を考えよう。この時、期間 $[\tau_0, \tau]$ において健全度が1から健全度 i に推移する確率は $\pi_i(s)$ で表される。ただし、 $s = \tau - \tau_0$ である。

a) $i = 1$ の場合

時刻 τ_0 に施設の使用が開始され、現在時刻 τ まで劣化が進展せず、健全度が1に留まる場合を考える。この場合、劣化状態確率 $\pi_1(s)$ は、ワイブルハザードモデル(6)より

$$\pi_1(s) = \tilde{F}_1(s) = \exp(-\theta_1 s^{\alpha_1}) \quad (8)$$

と表される。

b) $2 \leq i < I$ の場合

初期時刻から現在時刻までに健全度が2以上変化する場合作を考えよう。このような事象が生起するためには、1) 時刻 τ_0 から $\tau_1 = \tau_0 + \bar{\zeta}_1 \in [\tau_0, \tau)$ まで健全度が1のまま推移する。2) τ_1 において健全度が1から2に推移する。同様のプロセスを経たのちに、3) $\tau_{i-1} = \tau_{i-2} + \bar{\zeta}_{i-1} \in [\tau_{i-2}, \tau)$ に健全度が i に推移し、 τ まで健全度 i の状態に留まるといふ事象が同時に生起しなければならない。以上の事象が同時に生起する確率密度 $q_i(\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_{i-1})$ は

$$q_i(\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_{i-1}) = \prod_{m=1}^{i-1} f_m(\bar{\zeta}_m) \tilde{F}_i(s - \sum_{m=1}^{i-1} \bar{\zeta}_m) \quad (9)$$

以上では、健全度 m ($m = 1, \dots, i-1$)の寿命 $\bar{\zeta}_m$ を固定してきた。しかし、確率変数 ζ_m (≥ 0)は、

$$0 \leq \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{i-1} < s \quad (10)$$

を満足する範囲の中で自由な値をとる。よって、使用開始時刻から時間 s が経過した時刻 $\tau = \tau_0 + s$ に健全度 i が観測される確率 $\pi_i(s)$ は、

$$\pi_i(s) = \int_0^s \int_0^{s-\zeta_1} \dots \int_0^{s-\sum_{m=1}^{i-2} \zeta_m} q_i(\zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}) d\zeta_1 \dots d\zeta_{i-1} \quad (11)$$

となる。

c) $i = I$ の場合

劣化状態確率の定義より、健全度 I の状態が観測される劣化状態確率は次式で表される。

$$\pi_I(s) = 1 - \sum_{m=1}^{I-1} \pi_m(s) \quad (12)$$

4. モデルの推計方法

(1) 目視点検データの内容

同種の土木施設に関する K 個の目視点検データが得られたとする。まず、検査サンプル k ($k = 1, \dots, K$)に対して、当該サンプル施設の使用が開始された初期時刻 τ_0^k 、目

視点検が実施された時刻 τ_A^k と、計測された施設の健全度 $h(\bar{s}^k)$ に関するデータのみが獲得できる場合を考える。記号「 $\bar{\quad}$ 」は実測値であることを示す。また、 $\bar{s}^k = \tau_A^k - \tau_0^k$ は検査サンプル k の使用時間である。さらに、検査時刻における健全度データに基づいて、ダミー変数ベクトル $\bar{\delta}^k = \{\bar{\delta}_i^k (i = 1, \dots, I)\}$ の各要素を

$$\bar{\delta}_i^k = \begin{cases} 1 & h(\bar{s}^k) = i \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (13)$$

と定義する。さらに、施設の劣化速度に影響を及ぼす構造特性や使用環境を表す特性ベクトルを $\bar{\mathbf{x}}^k = (\bar{x}_1^k, \dots, \bar{x}_N^k)$ と表す。ただし、 \bar{x}_n^k ($n = 1, \dots, N$)は検査サンプル k の n 番目の特性変数の観測値を表す。検査サンプル k が有するデータは $\xi^k = (\bar{\delta}^k, \bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ として整理できる。一方、検査サンプル k の劣化過程をワイブルハザード関数

$$\lambda_i^k(y_i) = \theta_i^k \alpha_i y_i^{\alpha_i - 1} \quad (i = 1, \dots, I-1) \quad (14)$$

を用いて表現しよう。健全度 I は劣化過程の吸収状態であり、 $\lim_{s \rightarrow \infty} \pi_I(s) = 1$ が成立するため、ハザード率 θ_I^k は定義されない。土木施設の劣化過程を特徴づけるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K$)は土木施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え、 θ_i^k を特性ベクトル $\bar{\mathbf{x}}^k$ を用いて

$$\theta_i^k = \bar{\mathbf{x}}^k \boldsymbol{\beta}_i' \quad (15)$$

と表そう。 $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{iN})$ は未知パラメータ β_{in} ($n = 1, \dots, N$)による行ベクトル、記号 \prime は転置操作を表す。劣化状態確率の推定手順の第1段階では、検査データ ξ^k ($k = 1, \dots, K$)に基づいてワイブルハザード関数 $\lambda_i^k(y_i)$ を推計することになる。

(2) ワイブルハザード関数の推計

劣化状態確率 $\pi_i(\bar{s}^k)$ を目視点検から得られた実測データ $(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ と未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\gamma} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_i (i = 1, \dots, I-1)\}$ の関数として $\pi_i(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k : \boldsymbol{\gamma})$ と表そう。ただし、 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{I-1})$ は未知パラメータ α_i ($i = 1, \dots, I-1$)による行ベクトルである。いま、 K 個の土木施設の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば、全検査サンプルの劣化状態の分布パターンの同時生起確率密度を表す対数尤度関数を

$$\begin{aligned} \ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\gamma})] &= \ln \left[\prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^K \{\pi_i(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k : \boldsymbol{\gamma})\}^{\bar{\delta}_i^k} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{k=1}^K \bar{\delta}_i^k \ln [\pi_i(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k : \boldsymbol{\gamma})] \end{aligned} \quad (16)$$

と表せる。ここで、対数尤度関数(16)を最大にするよう

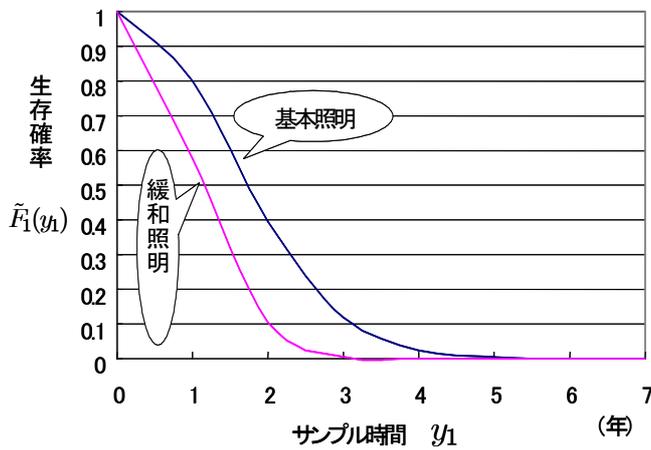


図-2 生存確率 $\tilde{F}_1(y_1)$

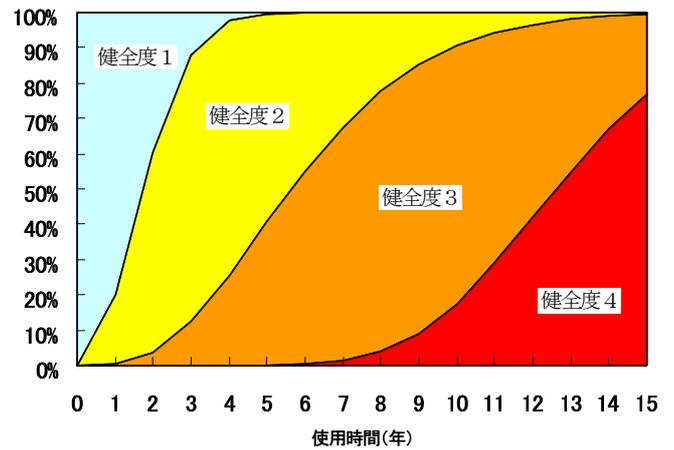


図-3 劣化状態確率 $\pi_i(s)$

なパラメータ値 γ の最尤推定量は

$$\frac{\partial \ln[\mathcal{L}(\hat{\gamma})]}{\partial \gamma_{in}} = 0, \quad (17)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; n = 0, 1, \dots, N)$$

を同時に満足するような推定量 $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_{10}, \dots, \hat{\gamma}_{I-1N})$ として与えられる。ただし、 $\hat{\alpha}_i = \hat{\gamma}_{i0}$ 、 $\hat{\beta}_i = (\hat{\gamma}_{i1}, \dots, \hat{\gamma}_{iN})$ を表す。なお、式(16)に含まれる $\pi_i(s)$ は解析的に求まらず、多重積分を数値計算により求めることが必要となる。

5. 適用事例

本研究で提案した多段階ワイブルハザードモデルを、日本道路公団東北支社管内のトンネル照明灯具の点検データベースに適用した。分析対象としたトンネル照明の構造検査データは、2002年4月から2003年1月までに実施された一斉点検に基づくものである。同点検では、各照明灯具の劣化ランクを、OK, B, A, AAの4段階のレーティングで評価しており、本研究では順に健全度1から4に対応させた。説明変数としては、1) 供用時刻から点検時刻までの経過時間(使用時間)、および2) 照明の種類(基本照明か、緩和照明)を採用した。緩和照明はトンネル導入部、基本照明はトンネル内部に用いられており、トンネル内で照明灯具が位置している場所に関する情報を表している。以下、推計結果に基づいた劣化予測に関する分析結果を説明する。図-2は健全度1の生存確率 $\tilde{F}_1(y_1)$ を基本照明、緩和照明それぞれについて示したものである。緩和照明の方が次の健全度に推移する確率が高いことが分かる。また、この図を詳細に見ると、緩和照明の約80%が健全度2に推移している時点($y_1 \approx 1.7$)でも、基本照明の半分近くは健全度1に留まっていることが分かる。図-3は、基本照明を対象として、初期時

表-1 条件付き期待余寿命 $RL_3(h(s) = i)$

健全度 i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$s = 2$	11.85年	10.54年	6.40年
$s = 4$	—	9.94年	5.77年
$s = 6$	—	9.39年	4.92年
$s = 8$	—	9.02年	3.96年
$s = 10$	—	—	3.15年
$s = 12$	—	—	2.60年

刻からの使用時間 s と劣化状態確率 $\pi_i(s)$ の関係を示している。照明灯具の使用時間の経過により、灯具の健全度の分布状態(劣化状態確率)がどのように変化するかを読み取れる。使用時間6年が経過したあたりで、健全度4に到達する灯具が現れ始めるため、点検が必要となることが理解できる。使用時間15年に到達すると、大半が健全度4の状況になっている。また、管理指標の一例として条件付き期待余寿命 $RL_j(h(s) = i)$ を紹介する。条件付き期待余寿命 $RL_j(h(s) = i)$ は初期時刻から時間 s が経過した時刻で実施された目視点検で健全度 i が観測された時に、健全度 j ($j \geq i$)が終了するまでの期待余寿命を意味する。算出方法は本紙面では割愛するが、 $j = 3$ についての結果は表-1に示す通りとなった。ただし、生存確率が10%以上となる使用時間 s についてのみ表示している。

6. おわりに

本研究では目視点検データに基づいた統計的劣化予測のための多段階ワイブル劣化ハザードモデルを提案した。また、トンネル照明灯具を対象とした適用事例についても簡単に説明した。そのほか、期待寿命、期待余寿命の算出、マルコフモデルとの比較分析も行ったが、紙面の都合により、詳細な分析結果については発表時に報告させていただきたい。