不確実性に対するリスク回避度を考慮した動的システム最適配分

Risk Averse Dynamic System Optimal Traffic Assignment

山崎 周一* ・ 赤松 隆**

By Shuichi YAMAZAKI & Takashi AKAMATSU

１．はじめに

交通渋滞の対策として，既存の交通ネットワークを有効利用することが挙げられる．しかし，時々刻々と変化する交通流を制御するためには動的な制御を行う必要がある．そのような動的な配分原則として，Frieszら[1]やZiliaskopoulos[2]によって，ネットワーク全体で消費される総旅行時間を最小化する動的システム最適（DSO:Dynamic System Optimal）配分が提案された．しかし，従来研究では，いずれもネットワーク条件が確定的な場合のみ議論しており，旅行時間やOD需要が本質的に持つ不確実性を一切考慮していない．

そこで，本研究では，旅行時間とOD需要の不確実性を考慮したDSO配分を定式化し，最適制御ルールを求める．また，ネットワーク管理者のリスク回避度を考慮し，リスク回避度が最適制御ルールに与える影響を明らかにする．

２．状況設定と定式化

本章では，高速道路と一般道路が共存するネットワークをモデル化し，旅行時間とOD需要の不確実性を考慮したDSO配分問題を定式化する．

(１) 状況設定

本研究において対象とするネットワークは，図1に示すようなノードが2つ，ODペアが1つ，リンクが並行に2本存在するようなパラレルリンクネットワークである．ここで，リンク1を高速道路，リンク2を一般道路（一般道路を集約したネットワークを簡略化したもの）とみなす．

(２) リンク・モデルの設定

a）ネットワークパフォーマンスの評価指標

計画時間帯$[0,T]$に，ネットワーク全体で消費される総旅行時間を最小化するように，リンク1の流入率$u(t)$を制御する．しかし，本研究では，旅行時間とOD需要の不確実性を考慮するため，総旅行時間も不確実になる．総旅行時間の期待値だけに注目した制御では，ばらつきのあるリスキーな制御となるため，効用関数を導入して，リスク回避度を考慮する．効用関数には，総旅行時間に対してconcaveな関数を仮定し，効用を最大化するようにリンク1の流入率$u(t)$を制御する．

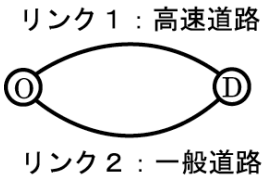

図１　ネットワーク

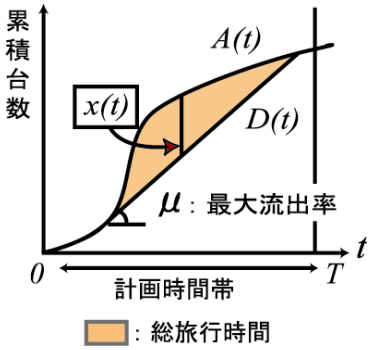

図２　累積図

b）リンク１ー高速道路

自由走行時間を0，最大流出率を$\mu<\infty$，待ち行列台数を$x(t)$とする．最適制御ルールを導出する際に，旅行時間は二つのリンクの差によって評価されるため，リンク1の自由走行時間を0としても一般性は失われない．

リンク1の流入率を$u(t)$としたとき，待ち行列台数$x(t)$の時間変化率$dx(t)/dt \equiv \dot{x}(t)$は以下のように与えられる．

$$\dot{x}(t)=\begin{cases} u(t)-\mu & \text{if} \quad x(t)>0 \\ \max\left[u(t)-\mu,\,0\right] & \text{if} \quad x(t)=0 \end{cases} \tag{1}$$

よって，リンク1の計画時間帯の総旅行時間は図2に示す累積図で表される．

c）リンク２ーー般道路

リンク2の最大流出率は無限大とし，渋滞による待ち時間は生じない．また，リンク2は一般道路を集約したネットワークを考えているため，旅行時間$m(t)$（>0）は確率的に変動するものとする．その変動は幾

キーワード：不確実性，交通流，交通制御

* 学生員　東北大学大学院情報科学研究科

**正会員　東北大学大学院情報科学研究科

何ブラウン運動に従うと仮定し，

$$dm/m(t)= \alpha(t)dt+ \sigma dz \quad (2)$$

とする．ここで，$\alpha(t)$は確定的な時間変化率，σは不確実性の度合いである．また，dz は標準 Wiener 過程の増分である．

d）OD 需要の設定

OD 需要は不確実であると考え，その変動は幾何ブラウン運動に従うと仮定し，

$$dq/q(t)= \alpha(t)dt+ \sigma dz \quad (3)$$

とする．

(3) 確率的制御問題としての定式化

総旅行時間 $C(t)$を減らすことで，効用が増加する効用関数 $U(w(t))$を考える．そして，流入率 $u(t)$を制御変数して効用を最大化する．ここで，$w(t)=-C(t)$ と定義する．これらに加え，各変数の非負制約，境界条件を付加することにより，旅行時間と OD 需要が不確実な場合の DSO 配分問題は，確率的最適制御問題として，次のように定式化できる．

$$\max_{\{u(t)\}} E_0\left[\int_0^T U\big(w(\tau)\big)d\tau - \frac{x^2(T)}{2\mu}\right] \quad (4)$$

subject to

$$x(t)\ge 0,\ u(t)\ge 0,\ x(0)=0,\ x(T)\text{ is free},$$
$$\text{Eq.(1), Eq.(2), Eq.(3),}$$

where

$$w(t)=-C(t),\ C(t)=x(t)+ m(t)\,(q(t)-u(t)).$$

3．最適制御条件

本研究では，旅行時間の不確実性のみを考慮した場合と，OD 需要の不確実性のみを考慮した場合を別々に分析する．これは，個々に分析することで，それぞれの要素が最適制御ルールに与える影響を明らかにするためである．これらの最適制御ルールは，ほぼ同様に導出できるため，以下では，並行して説明する．

(1) HJB 方程式の導出

本節では，DP 原理を用いて，最適値関数が満たすべき条件（i.e. Hamilton-Jacobi- Bellamn(HJB)方程式）を導出する．旅行時間，OD 需要いずれが不確実な場合も，問題の類似性からほぼ同形の HJB 方程式が導出できることを示す．

a）旅行時間が不確実な場合

最適値関数 $V(t,x(t),m(t))$を次のように定義する．

$$V(t,x(t),m(t)) \equiv \max_{\{u(t)\}} E_t\left[\int_t^T U\big(w(\tau)\big)d\tau - \frac{x^2(T)}{2\mu}\right] \quad (5)$$

DP 原理により最適値関数を［$t, t+\Delta t$］と［$t+\Delta t, T$］に分割し，伊藤の補題を用いて整理すると，任意の時刻tについて最適値関数が満たすべき条件である HJB 方程式が求まる．ただし，待ち行列台数の時間変化率$\dot{x}(t)$は，式 1 より待ち行列の有無によって，次の 2 通りに場合分けされる．

$x(t)>0$（待ち行列がある状態）

$$0=\min_{\{u(t)\}} Z_1 + L_0 V \quad (6)$$

$x(t)=0$（待ち行列がない状態）

$$0=\min_{\{u(t)\}} Z_2 + L_0 V \quad (7)$$

ここで，

$$Z_1 = -U(w(t)) + (u(t)-\mu)\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Z_2 = -U(w(t)) + \max\big[u(t)-\mu, 0\big]\frac{\partial V}{\partial x}$$

また，L_0は次のように定義される微分演算子である．

$$L_0 \equiv \alpha(t)m(t)\frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2}\sigma^2 m^2(t)\frac{\partial^2}{\partial m^2} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (8)$$

b）OD 需要が不確実な場合

最適値関数 $V(t,x(t),m(t))$を次のように定義する．

$$V(t,x(t),q(t)) \equiv \max_{\{u(t)\}} E_t\left[\int_t^T U\big(w(\tau)\big)d\tau - \frac{x^2(T)}{2\mu}\right] \quad (9)$$

旅行時間が不確実な場合の問題との類似性から，式(6), 式(7)とほぼ同形の HJB 方程式を導出できる．ただし，微分演算子 L_0は次のように定義される．

$$L_0 \equiv \alpha(t)q(t)\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}\sigma^2 q^2(t)\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (10)$$

(2) 最適制御ルールの導出

本節では，前節で導出された HJB 方程式から，ネットワーク状態に依存した最適制御ルールが導かれることを示す．

a）旅行時間が不確実な場合

旅行時間が不確実な場合の HJB 方程式は，式(6)と式(7)である．ここで，Z_1 と Z_2は，制御変数の流入率 $u(t)$を含む項をまとめたもので，Z_1 と Z_2を最小化する $u(t)$が最適な流入率となる．

Z_1を最小化する流入率 $u(t)$を求める．Z_1を $u(t)$につい

表 1：ネットワークの状態別最適制御条件（旅行時間が不確実な場合）

ネットワーク状態による分類		最適制御条件	最適な流入率	制御番号
$x(t)=0$	$\dot{x}(t)=0$	$0=C_{1+}L_0V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=q(t)$	A
	$\dot{x}(t)=u(t)-\mu$	$0=C_{2+}L_0V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=\mu$	B
		$0=C_{3+}N_0V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=v_0$	C
		$0=C_{1+}L_1V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=q(t)$	D
$x(t)>0$	$\dot{x}(t)=u(t)-\mu$	$0=C_{4+}L_0V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=0$	E
		$0=C_{5+}N_1V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=v_1$	F
		$0=C_{6+}L_1V(t,x(t),m(t))$	$u(t)=q(t)$	G

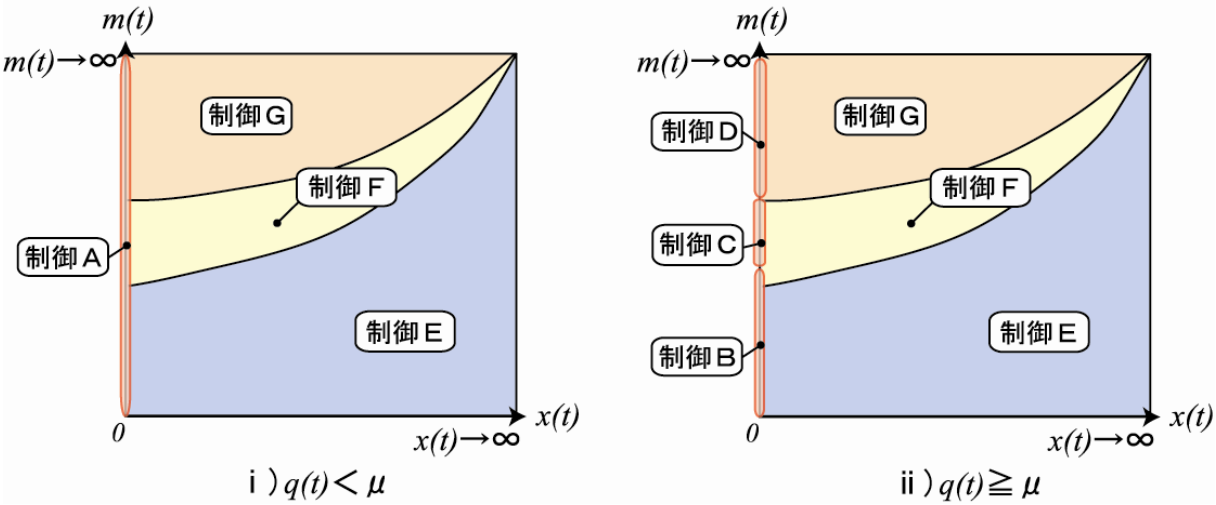

図 3　ネットワークの状態別最適制御ルール（旅行時間が不確実な場合）

て一階微分すると，以下の式が与えられる．

$$\frac{\partial Z_1}{\partial u}=-m(t)\frac{\partial U}{\partial w}+\frac{\partial V}{\partial x} \tag{11}$$

最適な流入率 $u(t)$は，$\partial Z_1/\partial u=0$ を満たす内点解と，端点解（$u(t)=q(t)$ または，$u(t)=0$）で得られる．

Z_2を最小化する流入率 $u(t)$を求める．Z_2は max 演算子を含んでいるため，まず，$\dot{x}(t)=0$ と $\dot{x}(t)=u(t)-\mu$ に場合分けする．場合分けによって得られた方程式から，Z_1と同様の手順で最適な流入率が得られる．

以上の結果をまとめると，表 1 のように，ネットワーク状態別に最適制御条件と最適な流入率を分類できる．表 1 に示す最適制御条件 A～G のうち，条件 B～D，条件 E～G は，ネットワーク状態によって，その各々が排他的に成立する．図 3 は，これら各制御領域を，任意の時刻 t における $m(t)$-$x(t)$状態空間に表したものである．ただし，v_0, v_1 は $m(t)$と $x(t)$の関数で，$\partial Z_1/\partial u=0$ を満たす内点解である．L_1，L_2 は $m(t)$に対する線形の微分演算子，N_0，N_1 は $m(t)$に対する非線形の微分演算子である．

b）OD 需要が不確実な場合

OD 需要が不確実な場合の HJB 方程式は，旅行時間が不確実な場合とほぼ同形である．よって，a）と同様に最適制御条件と最適な流入率を得られ，同じ制御パターンになる．なお，紙面の都合上，表 1 に対応する詳細な制御ルールをまとめたものは省略する．図 4 は，任意の時刻 t における $q(t)$-$x(t)$状態空間での各制御領域を表したものである．最適値関数は t，$q(t)$と $x(t)$の関数，v_0，v_1 は $q(t)$と $x(t)$の関数で，$\partial Z_2/\partial u=0$ を満たす内点解である．L_1，L_2 は $q(t)$に対する線形の微分演算子，N_0，N_1 は $q(t)$に対する非線形の微分演算子である．

（3） 最適制御ルールの性質

本節では，最適制御ルールの性質を示し，時間，リスク回避度との関係を明らかにする．

a）旅行時間が不確実な場合

待ち行列がない場合（$x(t)=0$），OD 需要 $q(t)$ と最大流出率 μ の大小関係により，図 3 のⅰ），ⅱ）の異なる

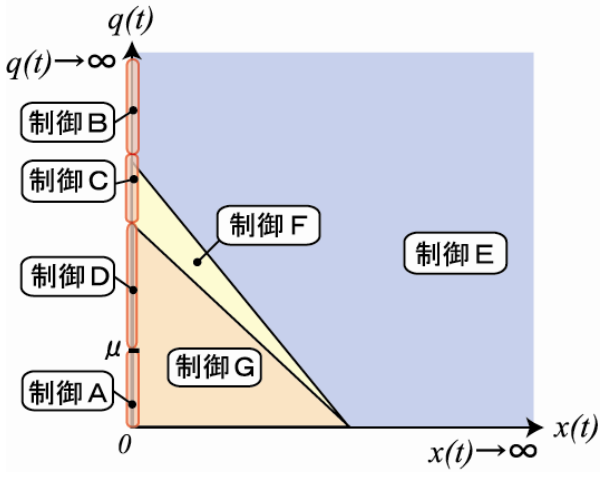

図 4　ネットワークの状態別最適制御ルール
（OD 需要が不確実な場合）

制御パターンが存在する．一方，待ち行列がある場合（$x(t)>0$），OD 需要 $q(t)$ と最大流出率 μ の大小関係に関わらず，制御パターンは同じになる．どちらの場合も，リンク 2 の旅行時間 $m(t)$の増加にともない，リンク 1 への流入率を増加させる制御に切り替わる．これは，リンク 2 の旅行時間が一定の値を超えると，多少の渋滞を発生させてでも，リンク 1 へ流入させる制御が望ましいことを意味する．この各制御領域は，時間とリスク回避度に対して以下の性質がある．

時間に対する制御領域の変化　図 3 に示す各制御領域は時間の経過とともに変化する．これは，式(11)の $\partial V/\partial x$ は時間とともに減少するためである．時間の経過とともに，制御 D，G の領域が拡大し，制御 B，C，E，F の領域は縮小する．

最適制御ルールとリスク回避度の関係　リスク中立（総旅行時間の期待値を最小化する制御）の場合，制御 C，制御 F の領域が消える．つまり，どちらかのリンクにすべての OD 需要を配分する制御になる．一方，リスク回避を考慮した場合，リスク回避度が大きくなるにしたがって，制御 C，制御 F の領域が拡大する．これは，リスク回避度が大きくなるにしたがって，旅行時間が不確実であるリンク 2 への流入を抑制し，リンク 1 へ流入させる制御になることを意味する．

b）OD 需要が不確実な場合

OD 需要 $q(t)$，待ち行列台数 $x(t)$の増加にともない，リンク 1 への流入を抑制する制御に切り替わる．

旅行時間 $m(t)$が不確実な場合は，旅行時間 $m(t)$の増加とともに，最適な流入率も増加した．しかし，OD 需要 $q(t)$が不確実な場合は，OD 需要の増加とともに，最適な流入率は減少する．この各制御領域は，時間とリスク回避度に対して以下の性質がある．

時間に対する最適制御ルールの変化　図 4 に示す各制御領域は時間の経過とともに変化する．時間の経過にともない，制御 D，G の領域が拡大し，制御 B，C，E，F の領域が縮小する．

最適制御ルールとリスク回避度の関係　リスク中立（総旅行時間の期待値を最小化する制御）の場合，制御 C，制御 F の領域が消え，制御 D，制御 G の領域が拡大する．一方，管理者のリスク回避度を考慮した場合，リスク回避度が大きくなるにしたがって，制御 B，制御 C，制御 E，制御 F の領域が拡大する．これは，リスク回避度が大きくなるにしたがって，将来，OD 需要が増加した場合に備えて，リンク 1 の待ち行列を抑制しておく制御を意味する．

4．おわりに

本研究では，旅行時間が不確実な場合と，OD 需要が不確実な場合の DSO 配分を定式化し，最適制御ルールを導出した．また，リスク回避度が最適制御ルールに与える影響を明らかにした．なお，紙面の都合上，旅行時間や OD 需要の不確実性が最適制御ルールに与える影響は説明できなかった．これらを分析するには，数値計算が必要となる．従来研究において，棟方・赤松[3]は，DSO 配分問題が相補性システム問題として表現できることに着目し，旅行時間が不確実な場合の DSO 配分問題を解くアルゴリズムを開発した．そこで，発表会では，そのアルゴリズムを用いた数値実験の結果を報告する予定である．

参考文献

1) A.K.Ziliaskopoulos, “A Linear Programming Model for the Single Destination System Optimum Dynamic Traffic Assignment Problem”, Transportation Science, Vol.34, pp.1-12, 2000

2) Friesz, T.L., Luque, J., Tobin, R. and Wie, B. : “Dynamic Network Traffic Assignment Considered as a Continuous Time Optimal Control Problem”, Operation Research, Vol.37, pp.893-901, 1989

3) 棟方章晴・赤松隆, “旅行時間の不確実性を考慮した動的システム最適配分問題の解法”, 土木計画学研究・講演集 30, 2004.