交通需要の不確実性を考慮したネットワークの動的有料道路料金更新問題*1

Dynamic Revenue Management of Toll Road Projects in Networks under OD Demand Uncertainty*1

長江 剛志*2
By Takeshi NAGAE*2

1　はじめに

本研究では，有料道路と一般道路からなるネットワークにおいて，交通需要の確率的変動を考慮した有料道路の動的料金更新問題の記述・分析のための枠組を提案する．本稿における動的料金更新とは，以下のように定義される：管理者が一定期間 (e.g., 一日あるいは週，月，年) ごとにある起終点間における平均 OD 間交通需要 (以下，OD 需要) を観測し，観測された OD 需要と現在の料金レベルとの間のミスマッチを解消するようなフィードバック的な料金変更．より具体的には，OD 需要が低ければ有料道路料金を引き下げて有料道路 (ひいてはネットワーク全体への) 需要を喚起し，需要が回復した後は，料金を引き上げて有料道路の混雑を改善するといった料金制御則を導く．

従来，交通需要の動学的不確実性を明示的に考慮した有料道路の動的料金更新問題の考え方および必要性については漠然と議論されてきたが，その具体的な方法論を扱った研究は筆者の知る限り殆ど存在しない．棟方ら[4)] および Nagae and Akamatsu[2)] は，交通需要を確率過程として表現し，動的料金問題を確率インパルス制御問題として定式化した上で，料金制御則を定量的に求めるための解法を開発した．しかし，これらの研究は，いずれも，ネットワークを捨象しており，経路選択や混雑といった交通特有の現象を明示的に考慮していない．そこで，本研究では，Nagae and Akamatsu[2)] の枠組を一般道も含めたネットワークへと拡張し，有料道路事業の利潤を最大化させる料金制御則を導く．

本稿は以下のように構成される：まず，続く第 2 節で本研究の枠組を示し，最適料金更新問題を確率的インパルス制御問題として定式化する．第 3 節では，こうして定式化された問題の最適性条件が無限次元の一般化相補性問題 (GLCP: Generalized Linear Complementarity Problem) として記述できることを明らかにする．第 4 節では，この分析結果を活用した問題の効率的解法を開発する．具体的には，まず，適当な離散的枠組の下で，最適性条件を有限次元 GLCP として再定式化し，数理計画分野における最近の研究成果を活用した効率的解法を示す．最後に，第 5 節では，本モデルの社会的便益最大化問題への拡張と，政府による最適規制問題について議論する．

2　問題の枠組と定式化

(1)　状況設定

1 つの起終点ペアを 1 本の有料道路および 1 本の一般道路が結ぶネットワークを考える．任意の時刻 $t \in [0, \infty)$ において，この起終点間には単位時間あたり q_t だけの OD 需要が発生すると仮定する．有料道路の管理者は，時刻 t において予め与えられた料金集合 $E \equiv \{E_m | m = 1, 2, \cdots, \mathrm{M}\}$ の中から料金を決定できるとし，時刻 t において選択される料金レベルのインデクスを $m_t \in M$ と記述する．ここで，$M \equiv 1, 2, \cdots, \mathrm{M}$ は料金レベルのインデクス集合である．任意の時刻 $t \in [0, \infty)$ において，このネットワーク上では OD 需要 $q_t = q$ と料金レベル $m_t = m$ を与件とした利用者均衡が達成されると仮定し，当該時刻における有料道路の均衡交通量を $x^*_m(q)$，OD 間の均衡一般化費用を $S^*_m(q)$ で，それぞれ表す．

この有料道路事業からは，毎時刻，均衡交通量 $x^*_m(q)$ と料金レベルに応じた料金収入が発生する．管理者は，無限の管理期間 $[0, \infty)$ に渡って得られる料金収入流列の期待現在価値の総和を最大化するように料金戦略 $\{m_t | t \in [0, \infty)\}$ を決定する．

(2)　モデルの定式化

■OD 需要のダイナミクス　時刻 $t \in [0, \infty)$ において，料金レベル $m_t = m$ が選択されているときの OD 需要のダイナミクスは，均衡 OD 間費用 $S^*_m(q_t)$(後述) を用

---

*1 キーワーズ：交通制御，交通網計画，確率的制御

*2 正会員，博士（情報科学）神戸大学大学院自然科学研究科
(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

いた以下の確率微分方程式：

$$\mathrm{d}q_t = \mu(q_t, S_m^*(q_t))\,\mathrm{d}t + \sigma(q_t)\,\mathrm{d}Z_t, \quad q_0 = \text{given}. \quad (1)$$

で記述される．ここで，$\mu : \mathcal{R}_{++} \times \mathcal{R}_{++} \to \mathcal{R}$ および $\sigma : \mathcal{R}_{++} \to \mathcal{R}_{++}$ は，それぞれ，OD 交通量のトレンドおよび変化量の分散を表している．Z_t は適切な確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される標準 Brown 運動である．

■利用者均衡状態　時刻 t における有料道路の単位時間あたり交通量を x_t で表し，このときの有料道路の一般化費用を

$$\tau_m(x_t) \equiv E_m + s_1(x_t), \quad m = 1, \cdots, \mathrm{M} \quad (2)$$

で表す．ここで，$s_1(x_t)$ は有料道路のリンク・コスト関数である．同様に，一般道路の交通量を $y_t \equiv q_t - x_t$ で記述し，リンク・コストを $\tau_0(y_t)$ で表す．$s_0, s_1 : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_{++}$ は，それぞれ，交通量に関する単調増加凸関数であるとする．以下では，均衡状態を容易に求めるために，$0 < \tau_m(0) < \tau_0(0), \forall m \in M$ とする．

上記の仮定より，有料道路の均衡交通量は

$$x_m^*(q_t) = \begin{cases} q_t & \text{if } \tau_m(q_t) \leqslant \tau_1(0) \\ f_m(q_t) & \text{if } \tau_m(q_t) > \tau_1(0) \end{cases} \quad (3)$$

で表され，OD 間の均衡一般化費用は

$$S_m^*(q_t) \equiv \tau_m(x_m^*(q_t)) \quad (4)$$

で表される．ここで，$f_m(q)$ は，以下の等時間原則

$$c_m(x, E_m) = \tau_1(q - x) \quad (5)$$

を満足する x を q の関数で表したものである．

■有料道路事業の利潤および定式化　時刻 t において，OD 交通量 $q_t = q$ および料金レベル $m_t = m$ であるとき，管理者が単位時間に得る料金収入を

$$\pi_m(q) \equiv E_m x_m^*(q) \quad (6)$$

と定義する．有料道路の事業主体は管理期間 $[0, \infty)$ の間に獲得する料金収入流列の期待現在価値の総和を最大とするように料金レベル戦略 $\{m_t\}_0^\infty \equiv \{m_t | t \in [0, \infty)\}$ を決定する．この料金レベルの変更には一定のメニュー・コストがサンクすると仮定し，料金 m から料金 n への変更に必要なメニュー・コストを $C(m, n)$ で表す．表記の簡便のため，以下では，k 番目に料金レベルを変更する時刻を $\mathcal{T}_k$ で表し，その際のコストを $C_k \equiv C(m_{\mathcal{T}_k^-}, m_{\mathcal{T}_k})$ で表す．このとき，管理者の行動は以下のように定式化される．

$$\text{[P]} \quad \max_{\{m_t | t \in [0,\infty)\}} \mathrm{E}\Big[\mathcal{J}(q, m) | q_t = q, m_t = m\Big], \text{ s.t. (1)},$$

ここで，$\mathcal{J}(\cdot)$ は将来に渡って発生する利潤の現在価値の総和であり，

$$\mathcal{J}(q, m) \equiv \int_0^\infty e^{-\rho t} \pi_{m_t}(q_t)\,\mathrm{d}t + \sum_k e^{-\rho \mathcal{T}_k} C_k \quad (7)$$

と定義される．ρ は割引率であり，所与の定数とする．

3　最適性条件の導出

本節では，問題 [P] の最適性条件が無限次元の GLCP(Generalized Linear Complementarity Problem; 一般化相補性問題) として記述できることを明らかにする．まず，OD 需要 $q_t = q$ で料金 $m_t = m$ が選択されているときの問題 [P] の最適値関数を

$$V_m(q) \equiv \max_{\{m_t\}_0^\infty} \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(q, m) | q_t = q, m_t = m\right], \forall m \in M, \quad (8)$$

と定義する．この最適値関数 $V_m(q)$ は，料金レベル m を選択しているときの有料道路事業の価値を，OD 交通量 q の関数として表現したものと解釈できる．表記の簡便のため，以降では，$V_m \equiv \{V_m(q) | \forall q \in \mathcal{R}_{++}\}$ および $\boldsymbol{V} \equiv \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_\mathrm{M} \end{bmatrix}'$ なる表現を用いる．

最適値関数 (8) に DP(Dynamic Programming) 原理を適用すれば，管理者の行動は，以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：i) ある期間 Δ だけ現在の料金レベル m を継続する；あるいは ii) 料金レベルを m から他のレベルに変更する．以下では，それぞれが選択される場合に最適値関数が満たすべき条件を導こう．まず，管理者が現在の料金レベル m をある期間 Δ だけ継続する場合，最適値関数は，

$$V_m(q) \geqslant \int_0^\Delta e^{-\rho t} \pi_m(q_t)\,\mathrm{d}t + e^{-\rho\Delta} \mathrm{E}\Big[V_m(q) + \Delta V_m | q_t = q, m_t = m\Big]. \quad (9)$$

を満たす．ここで，$\Delta V_m \equiv \int_0^\Delta \mathrm{d}V_m(q)$ である．$\Delta \to 0$ として伊藤の補題を適用すれば，この条件式は，

$$F_{m,m}(q; V_m) \equiv -\mathcal{L}_m V_m(q) - \pi_m(q) \geqslant 0 \quad (10)$$

と書き直せる．ここで，$\mathcal{L}_m$ は OD 需要プロセス (1) から決定される常微分演算子で，以下の式で定義される．

$$\mathcal{L}_m \equiv \mu_m(q, S^*_m(q))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} + \frac{1}{2}\sigma^2(q)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} - \rho. \tag{11}$$

次に，管理者が料金 m から他の料金レベル n に変更する場合，最適値関数は

$$V_m(q) \geqslant V_n(q) - C(m,n) \tag{12}$$

を満たす．左辺より右辺を引けば，この式は

$$F_{m,n}(q;\boldsymbol{V}) \equiv V_m(q) - V_n(q) + C(m,n) \geqslant 0 \tag{13}$$

と書き直せる．この不等式が m 以外の全ての料金レベル $n \neq m$ に対して成り立つため，管理者が料金レベルを変更するときに最適値関数が満たす条件は，

$$\min_{n \in M \backslash m}.\ \{F_{m,n}(q;\boldsymbol{V})\} \geqslant 0 \tag{14}$$

で表される．ここで，$M\backslash m \equiv \{m' | m' \in M, \text{and } m' \neq m\}$ である．

任意の状態 q_t において，上記の選択は排他的である．従って，条件式 (10) および (14) のいずれか一方のみ等号が成立する．これは，以下の一般化相補性条件として記述できる．

$$\min.\{F_{m,1}(q;\boldsymbol{V}), \cdots, F_{m,\mathrm{M}}(q;\boldsymbol{V})\} = 0, \quad \forall q \in \mathcal{R}_{++}. \tag{15}$$

ここで，管理者は料金レベルの変更を任意回数行えることに注意されたい．これは，各料金レベルに対応する最適値関数 $V_1(q), V_2(q), \ldots, V_\mathrm{M}(q)$ を，後方帰納法 (backward induction) を用いて逐次的に求められないことを意味している．そのため，全ての料金レベルに対応する最適値関数 $\boldsymbol{V}$ を以下の GLCP の解として "同時に" 求める必要がある．

[GLCP$^\infty$]　Find $\boldsymbol{V}$ such that

$$\begin{cases} \min.\{F_{1,1}(q;\boldsymbol{V}), \cdots, F_{1,\mathrm{M}}(q;\boldsymbol{V})\} = 0 \\ \vdots \\ \min.\{F_{\mathrm{M},1}(q;\boldsymbol{V}), \cdots, F_{\mathrm{M},\mathrm{M}}(q;\boldsymbol{V})\} = 0 \end{cases}$$

4　数値的解法

前節までで，動的料金更新問題が無限次元の一般化相補性問題 [GLCP$^\infty$] として表現できることを示した．この問題は解析解を持たないため，本節では，適当な離散的枠組の下で近似解を数値的に求める方法を示す．

(1)　問題の離散的表現

非負領域 $\mathcal{R}_{++}$ 上に十分に大きい領域 $[q_{\min}, q_{\max}] \in \mathcal{R}_{++}$ を考え，その上に間隔 Δq の離散格子を取り，格子上の点を $q^j \equiv q_{min} + j\Delta q, j \in J$ で表す．ここで，$J \equiv \{0, 1, \cdots, \mathrm{J}, \mathrm{J}+1\}$ は格子上の点のインデクス集合である．j 番目格子点上の最適値関数および利潤関数を，それぞれ，$V^j_m \equiv V_m(q^j), \pi^j_m \equiv \pi_m(q^j)$ と表現し，$\boldsymbol{V}_m \equiv \left[V^1_m, \cdots, V^\mathrm{J}_m\right]'$ および $\boldsymbol{\pi}_m \equiv \left[\pi^1_m, \cdots, \pi^\mathrm{J}_m\right]'$ とベクトル表記する．以下では，各料金レベル毎の最適値関数 $\boldsymbol{V}_m$ を縦に並べた JM 次元列ベクトルを $\boldsymbol{V}$ で表す．

この離散的枠組下で，問題 [GLCP$^\infty$] は以下のように離散表現される．

[GLCP]　Find $\boldsymbol{V} \in \mathcal{R}^{\mathrm{JM}}$ such that

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{V}) \equiv \min.\{\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{V}), \cdots, \boldsymbol{F}_\mathrm{M}(\boldsymbol{V})\} \equiv \boldsymbol{0}, \tag{16}$$

where

$$\boldsymbol{F}_n \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{1,n}(\boldsymbol{V}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{M},n}(\boldsymbol{V}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_{m,n} \equiv \begin{cases} -\boldsymbol{L}_m\boldsymbol{V}_m - \boldsymbol{\pi}_m & m = n \\ \boldsymbol{V}_m - \boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{1}C & m \neq n \end{cases}$$

ここで，$\min.\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_\mathrm{M}\} : \mathcal{R}^{\mathrm{JM}} \times \cdots \times \mathcal{R}^{\mathrm{JM}} \to \mathcal{R}^{\mathrm{JM}}$ はベクトル演算子で，その第 j 番目要素が $\min.\left\{F^j_1, \cdots, F^j_\mathrm{M}\right\}$ と定義される．$\boldsymbol{1}$ は全ての要素が 1 であるような J 次元列ベクトルである．

(2)　アルゴリズム

問題 [GLCP] のような有限次元 GLCP に対しては，近年，多くの数値解法が提案されている (例えば，Ferris and Pang[1], Peng and Lin[3])．以下では，最近の相補性問題研究の進展に伴って現れた平滑化 (smoothing) アプローチ [3] を用いた解法について議論する．

平滑化アプローチでは，区分的に滑らかな非線形方程式：

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{V}) \equiv \min.\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_\mathrm{M}\} = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

の微分不可能性による問題を克服するために，これを

平滑化した関数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V},\xi)$ を用いる．ここで，平滑化関数は，$\lim_{\xi\to 0}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V},\xi)=\boldsymbol{\mathcal{H}}$ なる性質を持つ $\boldsymbol{V}$ について連続微分可能な関数であり，ξ は平滑化パラメタと呼ばれる．本稿では，こうした平滑化関数として，以下の Peng and Lin[3] 型関数を採用する．

$$[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V},\xi)]^j \equiv -\xi \ln\left\{e^{-\frac{F_1^j(\boldsymbol{V})}{\xi}}+\cdots+e^{-\frac{F_M^j(\boldsymbol{V})}{\xi}}\right\} \quad (18)$$

この平滑化関数を用いて問題 [GLCP] を解く最も簡単なアルゴリズムは，以下のようにまとめられる[3]．

Step 0.　$\xi^{(1)}\in\mathcal{R}_+$ を選び，$k:=1$;
Step 1.　$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{V}^{(k)})=\boldsymbol{0}$ ならば停止 ($\boldsymbol{V}^{(k)}$ が解);
Step 2.　平滑化方程式 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V}^{(k)},\xi^{(k)})=\boldsymbol{0}$ を解く;
Step 3.　次のパラメタ $\xi^{(k+1)}\in[0,\xi^{(k)})$ を選ぶ;
Step 4.　$k:=k+1$ とし，Step1 へ．

このアルゴリズムは，以下の 2 つの特徴を持つ．第 1 に，Step 3. で平滑化パラメタが $\xi^{(k+1)}<\xi^{(k)}$ を満足するように選ばれるため，このアルゴリズムが生成する平滑化経路 $\{(\boldsymbol{V}^{(k)},\xi^{(k)})\}$ は明らかに GLCP の解 $(\boldsymbol{V}^*,+0)$ に収束する．第 2 に，Step 2. の平滑化方程式は連続微分可能であるため，その解を Newton 法などを用いて計算できる．特に，Peng and Lin[3] は，Step 2. の計算に打ち切り Newton 法を用いることで局所的な収束速度を高めている．その詳細および大域的収束性や効率性の議論については Peng and Lin[3] を参照されたい．

5　社会的便益最大化問題への拡張

最後に，本研究の枠組の拡張として，一般道も含めたネットワーク全体の効率性について議論しておこう．前節までで取り扱った問題は，有料道路事業の財務的利潤の最大化のみを目的としていたため，高すぎる料金を避けて利用者が一般道へ迂回し混雑が発生することや，その外部不経済を考慮していない．そのため，利潤最大化を目的とした料金制御則 (以下，m^{PM}) は，一般に，ネットワーク全体の効率性を損なう．これは道路公団の民営化や公共事業の PFI 化を議論する上では不可避の問題であり，このような状況下では，政府には，適切な規制を設けることで社会的により望ましい状態 (次善の社会的最適状態) を達成することが望まれる．本研究の手法は，こうした社会的最適化問題および最適規制設計問題に対しても応用可能である．

まず，本稿で提案した枠組および分析手法は，有料道路事業の利潤 $\pi_m(q)$ 関数形に依存しないため，これをネットワーク全体から発生する単位時間あたりの社会的便益 $B_m(q)$ に置き換えれば，前節までと同様の方法で社会的最適な料金制御則 m^{SO} を計算できる．次に，最適規制は以下のようにして求められる．ここでは政府の規制の例として管理者の料金制御に税金 (あるいは補助金) を課す場合を考えよう．具体的には，有料道路管理者が，料金レベルを m から n に変更する際に，メニュー・コスト $C(m,n)$ に加えて $K(m,n)$ だけの税金 (負の値の場合は補助金) を支払う必要があると仮定する．課金策 $K\equiv\{K(m,n)|m,n\in N\}$ の下での利潤最大化制御則を $m^{\mathrm{PM}}(K)$ とすれば，最適規制は，$m^{\mathrm{PM}}(K)=m^{\mathrm{SO}}$ を満たす K として求められる．一般に，こうした最適課金策 K^* を求めることは困難だが，棟方ら[4] や Nagae and Akamatsu[2] のような料金レベルが 2 つしか無い場合であれば，最適課金策 K^* を容易に求められる．その具体的な方法と計算結果については講演会にて報告する予定である．

参考文献

1) Ferris, M. C. and Pang, J.-S. eds.: *Complementarity and Variational Problems: State of the Art*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

2) Nagae, T. and Akamatsu, T.: Dynamic revenue management of toll road projects under transportation demand uncertainty, in *2nd International Symposium on Transport Network Reliability*, pp. 75–87, 2004.

3) Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problem, *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp. 533–563, 1999.

4) 棟方章晴, 大嶋孝史, 赤松隆：確率的インパルス制御アプローチによる有料道路料金変更法, 土木計画学研究・講演集, Vol. 26, , 2002.