運賃水準と需要の不確実性を考慮した航空事業の投資オプション評価*
Investment on air transport service under yield uncertainty and demand uncertainty *

高田和幸**
By Kazuyuki TAKADA**

1. はじめに

航空サービスの供給主体である航空会社は，個々の路線で運行を継続するか，あるいは停止するかの意思決定の場面に直面する．その際，他航空事業者や他交通機関との競争状態下における，需要変動，運賃動向が考慮される．そして路線からの撤退という意志決定がなされると，旅客や空港運営者にも多大な影響が及ぶことになる．わが国の航空市場を見渡す限り，運行していた路線で一度サービスが撤退すると，その路線に再度サービス供給されるということは稀である．そのため空港運営者は，路線維持に取り組むことになる．このような背景を踏まえると，航空会社の特定路線でサービス供給を行う事業の価値や，その事業の投資オプション価値を求めることは，路線維持の可能性を検討する上で，有益な情報であると考えられる．

そこで本論では，ファイナンシング分野で発展したオプション理論を適用し，運賃の不確実性と需要の不確実性を考慮して，特定路線の事業価値と投資オプション価値を求めることとした．

2. 収益の不確実性について

ある路線における，旅客一人当たりの運賃収入 p と旅客数 x がそれぞれ以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する．

$$dp = a_p pdt + s_p pz_p \tag{1}$$

$$dx = a_x xdt + s_x xz_x \tag{2}$$

ここで，

$E[z_p] = 0$， $E[{z_p}^2] = dt$，

$E[z_x] = 0$， $E[{z_x}^2] = dt$，

また運賃 p と旅客数 x の間の相関係数を r とすると，

$E[z_p z_x] = rdt$ である．

今，収益関数が $S(p,x) = px$ で表すことができると仮定すると，収益の変化は，以下の式(3)で近似できる．

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial p}dp + \frac{\partial S}{\partial x}dx \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}dp^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial x}dpdx + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

式(3)に, 式(1), (2)を代入し, 伊藤の公式を適用すると, 収益 S の拡散過程を次式で表すことができる.

$$dS = (a_p + a_x + r s_p s_x)Sdt + s_p Sdz_p + s_x Sdz_x \tag{4}$$

3. 事業価値について

航空会社が，ある路線でサービスを供給するのに必要な費用を C とする．

もし，$S > C$ であれば，この航空会社は，この路線でサービスを供給することで収益を得られる．そして，その額は，

$$p(S) = \max\{S - C, 0\} \tag{5}$$

である．

(5)式は，航空会社は，$S < C$ のときには，費用ゼロで瞬時にサービス供給を停止することができ，また $S > C$ であれば，費用ゼロで瞬時にサービス供給を開始できることを表している．

この航空会社は，この路線での事業の価値 $V(S)$ を最大化すると考えられる. そのとき目的関数は, 次式となる.

$$\begin{aligned} V(S) = \max_{u} \{ & p(S)\Delta t \\ & + (1 + r\Delta t)^{-1} E[V(S + dS \mid S)]\} \end{aligned} \tag{6}$$

右辺の括弧内の第一項は，微小期間 $(t, t + \Delta t)$ に得ら

*キーワーズ 航空, 不確実性, 路線維持, リアル・オプション

**正員, 博士（工学）, 東京電機大学/理工学部/建設環境工学科　埼玉県比企郡鳩山町石坂,
TEL049-296-2911(2702), e-mail:takada@g.dendai.ac.jp）

れる収益を表している．また第二項は，時点$t+\Delta t$以降も継続してサービスを供給することに対する事業価値の期待現在価値を表している．

式(6)は動的計画問題のベルマン方程式である．ベルマン方程式は，$V(S)$が満たさなければならない微分方程式として次式の通りに表わすことができる．

$$\frac{1}{2}s^{2}S^{2}V''(S)+aSV'(S)-rV'(S)+p(S)=0 \tag{7}$$

ただし，s_p, s_xは以下の関係式を満たす．

$$a=a_p+a_x+rs_ps_x \tag{8}$$

$$s=s_p^2+s_x^2+rs_ps_x \tag{9}$$

(7)式の微分方程式を解く際に，以下の２通りの場合を考える．

（ケース１）$S-C<0$の場合

このとき，$p(S)=0$となる．よって，式(8)は，以下の微分方程式に書き改められる．

$$\frac{1}{2}s^{2}S^{2}V''(S)+aSV'(S)-rV'(S)=0 \tag{10}$$

よって一般解は，次式の通りである．

$$V(S)=A_1S^{b_1}+A_2S^{b_2} \tag{11}$$

ここでA_1, A_2は未知定，b_1, b_2は，次式で求まる定数である．

$$(b_1,b_2)=\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{s^2}+l,\frac{1}{2}-\frac{a}{s^2}-l\right) \tag{12}$$

$$l=\sqrt{\left(\frac{a}{s^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{s^2}}$$

（ケース２）$S-C>0$の場合

このとき，$p(S)=S-C$である．よって式(7)は，以下の微分方程式に書き換えられる．

$$\frac{1}{2}s^{2}S^{2}V''(S)+aSV'(S)-rV'(S)=-S+C \tag{13}$$

これは変数係数線形微分方程式であり，解は次式となる．

$$V(S)=B_1S^{b_1}+B_2S^{b_2}+\frac{S}{r-a}-\frac{C}{r} \tag{14}$$

未知の定数A_1, A_2, B_1, B_2は，（ケース１）と(ケース２)の境界を状態を検討することで決定することができる．

$S-C<0$の領域では，Sが非常に小さいと，将来の利益の期待現在価値は限りなくゼロに近いと考えられる．よってb_2が負であるため，$A_2=0$でなければならない．

次に$S-C>0$のとき，Sが非常に大きいと路線から撤退するというオプションは非常に小さいはずである．したがって$B_1=0$でなければならない．以上より，

$$V(S)=\begin{cases}A_1S^{b_1} & \text{if } S<C\\ B_2S^{b_2}+\dfrac{S}{r-a}-\dfrac{C}{r} & \text{if } S>C\end{cases} \tag{15}$$

また（ケース１）と（ケース２）の境界線上($S=C$)においては，これらの方程式は連続，かつ接していなければならない．よって，以下の関係式が得られる．

$$A_1C^{b_1}=B_2C^{b_2}+\frac{C}{r-a}-\frac{C}{r} \tag{16}$$

$$b_1A_1C^{b_1-1}=b_2B_2C^{b_2-1}+\frac{1}{r-a} \tag{17}$$

これらの連立方程式を解くと，

$$A_1=\frac{C^{1-b_1}}{b_1-b_2}\left(\frac{b_2}{r}-\frac{b_2-1}{r-a}\right) \tag{18}$$

$$B_2=\frac{C^{1-b_2}}{b_1-b_2}\left(\frac{b_1}{r}-\frac{b_1-1}{r-a}\right) \tag{19}$$

が得られる．

4. 投資オプションの価値

前節では，路線でサービス供給を行うという事業の価値を，現時点の収益Sで評価した．なお付け加えると，収益Sの増加率やボラティリティは，運賃pと旅客数xの変動に関する情報から得られたものである．

通常，収益Sの従う拡散過程が定まれば，Vの従う拡散過程も知ることができ，さらに投資のオプション価値FをVの関数として特定することが可能である．ただし，Vが従う拡散過程のパラメータは一般に複雑な式となり，FをVの関係を表す微分方程式を解くことは困難である[3)]．このような場合には，前節で求めた$V(S)$の解を最適行使閾値が満たす境界条件として用いて投資オプションの価値を関数$F(S)$で求める方法が取られる．本論でもこの方法を採用した．

Sの従う拡散過程は，式(7)に示した通りである．

$F(S,t)$ を投資オプションの価値とする．すると，いつこの事業に投資すべきか否かという問題は，以下の最適化問題として定式化することができる．

ここで u は，投資を行っているか，いないかを表す状態変数である．

$$F(S)=\max_{u}\{(1+r\Delta t)^{-1}E[F(S+dS\,|\,S)]\} \qquad (20)$$

右辺の第一項は，微笑時間 dt の間に得られる収益，第二項は，時点 t において想定される時点 $t+dt$ 以降の投資オプション価値の期待現在価値を表している．

式(20)は動的計画問題のベルマン方程式である．ベルマン方程式は，$F(S)$ が満たさなければならない微分方程式として次式のように表わすことができる．

$$\frac{1}{2}s^{2}S^{2}F_{SS}(S)+aSF_{S}(S)-rF(S)=0 \qquad (21)$$

この微分方程式の一般解は，次式で表すことができる．

$$F(S)=K_1S^{b_1}+K_2S^{b_2} \qquad (22)$$

ここで，b_1, b_2 は式(12)と同一のもの，また K_1, K_2 は未知定数である．

この解は，投資オプションを保有（つまりこの事業に投資をしないで，より良い投資の環境になることを待つ）ことが最適となる S の範囲で有効である．

よって一人当たりの運賃 p が大きく上昇した場合や，旅客数 x が増大するなどして，収益 S が大きく増加すると投資は魅力的となる．

よってオプションを保有する範囲は，ゼロから S^* (運賃で考えるとゼロから p^*，旅客数で考えるとゼロから x^*)の範囲となる．

したがって，K_1，K_2，および S^*（運賃で考えると，）の３つの未知定数を決定しなければならない．そのため３つの境界条件を与えることが必要である．

ここでは，p と x の変動に依存して変動する S について評価することを考える．

たとえば，S が非常に小さいとき，これが投資の行使閾値 S^* に上昇する確率は極めて少ない．よってこのとき投資オプション価値はゼロに等しい．このことから，

$K_2=0$ となる．

次に，最適行使閾値 S^* における $F(S)$ の挙動を考える．

ここでは投資費用 I を支払って，事業価値 $V(S)$ を得ることが最適となる．

このとき，オプション価値が，行使することにより得られる事業の正味価値に等しくなるというバリューマッチング条件は，

$$F(S^*)=V(S^*)-I \qquad (23)$$

となる．

また，$F(S)$ と $V(S)-I$ のグラフが S^* で接するというスムース=ペースティング条件は，

$$F'(S^*)=V'(S^*) \qquad (24)$$

となる．

$P<C$ の領域においては，$V(S)=0$ であり，投資は行使されない．よって投資が行われるときの事業価値は，

$$V(S)=B_2S^{b_2}+\frac{S}{r-a}-\frac{C}{r} \qquad (25)$$

である．

バリューマッチング条件，スムースペースティング条件は，以下のように書き改められる．

$$b_1K_1S^{*b_1-1}=b_2B_2S^{*b_2-1}+\frac{1}{r-a} \qquad (26)$$

これらから K_1 を消去すると，以下の関係式が得られる．

$$(b_1-b_2)B_2S^{*b_2}+(b_1-1)\frac{S^*}{r-a}-b_1\frac{C}{r}=0 \qquad (27)$$

数値計算により，最適投資行使基準 S^* を求めることができる．そして K_1 を特定すると，オプション価値 $F(S)$ も求めることが可能となる．

5. まとめ

本論では，リアル・オプション理論を適用して，特定路線における航空事業の価値と，その事業に対する投資オプション価値を導出した．

なお，数値を用いた計算結果は，講演時に発表する．

参考文献

1）A. K., Dixit and R. S. Pindyck: Investment under Uncertainty, Princeton University Press,1994. (翻訳) 川口有一朗, 谷下政義, 堤盛人, 中村康治, 長谷川専, 吉田二郎：決定理論とリアルオプション-不確実性のもとでの投資-エコノミスト社, 2001.

2）森平爽一郎, 小島裕：コンピューテショナル・ファイナンス, 朝倉書店, 1997.

3）リアル・オプション-投資プロジェクト評価の工学的アプローチ-, 中央経済社, 2004.