AHPにおける重み順次法の提案*

A Proposal of Weight Order Method on AHP*

杉浦伸**・木下栄蔵***

By Shin SUGIURA**・Eizo KINOSHITA***

１．はじめに

AHP[1)−7)]は，1970 年代，OR 学者 T.L.Saaty によって提案されたさまざまな問題を数学的手法により解決する意思決定モデルである．

AHP の特徴は，解決すべき問題を総合目的，評価基準，代替案を階層構造として構築することである．Saaty が最初に提案した AHP は総合目的から代替案まで一方向的に評価されていくプロセスをたどる．しかし，人々の意思決定がそれほど単純でなく，評価基準，代替案は時として相互に依存しあうことから従来の AHP ではそれに対応できず，AHP の発展モデルとして ANP[1)−7)]が提案された．ANP は評価基準から代替案への一方向的な評価だけでなく，同時に代替案から評価基準の重みへの影響や規制をも考慮した手法である．また，Saaty の ANP とは異なる視点を持つ手法として木下・中西[8)9)]は支配代替案法や重み一斉法を提案している．重み一斉法もまた，代替案から評価基準に重みに対して代替案ごとに独自の視点を持った手法である．つまり，ANP，重み一斉法，これら AHP の発展モデルは意思決定の局面において評価基準の重みの異なりやずれを前提とする手法である．

本稿では，ANP，重み一斉法とは別の，評価基準の重みのずれが生じる場合にその重みを修正し，意思決定問題の解決を行う新しい手法として，重み順次法を提案し，ANP，重み一斉法との違いを示すこととする．

まず，2 章において土台となる AHP の概要を説明し，3，4 章において既存の手法である ANP，ならびに重み一斉法について解説する．5 章において従来までの手法の評価基準の重みの持つ意味と重み順次法の評価基準の重みの視点について説明する．つづいて，6 章において重み順次法を提案し，その構造と例を示す．そして，最後に 7 章において本稿を総括する．

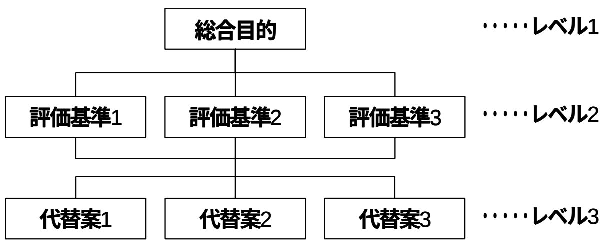
*キーワーズ：計画基礎論，計画手法論

**学生員，都市情報学，名城大学大学院都市情報学研究科
（岐阜県可児市虹ヶ丘四丁目三番地の三，
TEL:0574-69-0100，E-mail:p0481003@urban.meijo-u.ac.jp）
***正員，工博，名城大学都市情報学部都市情報学科
（岐阜県可児市虹ヶ丘四丁目三番地の三，
TEL:0574-69-0100，E-mail:kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）

２．AHP[1)−7)]の概要

AHP（Analytic Hierarchy Process）は 1970 年代にアメリカ人 OR 学者 T.L.Saaty により開発された主観的判断とシステムアプローチをうまくミックスした問題解決型意思決定手法の一つである．AHP はこれまでの意思決定手法では対処しきれなかった問題，特に不確定な状況や多様な価値基準における意思決定を数学的に解決へと導くモデルである．AHP では，まず問題の要素を「総合目的」，「評価基準」，「代替案」の関係で捉えて階層構造を作り上げる．次に総合目的から見た評価基準の重要度を求め，さらに各評価基準から見た各代替案の重要度を評価する．最後に，これらを総合目的からみた代替案の評価に換算し，優先順位を決定する．これら一連の評価の過程では意思決定者の主観や経験を活かして評価を行うことにより，これまではモデル化や定量化することが難しかった問題も解決できる．人間の主観や経験といった，精神的，内面的な部分を意思決定に反映できることが，AHP が広く受け入れられている理由のひとつである．

さて，AHP では，最初に複雑な状況下にある問題を階層構造化する．ただし最上層は 1 個の要素からなる総合目的であり，最下層は代替案である．総合目的と代替案の間には評価項目である評価基準が組み込まれる．あるレベルの評価項目から必要に応じて次々と複数の評価項目が構成され，全体として階層構造が構築される．AHP における階層構造の例を図ー1 に示す．



図－１　階層構造の例

以上のように，総合目的から代替案まで評価基準の組み合わせにより，全体として階層化しているのである．この階層化こそが Analytic Hierarchy Process の意味するところである．

つづいて各評価基準同士の一対比較，ある評価基準の下部に位置する評価基準の一対比較，評価基準の下での代替案の一対比較を行う．この一対比較に用いられる重要性の尺度には｛1/9，1/8，・・・，1，・・・，8，9｝が用いられている．表―1 に一対比較に用いられる数値とその意味を示す．

表－１　重要性の尺度と定義

尺度	定義
1	**同じくらい重要**（equal importance）
3	**少し重要**（weak importance）
5	**かなり重要**（strong importance）
7	**非常に重要**（very strong importance）
9	**きわめて重要**（absolute importance）

（2，4，6，8 は中間の時に用いる）

ただし，表 1 に示した尺度はあくまでも評価の指標であり，必ずしもその値を用いなければならないわけではない．状況に応じて適宜尺度の値と意味を変更したり組み合わせたりすることが大切である．

さて，評価基準あるいは代替案における $n \times n$ の一対比較行列 A を（1）式のように示す．

$$A = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

この一対比較行列 A に重みベクトル W を掛けると，ベクトル $n \cdot W$ を得る．すなわち，

$$A \cdot W = n \cdot W \quad (2)$$

である．ただし，

$$W^T = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \quad (3)$$

とすると，（2）式は固有値問題として

$$(A - n \cdot I) \cdot W = 0 \quad (4)$$

と変形できる．ここで，$W \neq 0$ が成り立つためには n が A の固有値にならなければならない．この時 W は A の固有ベクトルとなる．さらに，一対比較行列 A の階数は 1 であるから固有値 λ_i（i=1，2，・・・，n）は一つのみが非零の値となる．また，A の対角要素の和は n であるから，ただ一つの零でない λ_i の値は n となる．つまり，重みベクトル W は A の最大固有値 λ_{max} に対する正規化した固有ベクトルとなるのである．しかし，実際の複雑な状況下では W が未知であり，これを実際に得られた一対比較行列 A より求めなければならない．そこで A の最大固有値を λ_{max} とすると（2）式より，

$$A \cdot W = \lambda_{\max} \cdot W \quad (5)$$

となり，これを解くことにより W を求めることができるのである．AHP は複雑な階層構造を構築する場合もあり，ある一対比較により得られた重みを順次総合目的から代替案まで掛けあわせていくことにより階層全体からみた重み，すなわち総合目的である代替案の優先順位付けをして選定を行うことができる．

また，状況が複雑になればなるほど意思決定者の答えは整合性に欠けてくる．一対比較行列 A が整合しなくなるにつれて λ_{max} は n より大きくなる．これは（6）式に示す Saaty の定理より明らかになっている．

$$\lambda_{\max} = n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (w_j a_{ij} - w_i)^2 / w_i w_j a_{ij} n \quad (6)$$

ただし，a_{ij} は行列 A の i 行 j 列目の要素である．
以上から $\lambda_{max} \geqq n$ が成り立ち，等号成立条件は行列 A の整合性が完全に取れている時のみ成立する．Saaty は一対比較行列 A の整合性の尺度として C.I.値（Consistency Index：整合度）を（7）式のように定義している．

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (7)$$

（7）式の意味するところはすなわち，一対比較行列 A には n 個の固有値があり，その和は n であることがわかっている．完全に整合性が保たれている場合はただひとつの固有値が n となりそれ以外は 0 となるが，ほとんどの場合はそのような理想的な状態にはなりえない．そのため，完全な整合性が保たれない場合は $\lambda_{max}-n$ を $n-1$ で割ることにより平均値が導出され，（7）式はある固有値の大きさを示す指標とみなすことができる．すでに述べたとおり，行列 A が完全な整合性をもつ場合はこの C.I.値は 0 であり，この値が大きいほど不整合度が大きくなるのである．Saaty は C.I.の値が 0.1 以下（場合によっては 0.15）であれば整合性に問題がないとすることを経験則より提案している．

さて，最後に総合目的に対する代替案の評価値を算出しなければならない．代替案に直結する評価基準の重みまで次々に導出し，これにより，総合目的に対する各代替案の優先順位が決定される．総合目的の下にある評価基準の一対比較行列から重みを次々と計算していく．そして，代替案のすぐ上の評価基準の重みを W とし，代替案に直接かかる各評価基準からの各代替案の評価値を M とすると総合評価値 E は

$$E = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = M \cdot W \qquad (8)$$

として得られる．

３．ANP[1)−7)10)11)]の概要

本章では AHP の発展モデルである ANP[1)−7)10)11)]について述べる．

従来型 AHP は AHP の中でも最も基本的なモデルである．総合目的，評価基準，代替案の関係は，常に代替案が評価基準からの評価，つまり規制を受けている一方向的な意思決定メカニズムになっている．しかし，現実の意思決定場面には様々な状況が存在し，従来型の AHP のみでは対応しきることは困難である．そこで Saaty は AHP を拡張し，ANP と呼ばれる新しい AHP のモデルを提案している．ANP はそれまで代替案が評価基準から受けている評価に加え，代替案そのものにも評価基準への影響として規制が加わったものである．つまり，選定される代替案にも評価基準の重みの配分に影響を与える場合が存在するということである．

ANP は，評価基準の重みと代替案の評価値による行列を収束するまで何度も掛け合わせることにより結果を導出するのが最大の特徴である．代替案からの規制を受けた評価基準の重みを W とし，代替案の評価値を M とする．W, M は列和が 1 であり，E を（9）式のように表現する．

$$E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{評価基準} & \text{代替案} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{評価基準} \\ \text{代替案} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & W \\ M & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (9)$$

E は各列の縦の和が 1 となる推移確率行列でその無限大乗は（10）式のおける E^*に収束する．

$$\lim_{k \to \infty} E^{2k+1} = E^* \qquad (10)$$

つまり，E^*は E と同じ形の行列として収束し，

$$E^* = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{評価基準} & \text{代替案} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{評価基準} \\ \text{代替案} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & W^* \\ M^* & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (11)$$

となるのである．

つづいて，ANP の例を示す．本稿では高橋[10)]の例を引用する．評価基準の重みである W を，

$$W = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

とする．また M を

$$M = \begin{bmatrix} 1/6 & 3/5 \\ 1/3 & 3/10 \\ 1/2 & 1/10 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

とする．以上から E は

$$E = \begin{bmatrix} 0 & W \\ M & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.8 \\ 1/6 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

となる．（14）式の E の無限列は収束して（15）式となる．

$$E^* = \begin{bmatrix} 0 & W^* \\ M^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.439 & 0.439 & 0.439 \\ 0 & 0 & 0.561 & 0.561 & 0.561 \\ 0.41 & 0.41 & 0 & 0 & 0 \\ 0.315 & 0.315 & 0 & 0 & 0 \\ 0.275 & 0.275 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

そして，その結果，代替案 1（0.41）＞代替案 2（0.315）＞代替案 3（0.275）と導出される．

４．重み一斉法[8)9)12)13)]の概要

本章では重み一斉法について説明する．重み一斉法の解説の前に，まず，支配型 AHP[3)4)]について説明する．支配型あるいは支配代替案の支配とはあるひとつの代替案に着目し，その代替案を基準（ベンチマークとも呼ぶ）に評価基準の評価を行うことを意味する．本章では，代替案 1 と代替案 2 が支配代替案である場合について説明する．さて，代替案 1 からみた重みベクトル，代替案 2 からみた重みベクトルを

$$W = \left(W^1, W^2\right) = \begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^{1} & b_{\mathrm{II}}^{2} \\ b_{\mathrm{II}}^{1} & b_{\mathrm{II}}^{2} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

とする．

さらに代替案の評価値を M とし，評価単価比マトリックス M_n を次のように定義する．

$$M=\begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$M_i=M\cdot\begin{bmatrix} 1/a_{i\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & 1/a_{i\mathrm{II}} \end{bmatrix}=M\cdot A_i^{-1} \tag{18}$$

ただし，$A_i=\begin{bmatrix} a_{i\,\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{i\,\mathrm{II}} \end{bmatrix}$，$i$=1，2，3 とする．

このとき，代替案 1 から代替案 2 への導出については，重みベクトルの導出は，W^1 から $M_2A_1^{-1}W^1$ となり，評価単価比マトリックスの導出は MA_1^{-1} から MA_2^{-1} となる．

一方，支配代替案 2 から支配代替案 1 への導出も同様にして求めることができる．

重みベクトルの導出は W^2 から $M_1A_2^{-1}W^2$ となり，評価単価比マトリックスの導出は MA_2^{-1} から MA_1^{-1} となる．

ここで，重みベクトル W^1 と重みベクトルの導出値 $M_1A_2^{-1}W^2$ に「ずれ(ギャップ)」が生じる場合を考える．重みベクトル W^2 と重みベクトルの導出値 $M_2A_1^{-1}W^1$ との「ずれ」も同様である．つまり，代替案ごとの視点によって評価基準の重みが異なるということを意味している．このような評価基準の重みの異なりが生じない場合は，「支配代替案間の互換性」と呼ばれる理想的な推移状態である．しかし，現実には互換性が保たれることは稀で，評価基準の重みの異なりが生じることが多い．そこで，このような「ずれ」を調整する方法を，木下・中西は「一斉法」，つまり重み一斉法として提案しているのである．

さて，続いて，重み一斉法について説明する．重み一斉法は複数の支配代替案が存在する意思決定状況である．すべてが支配代替案であるとは，すなわち，代替案ごとにすべての評価基準の重みが異なるということである．

ここで，支配代替案 1 からみた重みベクトルの調整値 W^1 は，最初に与えられる支配代替案 1 からの重み導出値 W^{11}，支配代替案 2 からの重み導出値 W^{12}，支配代替案 3 からの重み導出値 W^{13} の平均値とする．すると，

$$W^1=\frac{1}{3}\left\{W^{11}+W^{12}+W^{13}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{M_1A_1^{-1}W^1}{e^TM_1A_1^{-1}W^1}+\frac{M_1A_2^{-1}W^2}{e^TM_1A_2^{-1}W^2}+\frac{M_1A_3^{-1}W^3}{e^TM_1A_3^{-1}W^3}\right\} \tag{19}$$

となる．同様にして，支配代替案 2，3 からみた重みベクトル調整値 W^2，W^3 はそれぞれ次のようになる．

$$W^2=\frac{1}{3}\left\{W^{21}+W^{22}+W^{23}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{M_2A_1^{-1}W^1}{e^TM_2A_1^{-1}W^1}+\frac{M_2A_2^{-1}W^2}{e^TM_2A_2^{-1}W^2}+\frac{M_2A_3^{-1}W^3}{e^TM_2A_3^{-1}W^3}\right\} \tag{20}$$

$$W^3=\frac{1}{3}\left\{W^{31}+W^{32}+W^{33}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{M_3A_1^{-1}W^1}{e^TM_3A_1^{-1}W^1}+\frac{M_3A_2^{-1}W^2}{e^TM_3A_2^{-1}W^2}+\frac{M_3A_3^{-1}b^{W3}}{e^TM_3A_3^{-1}W^3}\right\} \tag{21}$$

さらに，新しい重みベクトル W^n（n=1，2，3）と古い重みベクトル W^n との間に「ずれ(ギャップ)」がなくなり，評価基準の重みが収束するまでこの手順を繰り返すことになる．そして，最終的に，評価単価比マトリックス M_n と収束した評価基準の重み W^n の積 $E=M_n\cdot W^n$ によって得られた評価値を正規化したものを総合評価値として得るのである．以上が重み一斉法である．

つづいて，重み一斉法の例を示す．ANP の例と同様の値と同様の例 [10]を用いる．各代替案からみた評価基準の重みと代替案の評価値を，

$$W=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$M=\begin{bmatrix} 1/6 & 3/5 \\ 1/3 & 3/10 \\ 1/2 & 1/10 \end{bmatrix} \tag{23}$$

とすると，その重み一斉法が収束するまでの過程を表すと表―2 のようになる．

その結果，代替案からみた評価基準の重みの収束値は，

$$W=\left(W^1,W^2,W^3\right)=\begin{bmatrix} 0.178 & 0.465 & 0.796 \\ 0.822 & 0.535 & 0.204 \end{bmatrix} \tag{24}$$

となる．

したがって，評価単価比マトリックス M_n と収束した評価基準の重み b^n の積による評価値は代替案 1，代替案 2，代替案 3 それぞれ，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1/2 \\ 3 & 1/6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.178 \\ 0.822 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.767 \\ 0.671 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3/2 & 1/3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.465 \\ 0.535 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.3025 \\ 1 \\ 0.8725 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 6 \\ 2/3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.796 \\ 0.204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4893 \\ 1.1427 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

となる．そして，上記 3 つの評価値は，正規化すると，すべて

$$E = \begin{bmatrix} 0.410 \\ 0.314 \\ 0.276 \end{bmatrix} \tag{28}$$

となり唯一の総合評価値として得られるのである．

表－２　重み一斉法の例

評価単価比マトリックス M_n

M_1	Ⅰ	Ⅱ
1	1	1
2	2	1/2
3	3	1/6

M_2	Ⅰ	Ⅱ
1	1/2	2
2	1	1
3	3/2	1/3

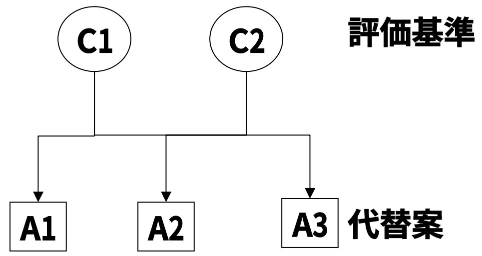
M_3	Ⅰ	Ⅱ
1	1/3	6
2	2/3	3
3	1	1

重み一斉法の収束過程

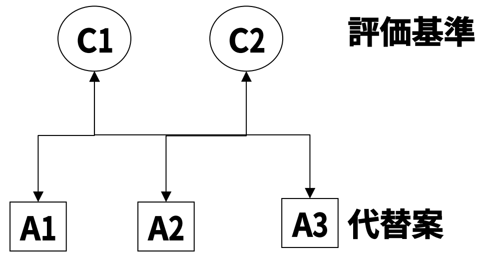
	1		2		3	
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
①	0.4	0.6	0.7	0.3	0.2	0.8
			0.727	0.273	0.923	0.077
	0.363	0.632			0.913	0.087
	0.014	0.986	0.053	0.947		
②	0.261	0.739	0.493	0.507	0.679	0.321
			0.585	0.145	0.864	0.136
	0.196	0.804			0.814	0.136
	0.105	0.895	0.319	0.681		
③	0.187	0.813	0.466	0.534	0.784	0.214
			0.479	0.521	0.806	0.194
	0.179	0.821			0.794	0.194
	0.169	0.831	0.449	0.551		
④	0.178	0.822	0.465	0.535	0.796	0.204

５．評価基準の重みの視点

2章において従来型AHP，3章においてANP，4章において重み一斉法について解説した．従来型のAHPからANP，重み一斉法へと発展してきたが，総合目的，評価基準，代替案の構造は変化していない．ただし，その評価の方向に違い生じているのである．従来型AHPの評価基準と代替案の相互関係をANPと重み一斉法の評価基準と代替案の相互関係をそれぞれ図―2，図―3に示す．



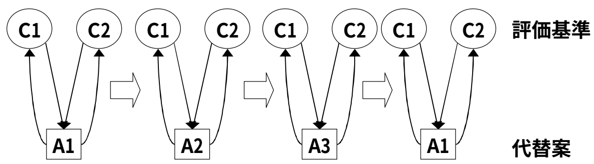
図－２　従来型AHPの評価基準と代替案



図－３　ANPと重み一斉法の評価基準と代替案

つまり，従来型AHPにおいて代替案は常に評価基準のみから評価をされ，一方向的な流れになっている．

一方，ANPと重み一斉法は代替案からの評価基準への視点を持つため，両者は相互に影響をし合っている．さて，評価基準への視点を考慮するときにANP，重み一斉法はともに評価基準における重みの修正の演算を同時に行っている．しかし，実際の意思決定場面では何かひとつの代替案を最初の基準にし，その後他の代替案を評価していくプロセスも存在すると考えられる．この，評価基準の重みを順に次々と収束をさせていく過程を重み順次法の概念とする（図－４参照）．



図－４　重み順次法の評価基準と代替案

つまり，まず代替案1の評価基準の重みから，代替案2の評価基準の導出を行い，代替案2から代替案3の評価基準の導出，そして代替案3から再び代替案1の評価基準の導出を行うプロセスをたどる．

６．重み順次法 [15)]

本章では重み順次法について説明する．まず，重み順次法の一般式[15)] について説明する．評価基準（Ⅰ，Ⅱ），代替案（X，Y，Z）とする．代替案の評価値M，代替案

ごとの評価基準の重みW^1，A_iを次のように定義する．

$$M=\begin{bmatrix} a_{X\mathrm{I}} & a_{X\mathrm{II}} \\ a_{Y\mathrm{I}} & a_{Y\mathrm{II}} \\ a_{Z\mathrm{I}} & a_{Z\mathrm{II}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$W^1=\left(W_X{}^1, W_Y{}^1, W_Z{}^1\right) \tag{30}$$

$$A_i=\begin{bmatrix} a_{i\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{i\mathrm{II}} \end{bmatrix} \tag{31}$$

最初に与えられた代替案の評価値と各代替案の重みのずれを修正する演算を行う．

代替案Xの評価基準から代替案Yの評価基準の導出：

$$\frac{1}{2}\left(W_Y{}^1+\frac{A_Y A_X{}^{-1} W_X{}^1}{e^T A_Y A_X{}^{-1} W_X{}^1}\right)=W_Y{}^2 \tag{32}$$

代替案Yの評価基準から代替案Zの評価基準の導出：

$$\frac{1}{2}\left(W_Z{}^1+\frac{A_Z A_Y{}^{-1} W_Y{}^2}{e^T A_Z A_Y{}^{-1} W_Y{}^2}\right)=W_Z{}^2 \tag{33}$$

代替案Zの評価基準から代替案Xの評価基準の導出：

$$\frac{1}{2}\left(W_X{}^1+\frac{A_X A_Z{}^{-1} W_Z{}^2}{e^T A_X A_Z{}^{-1} W_Z{}^2}\right)=W_X{}^2 \tag{34}$$

まず，代替案Xから代替案Yの評価基準の重みを導出し，つづいて代替案Yから代替案Zの評価基準の重み，代替案Zから代替案Xの評価基準の重みを導出する．つまり，重み一斉法が評価基準の重みを一斉に導出するのに対し，重み順次法は評価基準の重みを順次導出していくのである．

さて，重み順次法が収束すると，すべての代替案X，Y，Zについて

$$W_i{}^{n+1}=W_i{}^n \tag{35}$$

となり，代替案ごとの評価基準の重みが得られる．そして，代替案ごとの評価値は

$$E=MA_i{}^{-1}W_i{}^n \tag{36}$$

として導出される．ただし，（36）式は各代替案の評価値を1とする評価値が代替案の数だけ出現するが，いずれも正規化することにより唯一の総合評価値が得られるのである．以上が重み順次法のアルゴリズムである．なお，重み順次法は代替案の順序性の視点を考慮したモデルである．そのため，導出の過程において代替案の順序により評価値に違いが生じる，つまり，最初にどの代替案のから評価基準の重みを導出するかにより結果に違いが生じるのである．ただし，評価値に若干の違いが生じるが代替案の選定順位逆転などの深刻な問題は発生しない．

順序性を考慮したAHPのモデルはこれまでにないため，たとえば土木計画の場面において，時間が経過することによりプロジェクトが変化したり，追加されたりする際に有効である．

つづいて，重み順次法の例を示す．前章までに示したANP，ならびに重み一斉法と同様の値を用いる．すなわち，代替案ごとの評価基準の重み，代替案の評価値は次のようになる．

$$W=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$M=\begin{bmatrix} 1/6 & 3/5 \\ 1/3 & 3/10 \\ 1/2 & 1/10 \end{bmatrix} \tag{38}$$

代替案Xから代替案Y，代替案Yから代替案Z，代替案Zから代替案Xの順次で導出した結果を表―3に示す．

表－３　重み順次法の収束過程

X Ⅰ	X Ⅱ		Y Ⅰ	Y Ⅱ		Z Ⅰ	Z Ⅱ
0.4	0.6		0.7	0.3		0.2	0.8
		1 →	0.727	0.273			
			0.714	0.287			
					1 →	0.918	0.082
						0.559	0.441
0.066	0.934	← 1					
0.233	0.767						
		2 →	0.549	0.451			
			0.631	0.369			
					2 →	0.885	0.115
						0.722	0.278
0.126	0.874	← 2					
0.180	0.821						
		3 →	0.467	0.533			
			0.549	0.451			
					3 →	0.846	0.154
						0.784	0.216
0.168	0.832	← 3					
0.174	0.826						
		4 →	0.457	0.543			
			0.503	0.497			
					4 →	0.820	0.180
						0.802	0.198
0.184	0.816	← 4					
0.179	0.821						
		5 →	0.466	0.534			
			0.485	0.516			
					5 →	0.809	0.191
						0.806	0.195
0.187	0.813	← 5					
0.183	0.817						
		6 →	0.473	0.527			
			0.479	0.521			
					6 →	0.806	0.195
						0.806	0.195
0.187	0.813	← 6					
0.185	0.815						

その結果，代替案X，Y，Zの評価基準の重みは収束

し，それぞれ$W_X{}^n = \begin{pmatrix} 0.186 \\ 0.814 \end{pmatrix}$，$W_Y{}^n = \begin{pmatrix} 0.478 \\ 0.522 \end{pmatrix}$，

$W_Z{}^n = \begin{pmatrix} 0.805 \\ 0.195 \end{pmatrix}$となり，代替案の各総合評価値はそれぞれ,

$$E_X = MA_X{}^{-1} W_X{}^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.779 \\ 0.694 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$E_Y = MA_Y{}^{-1} W_Y{}^n = \begin{bmatrix} 1.283 \\ 1 \\ 0.891 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$E_X = MA_X{}^{-1} W_X{}^n = \begin{bmatrix} 1.438 \\ 1.122 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

そして，正規化し唯一の総合評価値として

$$E_{XYZ} = \begin{bmatrix} 0.404 \\ 0.315 \\ 0.281 \end{bmatrix} \tag{42}$$

が導出される．この値は，ANP や重み一斉法と近い値であるが若干異なっている．

ところで，重み順次法で導出される最終的な評価値はこれだけではない．なぜなら，重み順次法は，評価基準の重み導出の過程で代替案の順序を考慮している．そのため，代替案が多くなればなるほど，得られ総合評価値の総数は増加する．この例の場合，ほかに XZY，YXZ，YZX，ZXY，ZYX の順に導出されるパターンが存在する．これら 5 種類の総合評価値の結果は次のようになる．

$$E_{XZY} = \begin{bmatrix} 0.416 \\ 0.314 \\ 0.27 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$E_{YXZ} = \begin{bmatrix} 0.416 \\ 0.314 \\ 0.27 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$E_{YZX} = \begin{bmatrix} 0.407 \\ 0.315 \\ 0.278 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$E_{ZXY} = \begin{bmatrix} 0.448 \\ 0.312 \\ 0.24 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$E_{ZYX} = \begin{bmatrix} 0.446 \\ 0.31 \\ 0.224 \end{bmatrix} \tag{47}$$

特に，代替案 Z を最初の基準に導出を行った場合，最終的な総合評価値は代替案 X を始点とした評価値や代替案 Y を始点とした評価値と比較すると，異なっている．ただし，いずれの場合においても総合評価値における代替案の優先順位は変動しておらずいずれも代替案 X＞代替案 Y＞代替案 Z となっている．

この，代替案の視点の順序を考慮することにより，結果に違いが生じる点が ANP や重み一斉法と異なり，重み順次法の持つ意味が大きい．また，その順序性に関しての是非は今後の課題としたい．

7．おわりに

本稿では，AHP における発展モデルとして重み順次法を提案した．AHP においては，総合目的，評価基準，代替案を階層構造として構築し，問題の解決を図る．従来の AHP では評価基準の重みにずれは存在せず，唯一であった．代替案ごとの視点を考慮したモデルとして ANP，重み一斉法が提案されている．本稿では，ANP，重み一斉法の説明をし，重み順次法との違いを示した．つまり，これまでの既存手法の発展モデルでは評価基準の重みにずれやギャップが生じる事を考慮しても，意思決定のための演算の中では差別的には扱っていなかった．重み順次法は評価基準における重みのずれの修正を代替案ごとの順序という視点を考慮して行ったものである．すなわち，まずある代替案の評価基準に着目し，続いて別の代替案の評価基準との修正を図る手法である．そして，これを繰り返し最終的に修正する手法である．そのため，土木計画の場面において，目的の計画・実施に時間的に変化があり，プロジェクトの変更や追加が時系列ごとに変化する場合に貢献できると考えられる．ただし，全体しての評価の順位には変動が無いものの，評価基準の重み導出の順序により評価値に違いが若干生じるため，その点を今後の研究課題としたい．本稿が，今後ますます適用されるであろう AHP の発展に寄与できれば幸いである．

謝辞

本稿の作成にあたり，名古屋大学田地宏一先生に大変お世話になりました．田地先生に深く感謝します．

参考文献

1) 刀根薫：「ゲーム感覚意思決定法」，日科技連，1986.
2) 刀根薫，真鍋龍太郎：「AHP 事例集」，日科技連，1990.
3) 木下栄蔵：「AHP 手法と応用技術」，総合技術センター，1993.
4) 木下栄蔵：「孫子の兵法の数学モデル」，講談社，1998.
5) 木下栄蔵：「孫子の兵法の数学モデル実践篇」，講談社，1998.
6) 木下栄蔵：「入門 AHP」，日科技連，2000.
7) 木下栄蔵編著：「AHP の理論と実際」，日科技連，2000
8) 木下栄蔵，中西昌武：“AHP における新しい視点の提案”，土木学会論文集，No．569/4-36，pp.1-8，1997.
9) 木下栄蔵，中西昌武：“支配代替案法における追加データの処理手法「一斉法」の提案”，土木学会論文集 No．611/IV-42，pp.13-19，1999.
10) 高橋磐郎：“Saaty 型 Supermatrix 法と木下・中西型一斉法の比較”，第 40 回日本 OR 学会シンポジウム，pp5-8, 1998.
11) 高橋磐郎：“連載講座　AHP から ANP への諸問題Ⅰ～Ⅵ”，「オペレーションズ・リサーチ」，1 月～6 月号，1998.
12) 木下栄蔵：“連載講座　AHP の世界”，「オペレーションズ・リサーチ」，8 月～12 月号，2003.
13) E.Kinoshita，K.Sekitani，J.SHI：Mathematical Properties of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method, Journal of Operations Research Society of Japan，Vol.45, No2，pp198-213，2002.
14) 杉浦伸，木下栄蔵：評価値一斉法の提案，土木計画学研究・論文集Vol.21，pp.33-40，2004.
15) 木下，田地，杉浦：重み順次法の提案，OR学会2004年度秋季研究発表会，pp158-159.

AHPにおける重み順次法の提案*

杉浦伸**・木下栄蔵***

本論文では，重み順次法を提案する．
AHPを利用する際に，評価基準の重みが代替案ごとにずれが生じることがあり，それを修正することが必要不可欠である．そうした，評価基準の重みのずれを修正し意思決定を導く手法として，ANPや重み一斉法が提案されている．本稿では，これら既存の手法と重み順次法の違いを示し，その有効性を述べる．

A Proposal of Weight Order Method on AHP *

By Shin SUGIURA** • Eizo KINOSHITA***

This paper proposes Weight Order Method on AHP.
As using AHP, There can be the gap of criteria with each alternative view and it is necessary to modify the gap. Already A NP and Weight CCM (Concurrent Convergence Method) were proposed such method.
This paper shows difference of between Weight Order Method and old method and show availability of Weight Order Metho d.
