進化ゲーム論的アプローチに基づく混雑料金問題*

Formulation Study of Congestion Pricing Problem Based on Evolutionary Game Approach *

木下隆介**・羽藤英二***

By Ryusuke KINOSHITA**・Eiji HATO***

１．研究の目的

ETCの普及に伴い，混雑料金施策の効果的な運用が求められている．料金計画を考える上で，静的なアプローチと動的なアプローチが存在する．動的なアプローチはwithin-dayとday-to-dayの2つの枠組みで考えられる．本研究では，様々な混雑料金施策導入時のday-to-dayの行動調整過程に着目したアプローチを整理し，従来の利用者均衡理論との比較を行い，ゲーム進化論による混雑料金定式化の特徴を明らかにすることを目的としている．

2. 進化ゲーム論的アプローチの考え方.

進化ゲーム論的アプローチは，広義には UE や Nash 均衡を包含する理論として位置づけられる．料金施策に対するプレイヤー（ドライバー）の day-to-day の行動調整過程をポテンシャル関数を用いて理論的に記述できる．以下に基本的な理論的枠組みについて整理を行う．

2.1 連続的プレイヤー集合のゲーム

経路iを選択することにより得られる利得関数をF_iとする．計画配分交通量xは，全プレイヤーが，他者の行動の積み重ねにより与えられた自分達の利得を最大にする戦略を選択した場合，以下のNash均衡を成す．

$$F_i(x) = \max_{j \in S^r} F_j(x) \quad i \in S^r, \quad x_i > 0 \quad (1)$$

ここで，

S^r　：ODペアr内の利用可能な経路集合

x_i　：ODペアr内の経路i交通量

2.2　混雑ゲーム

リンクϕの交通量$u_\phi(x)$は，リンクを利用する経路集合$\rho(\phi)$を用いて以下の式(2)で表すことができる．

$$u_\phi(x) = \sum_{i \in \rho(\phi)} x_i \qquad (2)$$

コスト関数c_ϕは非負で微分可能であり単調増加であることを仮定し，利用経路iのコスト$C_i(x)$を，経路内のリンクコストの総計として式(3)で表す．

$$C_i(x) = \sum_{\phi \in \Phi_i} c_\phi(u_\phi(x)) \qquad (3)$$

ここで，

Φ_i　：経路i内の利用リンク集合

混雑ゲームを定義するために，料金計画に対する利得関数を明確にする必要がある．ここでは，利得を経路コストの負値であるとして，式(4)で設定する．

$$F_i(x) = -C_i(x) \qquad (4)$$

a)　進化論的ダイナミクス

Nash均衡では対戦相手の意図を理解しているプレイヤーが必要となり，プレイヤー数が膨大になるにつれその制約条件は強くなる．ただし，ゲームが繰り返し行われ，プレイヤーが現況利益を改善する戦略に切り替える場合，この仮説を避けることができる．

進化論的ダイナミクスはベクトル領域Vで表現され，計画配分空間において運動方程式$\dot{x} = V(x)$と定義される．Vが以下の5つの状態を満たすならば，ゲームFを考慮してVを許容できる．

V　：リプシッツ連続　(5-1)

$V_i(x) \geq 0$　whenever　$x_i = 0$　(5-2)

$\sum_{i \in S^r} V_i(x) = 0$　for all　$x \in X$　and　$r \in R$　(5-3)

$V(x) \cdot F(x) > 0$　whenever　$V(x) = \vec{0}$　(5-4)

$V(x) = \vec{0}$ はxがFの均衡であることを含む　(5-5)

最初の三つの条件は，領域X内の唯一解曲線の存在を保証する必要条件である．残りの二つの条件は，ダイナミクスとゲームの利得を関連づけている．条件（5-4）は増加率と利得の間に正の相関性を示している．条

*キーワード：

**学生員、工修、愛媛大学大学院環境建設工学専攻
（愛媛県松山市文京町３、
Tel 089-927-9843、E-mail kinoshita@eh.cee.ehime-u.ac.jp）
***正員、工博、愛媛大学工学部
（愛媛県松山市文京町３、
Tel 089-927-9830、E-mail hato@eng.ehime-u.ac.jp）

件（5-5）は非自己満足と呼び，行動が均衡でないとき，計画を切り替えるプレイヤーが存在することを意味する．

2.3　ポテンシャルゲーム

もし，以下の式を満足するような関数 f が存在する場合，連続的プレイヤーのゲーム F をポテンシャルゲームと呼び， f をそのポテンシャル関数と呼ぶ．

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad for\ all\ x \in X,\ i \in S \tag{6}$$

つまり，どのプレイヤーも共通の目的関数 f を最大にするように行動をすると考える．もしポテンシャル関数を認めるならば，ポテンシャルを最大にする行動はゲームのNash均衡であり，進化論的ダイナミクスを特徴付けることができる．

補助定理

I. F をポテンシャルゲームとし，V は F を考慮した許容ダイナミクスとする．すると V の全解曲線は， F のNash均衡と関連した集合の一点に集まる．
II. F のポテンシャル関数 f は完全凹と仮定して，ベクトル m を固定する．すると，集合 X_m 上の f の極大値は X_m 内における F の一意的なNash均衡であり， X_m 内における V の全曲線下でグローバルなアトラクターである．

ゲームがポテンシャル関数を許容するならば，全許容ダイナミクスの全解曲線は結合したNash均衡集合に収束する．ポテンシャル関数が完全凹ならば，均衡は一意に決まり，大域的に安定する．

ポテンシャルと正相関の定義は，許容ダイナミクス V の解曲線 $\{x_t\}_{t\geq 0}$ は以下を満たさなければならない．

$$\frac{d}{dt} f(x_t) = \nabla f(x_t) \cdot \dot{x}_t = F(x_t) \cdot V(x_t) \geq 0 \tag{7}$$

すなわち，行動調整過程は常にポテンシャルを増加させなければならない．ポテンシャルの局所的な極大は調整不足であることを示しており，Nash均衡であるといえる．ポテンシャル関数が完全凹ならば，有益調整はゲームの唯一均衡である一意的極大をもたらさなければならない．

2.4　非弾性需要下における進化的実装

計画者は，ある料金施策に対してプレイヤーが効率的行動を学習することに期待したい．ただしそれは，（計画者にとって）需要情報がないまま行われる必要がある．プレイヤーの行動が匿名であるため，各プレイヤーの行動そのものを見分けることができないといった問題がある．このため，最適な料金計画を通して，彼らの選択行動をコントロールする必要がある．料金計画を P とし，その成分 P_i は経路 i に課す料金と定義する．料金計画の導入により，計画者は以下の利得を持つ新しいゲームを定義できる．

$$\hat{F}_i = F_i(x) - P_i(x) = -C_i(x) - P_i(x) \tag{8}$$

計画者は，需要ベクトル m に関わらず，新しい利得 $\hat{F}$ を考慮した短期的調整過程が，最初の利得 F を考慮したまま，より最適な行動に至らせるようなスキームを前提に料金計画を選択する必要がある．

この概念をより精密に表現するために，各需要ベクトル m に対して計画配分需要 $\sigma(m) \in X_m$ を特定する写像となるような，社会的選択関数 σ を定義する．増加ゲーム $\hat{F}$ を考慮した許容ダイナミクス V の下，各需要ベクトル m に対して，もし配分 $\sigma(m)$ がグローバルに安定していれば，料金計画 P は社会選択関数 σ を広域的に実装する．効率的な状態を広域的に実装する料金計画の導入により，需要もしくは初期行動によらず，妥当な料金計画の中で選択行動を変更するプレイヤーの母集団が最適行動を学ぶ．

もし料金計画 P が社会選択関数 σ をグローバルに実装するならば，各需要ベクトル m に対して計画配分 $\sigma(m)$ は許容ダイナミクス X_m 内の一意的な静止点であり，それ故にそれはゲームの唯一な Nash 均衡である．原理上，経路 i に対する料金 $P_i(x)$ はプレイヤーの匿名性を妨害しない全計画配分 x に依存している．しかし， x は各完全経路を選択するプレイヤー数を計上しているので，全計画配分の奇跡を保持することは厳しい問題である．それ故に，関数 p_ϕ に対して，以下に示すような料金を必要とする．

$$P_i(x) = \sum_{\phi \in \Phi} p_\phi(u_\phi(x)) \tag{9}$$

ここで，

p_ϕ　：リンク ϕ の料金

この分離可能な料金計画の下で，各経路 i の総料金 P_i は，経路に沿った各リンク上の料金 p_ϕ の合計として表現される．これは，ドライバーの完全経路を認知する必要性をなくしながら，移動者が各リンクを使用する際に課金されることになる．

2.5　非弾性需要下における混雑料金

次式の利得関数総計 $\overline{F}$ で，効率性を定義する．

$$\overline{F}(x) = \sum_{i \in S} x_i F_i(x) = -\sum_{i \in S} x_i C_i(x) \tag{10}$$

社会計画者は，以下で定義される効率的な社会選択関数

x^* を実装する料金計画を選択したいと考える．

$$x^*(m) \in \arg\max_{x \in X_m} \overline{F}(x) \tag{11}$$

料金計画は，式（8）で示した遅れコストと通行料金を足し合わせた利得を持つ新しいゲームを作り出す．もしその計画が，利得総計に比例したポテンシャル関数を許容した新しいゲーム手法の中で選択されたならば，新しい利益を考慮した短絡的調整が常に効率的行動へつながることを示すために，補助定理を用いることができる．

新しいゲームを利得総計に比例したポテンシャル関数 $\hat{f}$ に適応する．

$$\hat{f}(x) \equiv \kappa \overline{F}(x) \quad for\ some\ \kappa > 0 \tag{12}$$

この上で，可分料金計画を用いてこの新しいゲームを作り出すが，そのような計画が存在するかどうかを決定付けるために，式（12）を微分し，次式を得る．

$$\hat{F}_i(x) = \kappa \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{F}(x) \tag{13}$$

$\kappa = 1$ のとき，式（13）は行動選択からの個人総利得は，その行動の限界社会利得と等しく設定させることを意味している．それ故，導き出した料金計画は限界費用料金で形成されることになる．より一般的に個人利得は限界社会利得に比例する集合である．

これより，料金計画を解決することができる．

$$\begin{aligned}
P_i(x) &= F_i(x) - \hat{F}_i(x) \\
&= F_i(x) - \kappa \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{F}(x) \\
&= F_i(x) - \kappa \left(F_i(x) + \sum_{j \in S} x_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \right) \\
&= \kappa \left(\sum_{j \in S} x_j \frac{\partial C_j}{\partial x_i}(x) \right) + (\kappa - 1) C_i(x) \\
&= \kappa \left(\sum_{j \in S} x_j \left(\sum_{\phi \in \Phi_i \cap \Phi_j} c'_\phi(u_\phi(x)) \right) \right) + (\kappa - 1) \left(\sum_{\phi \in \Phi} c_\phi(u_\phi(x)) \right) \\
&= \kappa \sum_{\phi \in \Phi} u_\phi(x) \cdot c'_\phi(u_\phi(x)) + (\kappa - 1) \sum_{\phi \in \Phi_i} c_\phi(u_\phi(x)) \\
&= \sum_{\phi \in \Phi_i} (\kappa u_\phi(x) \cdot c'_\phi(u_\phi(x)) + (\kappa - 1) c_\phi(u_\phi(x)))
\end{aligned} \tag{14}$$

利得総計に比例しているポテンシャル関数を持つゲームを作り出すために，社会計画者は使用される個々のリンク ϕ に対して料金を設定することのみが必要であり，各リンク料金はそのリンクを選択したドライバーの数のみに依存する．

$\overline{\eta} = 1/\kappa - 1 > -1$ と設定することにより，以下のように可変料金計画を定義する．

$$P_i^{\overline{\eta}}(x) = \sum_{\phi \in \Phi_i} p_\phi^{\overline{\eta}}(u_\phi(x)) \tag{15}$$

ここで，リンク料金 $p_\phi^{\overline{\eta}}$ は以下のように与えられる．

$$p_\phi^{\overline{\eta}} = \frac{1}{\overline{\eta} + 1} \left(uc'_\phi(u) - \overline{\eta} c_\phi(u) \right) \tag{16}$$

料金計画をより簡単に解釈するために，リンク ϕ のコスト弾力性となる次式を定義する．

$$\eta_\phi(u) = \frac{uc'_\phi(u)}{c_\phi(u)} \tag{17}$$

そして，$c_\phi(u) > 0$ のとき，リンク料金を以下のようにして表現することができる．

$$p_\phi^{\overline{\eta}}(u) = \frac{c_\phi(u)}{\overline{\eta} + 1} (\eta_\phi(u) - \overline{\eta}) \tag{18}$$

$\overline{\eta}$ を弾性限界と呼び，あるリンクのコスト弾力性が $\overline{\eta}$ であるとすると，そのリンクの料金は0へとなる．

新しいゲームのポテンシャル関数は利得総計に比例しているので，それはコスト関数 c_ϕ の状態に関係なく，利得総計を最大にする配分は局所的安定なNash均衡であることを示している．

可変料金計画用いることで，計画者は結局，効率的配分方法 $x^*(m)$ が実行されることを確立している．この発生した状態に収束した後でさえ，計画者はまだ隠れた行動問題に直面しており，効率的行動を持続させるためにも料金制度を続けなければならない．各 $\overline{\eta} > -1$ に対して，固定料金計画 $\Pi^{\overline{\eta},m}$ を以下のように定義する．

$$\Pi_i^{\overline{\eta},m} = \sum_{\phi \in \Phi_i} \pi_\phi^{\overline{\eta},m} \tag{19}$$

ここで，

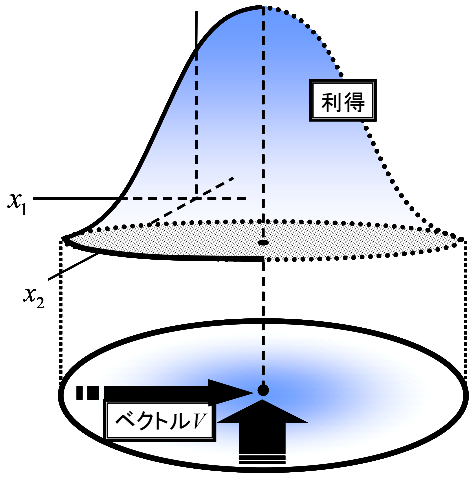
$$\pi_\phi^{\overline{\eta},m} = p_\phi^{\overline{\eta}}(u_\phi(x^*(m)))$$

固定料金計画 $\Pi^{\overline{\eta},m}$ の下で計画者は常に，効率的状態 $x^*(m)$ での可変料金計画 $P^{\overline{\eta}}$ によって決められる料金を設定する．この計画を用いることにより計画者は，プレイヤーは自分たちの行動に衝撃を受けた後，効率的状態に戻るだろうということを確立している．

３．均衡解との整合性

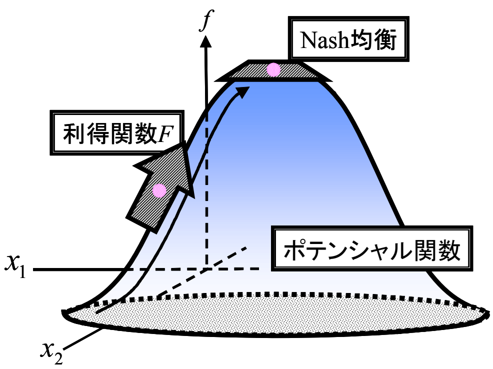
（１）　進化論的実装のアプローチ

進化論的ダイナミクスでは，ベクトル領域 V をリプシッツ連続であると仮定している．すなわち，x の変位量に対するベクトルの傾きは，発散せずに制約を受けることとなる．また条件（5-4）より x の増加は利得の増加を意味する．これらにより，進化論的ダイナミクスは**図－１**のように利得を最大にする頂点を目指すこととなる．



図－１　利得曲線

ポテンシャルゲームにおいては，ポテンシャル関数をシステム最適（SO：System Optimum）とし，プレイヤーの利得に料金を課してゲームを行うこととなる．進化論的ダイナミクスV を許容し，式（6）の条件を満たすのならば，図－２の矢印の方向に沿って均衡解が求められる．



図－２　ポテンシャルゲーム

4. まとめ

本研究では，進化論的ゲーム理論に基づいて day-to-day の調整過程を考慮した混雑料金問題の定式化について整理を行った．今後は，従来型の均衡配分モデルとの比較を行い，進化ゲーム論的アプローチの配分モデルの基本特性を明らかにしていく予定である．