

# 空間統計モデルのフロンティア<sup>1</sup>

塚井 誠人<sup>2</sup>

## 1. はじめに

土木計画学の政策分析モデルは、都市や地域などの空間上で展開される公共政策の分析ツールとして開発されている。多くの研究者や実務者によって、費用便益分析や交通行動分析、交通量均衡配分法などの政策分析モデルが開発され、実用に耐えるレベルにまで改良が進められてきた。これらの手法は均衡理論や効用最大化理論を背景として、数理最適化や最適制御理論等の数理的手法を用いて、距離やネットワーク、アクセシビリティによって抽象化した空間を取り込んだ構造モデルの最適解を求める方法をとる。

一方で空間すなわち地理情報に基づく統計モデル(以下、空間統計モデル)による分析は、空間相互作用モデルや土地利用モデル、ヘドニックアプローチ等、土木計画学ではごく一部で行われているに過ぎない。その理由は、従来は空間データの入手や取り扱いが容易ではなかったことに加えて、空間統計モデルの理論フレームである空間統計学が主としてパラメータ推計や仮説検定の理論であって、単独では政策分析に資する構造モデルを提供できないため、内容が明確な冒頭のモデルよりも不完全な分析手法であるとの印象を与えてきたことが原因と思われる。確かに、これまでに地学や鉱物学、農学などの自然科学の分野で開発されてきた空間統計学の手法<sup>1)</sup>は、空間共分散構造を推定して空間依存の程度を評価するコバリオグラム分析<sup>2)</sup>や、空間依存の情報に基づいて欠測データを補完する Kriging 法などの記述的手法が多い<sup>3)</sup>。空間統計モデルが「構造無き記述モデル」に留まる限り、常に政策分析を課せられる計画技術者の目を引かなかったのは当然かも知れない。

しかし自前の構造モデルを持たないからと言って、空間統計モデルの可能性を否定するのは早計である。たとえば都市経済学や空間経済学の分野では、都市や地域に関する理論的研究が蓄積されており<sup>4)</sup>、数多くの仮説がデータによる検証を待っている。我々は、都市

や地域に対する仮説と実際の空間データによって、初めて現実の都市や地域の状態をモニタリングすることができる。このような課題に対して、空間統計モデルの役割は決して小さくはない。

本稿では、空間計量経済学や空間統計学の分野を中心とした空間統計モデルに関する近年の研究成果を紹介し、併せてその問題点を明らかにする。なお本論において「空間」とは「2次元平面」を指す。また全ての考察は離散点の空間統計モデルを対象にしている。

## 2. 空間データの相互依存性

空間上の事物や現象は、互いの距離が近いほど強く影響し合う。Toblar はこれを地理学の第一法則と呼び、最も単純で普遍的な原則と考えた<sup>5)</sup>。空間データは独立ではなく相互依存するという性質は、データをハンドリングする際に留意すべき重要な性質である。

本章では、空間依存性が生じる理由とモデル化に関する研究を紹介して、空間統計モデルの必要性を示す。

### (1) 異なる地点間の相互依存性

社会科学や経済学の分野において、空間上の異なる地点の事物(または現象)の間に相互依存性が生じるメカニズムが、これまでいくつか提案されている。Manski は、財の消費量に空間的な相互依存性が生じるメカニズムを、近隣の地域コミュニティが相互に類似した行動をとることによってバンドワゴン効果が生じるためと指摘した<sup>6)</sup>。空間的なバンドワゴン効果は、公共財の供給量に関しても生じることが Bivand and Szymanski によって報告されている<sup>7)</sup>。さらに住民が地域コミュニティを選択する「足による投票」が顕在化すると、所得水準や教育水準が局所的に類似した地域が形成されて空間的な分化が起こる可能性がある<sup>8)</sup>。

Brueckner は、空間的な相互依存は各地域の選択の外部性に起因することを簡単なモデルによって示した<sup>9)</sup>。地域  $i$  の目的関数を  $U_i = U(y_i, y_{-i}; x_i)$  と定義する。ただし  $y_i$  は地域  $i$  の財、 $y_{-i}$  は地域  $i$  を除く全ての地域の財、 $x_i$  は地域  $i$  の外生的な条件を表わす。目的関数の最大化によって、財  $y_i$  に関して以下の最適反

<sup>1</sup>Key words: 空間統計モデル, 空間依存性, 時空間統計モデル

<sup>2</sup>立命館大学理工学部, 草津市野路東1-1-1

e-mail: mtukai@se.ritsumei.ac.jp

応関数  $R_i$  が得られる .

$$y_i = R(y_{-i}; x_i) \quad (1)$$

$R$  を線形関数として特定化すると、式(1)は空間的なスピルオーバー効果を表現する構造モデルとなる<sup>10)</sup> .

$$y_i = \sum_{j, j \neq i} \rho w_{ij}^a y_j + \sum_u \beta_u x_{iu} \quad (2)$$

ここで  $w_{ij}^a$  は空間的な相互依存の程度を表わす空間重みづけ係数(後述)、 $\rho, \beta_u$  はパラメータである . あるいは地域  $i$  で利用する資源を  $s_i$  として、産出  $y_i$  に関する目的関数を  $U_i = U(y_i, s_i; x_i)$  と定義することもできる . 資源と産出の間に、空間的な外部性を認めると、産出  $y_i$  に必要な資源  $s_i$  は次のように表わされる .

$$s_i = H(y_i, y_{-i}; x_i) \quad (3)$$

式(3)を目的関数に代入して最大化すると、式(1)のスピルオーバーモデルに帰着する . なお資源  $s_i$  の総量に上限  $Q$  がある場合、地域  $i$  の資源と産出の間に正常な関係  $\partial s_i / \partial y_i = \partial H_i / \partial y_i > 0$ 、および  $\partial y_i / \partial s_i = \partial R_i / \partial s_i > 0$  が成立していれば、 $s_i = Q - s_{-i}$  より、負の空間依存(競合効果とも呼ばれる)が現れる .

$$\frac{\partial s_i}{\partial y_{-i}} = \frac{\partial(Q - s_{-i})}{\partial y_{-i}} = -\frac{\partial s_{-i}}{\partial y_{-i}} < 0$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial y_{-i}} = \frac{\partial R_i}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial y_{-i}} < 0$$

目的関数や資源に外部性を仮定して得られる反応関数は空間的な相互依存を示すという上記の考察は、そのまま反応がタイムラグを伴って起こる場合に拡張できる . すなわち反応関数を線形として特定化すると、スピルオーバー効果が時間的、空間的に波及する構造モデルが得られる .

## (2) 記述様式による相互依存性

地理学者の Harvey は、空間データの記述様式に関する考察に基づいて、記述様式の相互依存性と統計的推測の問題を指摘した<sup>11)</sup> . 以下に、Harvey の考察の概略を、統計モデルでの含意と共に紹介する . なお後の Harvey は、都市において所得格差のある層が空間的に分化しつつ集塊する問題に対して、社会主義的な立場から都市問題を捉えた研究を行っており、統計的な問題に継続的に取り組んだわけではない<sup>12)</sup> .

空間データの統計的分析は、都市や地域に存在する分析対象を母集団と見なして、それを構成する個人や

施設などの個々の事物の特性を表現する「個体化」から始まる . このとき同一の事物に対して、位置に関わりなく非空間属性を表現できる実質言語と、非空間属性に関わりなく位置を表現できる空間言語の2種類の記述様式が存在する . これは今日の GIS のデータ格納方式が、属性情報と位置情報に分かれていることから容易に理解できる<sup>13)</sup> .

2種類の様式で記述された事物に関して集計を行うとき、すなわち2種類の記述様式で表現される事物の集合に共通する特徴(同質性)を見出そうとすると「混同」の問題が起こる . 例えばある都市の家計支出額を集計したところ、「若年層の外食費が多い」という結果が得られたとしよう . しかしこの傾向は、実は「若年層は外食しやすい地区に多く居住している(魅力的なレストランが多いなど)」という傾向と、どちらが本質的であるか区別しにくい . この問題の解決が困難な理由は、属性に関する同質性は常に空間的な同質性、すなわち近接性によっても説明できる可能性があり、また適切な追加データが得られない限り、同質性(実質言語)は近接性(空間言語)の代理変数である可能性や、その逆の可能性が否定できないためである .

空間上の事物について、統計モデルを用いて統計的有意性の検証を行う場合にも同様の問題が起こる . たとえば空間データの回帰分析では、内生変数  $r$  と、実質言語  $q$  と空間言語  $s$  によって記述される外生変数の関係を表わすパラメータを推計し、統計的有意性を検定する . このとき分析者は、1) 事物を観測した特性を記述する実質言語と空間言語の相関が高いという重共線性の問題、2) 空間言語が非観測の実質言語の代理変数としてはたらく除外変数の問題という2種類の危険にさらされている . よく知られているように、後者は誤差項の特定化の誤りによって統計的推測に深刻な影響を及ぼす<sup>14)</sup> . しかし、実質言語と空間言語によって記述された事物の特性に基づいて除外変数の可能性を予見することは困難である . なお同様の問題は内生変数を空間言語とした場合にも発生する .

## (3) 空間統計モデルの必要性

Brueckner は、自地点の財の需要量の決定に別の地点の需要量が影響するという外部性が空間的な相互依存性を産み出すことを指摘し、この問題がスピルオーバー効果を含む構造方程式に従うことを示した . 公共

財の需要 / 供給問題では、空間的な外部性が及ぶ例は頻りに現れるため、空間統計モデルの適用範囲は広いと考えられる<sup>15)</sup>。

Harvey は、空間の事物は非空間属性（実質言語）と空間属性（空間言語）の 2 種類の記述形式が存在し、かつそれ以外に記述する方法がないことによって、集計分析をはじめとする統計的推測の解釈の混同が起こる可能性を指摘した。この指摘は、2 種類の記述形式を扱うことのできる空間統計モデルを用いて統計的有意性を検証する意義を示すと同時に、実証分析では適切な空間依存構造の同定問題をはじめとする仮説検定を繰り返し行うことによって、属性と位置情報に関する統計的有意性の検証を繰り返す必要があることを示している。

### 3. 空間データのハンドリング

本章では空間統計モデルの前提となる空間確率過程の発生メカニズム（DGP : Data Generation Process）定常性と空間重み付け行列  $W$  について概説する。さらに、空間データのハンドリング上の難問である可変単位地区問題を紹介する。

#### (1) DGP と定常性

Spanos はデータに統計モデルを適用するとき、構造方程式に誤差項を付加するだけの計量経済モデルの方法を批判し、DGP と整合的な構造方程式を用いる経験的計量経済学を主張した<sup>16)</sup>。DGP が統計的な定常性を満たすときは、正規分布理論や尤度関数に基づくパラメータ推計、仮説検定、モデル選択、予測を行うことができる。本節では、空間確率過程の発生メカニズムと定常性について考察する。

統計モデルでは、通常の観測データ  $y_i$  を観測要因と非観測要因の両方に支配される確率事象の実現系列とみなしている。変数  $x_i$  と構造パラメータを  $\beta$  によるシステムティックな変動を  $f(x_i, \beta)$  と表現すれば、 $y_i$  の DGP は非観測要因の DGP に対応する。 $x_i$  と  $y_i$  をそれぞれ外生変数と内生変数、構造方程式を  $y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i$  としよう。ただし  $\varepsilon_i$  はサンプル  $i$  の非観測要因（観測誤差）を表わす。このとき、データが同一の母集団  $M$  からランダムに繰り返してサンプリングされるなら、サンプル間の共分散  $\gamma_{ij} = 0$  を仮定できる。したがって

非観測要因は、平均 0 と分散  $\sigma^2$ 、 $\gamma_{ij} = 0$  の正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従う。

時系列データは、確率事象の時間的な系列である。時点  $t$  における観測  $y_t$  と、 $t+1$  における観測  $y_{t+1}$  が、それぞれ母集団  $M_t, M_{t+1}$  から抽出された唯一の標本とすれば、それぞれの母集団の確率分布の特性を知ることとはできない。そこで時系列分析では  $\dots, M_t, M_{t+1}, \dots$  の間に先験的な構造を導入して、DGP を識別する<sup>17)</sup>。誤差の期待値を  $E[\mu(t)] = const.$ 、共分散の期待値  $V[\gamma(t, t+k)]$  を時点の差  $k = t - (t - k)$  のみに依存するように  $V[\gamma(t, t+k)] = V(k)$  と構造化すれば、弱定常性を仮定することになる。弱定常性を満たす 1 次の移動平均誤差過程の場合、 $\varepsilon_t = \varepsilon_i + \theta\varepsilon_{t-1}$ （ただし  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$ ）から、共分散は  $\gamma(k) = \theta^k \sigma^2$  となる。強定常性は同時確率分布  $F(\dots, y_t, y_{t+1}, \dots)$  が時点  $t$  と独立となる場合である。なお正規分布では、DGP が弱定常性を満たせば同時に強定常性も満たす。

空間（クロスセクション）データは、特定の時点に観測される確率事象の空間的な系列である。地点ごとに異なる母集団  $M_s$  を想定すると、得られる観測  $y_s$  は各母集団について 1 サンプルのみなので、それらの情報に基づいて母集団の確率分布の特性を知ることとはできない。したがって時系列過程と同様に、確率分布によって表現される地点ごとの DGP の間に、先験的な構造を導入しなければならない<sup>18)</sup>。これは次節に示す空間重み付け行列を用いることによって解決される。「地理学の第一法則」に基づいて、各地点の DGP を正規分布に従う共通誤差  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$  と、近接する地点の加重平均によって表現される誤差の和と構造化すれば、誤差過程は、 $\eta_i = \rho \sum_j w_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_i$  となる。ここで  $w_{ij} \geq 0, w_{ii} = 0$  は、誤差の構造を表現する空間重み付け行列  $W$  の要素、 $\rho$  は誤差の空間相関を表わすパラメータである。すなわち構造なしの状態では  $n \times n/2$  種類定義されていた誤差の共分散パラメータは、共通の誤差分散  $\sigma$  と、構造  $W$  を所与とする  $\rho$  の 2 つのパラメータによる表現に縮約されている。

空間データの DGP に関する定常性は、異なる 2 地点の確率変数の共分散に関して定義されている。空間データの弱定常性は「共分散は 2 地点の距離と方位」のみに依存するという性質である（異方性）。また強定常性は「共分散が 2 地点の距離」のみに依存する場合である<sup>19)</sup>。これは方位による違いがない等方性を意

味する．空間統計モデルに空間重み付け行列を用いると，強定常性（等方性）を仮定することになる．

## (2) 空間重み付け行列 $W$

観測データの相互依存性を考慮しなければならない統計データは，パネルデータや時系列データなど，空間データ以外にも多く存在する．Martin<sup>20)</sup> は，時系列分析の手法に基づいて，地点  $s_1, s_2, \dots, s_N$  を何らかの規則に従う順序に並べた上で， $s_i \rightarrow s_2$  のように，単一方向への影響しか認めないような系列として扱う分析を行った．しかし地点間の相互依存は，地点  $i \rightarrow j$  と地点  $j \rightarrow i$  の両方が存在するため，空間確率過程に時系列のような自然な「順序」を見出すことはできない．

空間重み付け行列は，時系列モデルにおける「順序」，すなわち地点間の相互依存性に関する分析者の先験情報を表わしている．空間統計モデルでは，空間依存はパラメータ  $\rho, \lambda$  と空間重み付け行列  $W$  によって決定される．すなわち  $W$  は空間依存の相対的な構造を決定する．適切な空間統計モデルを定式化するには，データの相互依存性を反映した空間重み付け行列を用いるべきである<sup>21)</sup>．以下に代表的な重み付け行列の設定法を述べる．

接続行列  $W_c$  は，ある地点  $i$  に隣接する地点  $j \subset s_i$  との間のみ空間的な依存関係があるとして，該当する  $w_{ij}$  を 1 とする（対角項  $w_{ii}$  と非隣接点は 0）．非隣接点との空間依存関係を表現するには，空間を等間隔の格子点 (lattice) とみなして，格子点  $i$  まわりの各点との距離を基準として接続を定義すれば良い．マンハッタン距離を用いると，地点  $i$  の近傍は全て整数の距離を持つため，接続行列を 2 次以上の近傍 (clique) に拡張できる．

空間重み付け行列  $W$  は，誤差の共分散構造に影響する<sup>22)</sup>．たとえば 1 次の近傍のみに空間依存を認める接続行列  $W_c$  を設定したときの誤差の共分散構造は，後述する SMA (空間移動平均誤差モデル) では 2 次までの近傍について  $E[\varepsilon_i \varepsilon_j] \neq 0$  となり，後述する SAR (空間自己回帰モデル) では 3 次以上の近傍についても  $E[\varepsilon_i \varepsilon_j] \neq 0$  となる．

距離行列  $W_d$  は地点  $ij$  間の距離を用いて  $w_{ij} = d_{ij}^\alpha$  または  $\exp(\alpha d_{ij})$  等のように設定する．パラメータ  $\alpha < 0$  は，地点間の特性  $z_{ij}$  の関数として推計することも可能だが，通常は外生的に与える．地点間の「距離」は，

物理的な近接や距離以外の尺度に基づいて定義することもできる．情報通信網が整備された現代では物理的な距離による  $W$  の定義が不適切な場合がある<sup>23)</sup>．社会機能行列  $W_f$  は，社会的または機能的な隔たりの尺度に基づいて定義された  $W$  である．たとえば，人口等の地点  $i, j$  の属性を，それぞれ  $z_i, z_j, \kappa$  をパラメータとすると， $W_f$  の要素は  $\kappa$  を外生パラメータとして  $w_{ij} = |z_i - z_j|^\kappa$  等のように設定される． $z_i, z_j$  の隔たりが小さい（等質な）地域間の相互依存が大きいという仮定は  $\kappa > 0$ ， $z_i, z_j$  の隔たりが大きな（異質な）地域間の相互依存が大きいという仮定は  $\kappa < 0$  となる．

なお  $W$  を空間統計モデルに用いる場合，距離を定義する尺度の影響を除いて異なる空間重み付け行列の間の比較を容易にするため，基準化が行われる．

$$w_{ij} = \frac{w_{ij}^p}{\sum_j w_{ij}^p} \quad \forall j \quad (4)$$

ここで  $w_{ij}^p$  は基準化以前の空間重み付け行列の要素である．この他にも基準化の方法はいくつか提案されている．なお  $W$  が誤差分散構造に影響するのと同様に，基準化の方法も誤差分散構造に影響する．空間重み付け行列の定義と基準化，およびパラメータ推計への影響は Tiefelsdorf らに詳しい<sup>24)</sup>．

## (3) 可変単位地区問題

可変単位地区問題は，ゾーンの大きさや形が集計や統計モデルの結果に影響する現象である．たとえば，ある現象について都道府県単位のデータにおいて見られる空間依存の強さは，市町村単位の空間依存の強さと同等か？という形で現れる．以下の議論から明らかのように，ある空間スケールで観測した空間依存の強さは，同じ領域であっても異なる空間スケールに移転することはできない．

空間依存性が空間スケール，すなわちメッシュやゾーン等の集計単位と独立でないことは，空間データの回帰分析では Ecological regression の問題として知られている．Openshaw は，Ecological regression を含む空間データの統計分析に共通する問題を可変単位地区問題 (Modifiable Area Unit Problem) と呼んだ<sup>25)</sup>．図 - 1 に構造方程式のパラメータが空間スケールに依存するような可変単位地区問題の例を示す<sup>26)</sup>．上段は  $3 \times 3 = 9$  地域から成る空間データの人口と店舗数である．中段はこのデータの  $y$  方向を集約して 3 地域デー

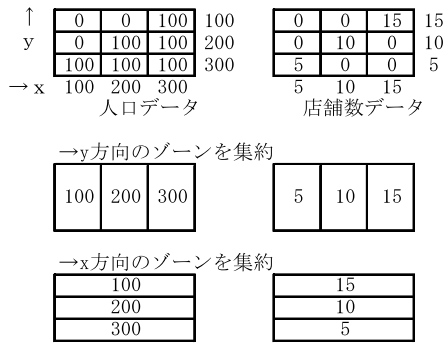


図 - 1 可変単位地区問題の例 (杉浦<sup>26)</sup>より抜粋)

タとした場合を、また下段は  $x$  方向を集約して 3 地域データとした場合である。これらの人口と店舗数の相関係数は、それぞれ 0.45, 1.00, -1.00 である。集計化ゾーンの設定によって、人口と店舗数の関係は全く異なる。

ゾーンサイズの観点からみれば、社会現象の空間データにおいて多く観測される正の空間依存は、空間データの集計単位が観測する現象の空間的な生起単位よりも小さい場合や、局所的に存在する条件の空間的な広がりよりも小さい場合等に見られる。後述するように、前者はスピルオーバー効果を定式化した SAR (空間自己回帰モデル) によって、後者は局地的な除外変数を誤差の空間依存として定式化した SMA (空間誤差移動平均誤差モデル) によって表現できる。

可変単位地区問題に関しては、いくつかのゾーンをまとめて空間的に集計した地域に通常の回帰モデルを適用すると、構造パラメータに見せかけの重共線性が生じたり<sup>27)</sup>、推計値の分散が大きくなることが知られている<sup>28)</sup>。Smith は、集計後の大ゾーンのデータから集計前の小ゾーンの空間依存パラメータを推計する問題を検討した<sup>29)</sup>。この研究では、集計後の大ゾーンのデータを用いて集計前の小ゾーンに関して定義した  $\rho$  の尤度関数は大域的に凸ではなく、シミュレーション分析によって真値のほかに別の値で極大値をとることを示して、尤度関数を修正する方法を提案した。また Giacomini and Granger は、ゾーンの集計前後でのモデルの予測精度を比較して、ゾーンの集計を行っても予測精度を保つことができる条件を明らかにした<sup>30)</sup>。

なお可変単位地区問題を空間確率過程の性質として捉えると、集計単位を粗くしていった場合の漸近分布や、細かくしていった場合の漸近分布 (infill asymp-

otics) を求める問題になるが、その一般的な性質は十分に解明されていない<sup>31)</sup>。

#### 4. 空間統計モデル

##### (1) 定式化

空間統計モデルは'73 年の Cliff and Ord の研究以降<sup>32)</sup>、空間計量経済学分野で Anselin を中心として、以下に示す一連のモデルが提案されている。代表的なモデルは、空間自己回帰モデル (SAR)、空間移動平均誤差モデル (SMA)、およびそれらが複合した空間自己回帰移動平均誤差モデル (SARMA) である<sup>33)</sup>。内生変数を  $y_i$ 、各地点の特性を表わす説明変数を  $x_{iu}$ 、誤差を  $\varepsilon_i$  とすると、SAR, SMA, SARMA はそれぞれ以下のように表される。

$$y_i = \sum_{j, j \neq i} \rho w_{ij}^a y_j + \sum_u \beta_u x_{iu} + \varepsilon_i \quad (5)$$

$$\begin{cases} y_i = \sum_u \beta_u x_{iu} + \eta_i \\ \eta_i = \sum_{j, j \neq i} \lambda w_{ij}^e \varepsilon_j + \varepsilon_i \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y_i = \sum_{j, j \neq i} \rho w_{ij}^a y_j + \sum_u \beta_u x_{iu} + \eta_i \\ \eta_i = \sum_{j, j \neq i} \lambda w_{ij}^e \varepsilon_j + \varepsilon_i \end{cases} \quad (7)$$

ここで  $\varepsilon_i$  は  $N(0, \sigma^2)$  に従う誤差項である。 $w_{ij}^a, w_{ij}^e$  は、それぞれ  $j$  地点の  $y_j$ 、および  $\eta_j$  が  $y_i$  に影響する重みを表わす係数  $\beta_k, \rho, \lambda$  はパラメータである。これらを地点  $i = 1, \dots, N$  を圧縮した  $N \times 1$  ベクトルで表記すると、以下ようになる。

$$Y = \rho W Y + X \beta + \varepsilon \quad (8)$$

$$\begin{cases} Y = X \beta + \eta \\ \eta = \lambda W \varepsilon + \varepsilon \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} Y = \rho W Y + X \beta + \eta \\ \eta = \lambda W \varepsilon + \varepsilon \end{cases} \quad (10)$$

このほかに、以下に示す自己回帰誤差モデルや、相互に独立な 2 つの誤差過程を含む複合誤差モデルも提案されている<sup>34)</sup>。

$$\eta = \lambda W \eta + \varepsilon \quad (11)$$

$$\eta = \lambda W \varphi + \varepsilon \quad (12)$$

これらのモデルの誤差項は次のような共分散構造を有している。ベクトル表示した SAR, SMA, SARMA,

自己回帰誤差モデル, 複合誤差モデルを変形すると, 以下の式 (13) - (17) が得られる.

$$Y = (I - \rho W)^{-1} X\beta + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon \quad (13)$$

$$Y = X\beta + (I + \lambda W)\varepsilon \quad (14)$$

$$Y = (I - \rho W)^{-1} X\beta + (I - \rho W)^{-1} (I + \lambda W)\varepsilon \quad (15)$$

$$Y = X\beta + (I - \lambda W)^{-1} \varepsilon \quad (16)$$

$$Y = X\beta + \lambda W\varphi + \varepsilon \quad (17)$$

$\sigma_\varepsilon^2$  を  $\varepsilon_i$  の分散,  $\sigma_\varphi^2$  を  $\varphi_i$  とすると, 各モデルの分散共分散行列はそれぞれ以下のようになる<sup>35)</sup>.

$$\begin{aligned} E[\varepsilon'_i \varepsilon_j] &= \sigma_\varepsilon^2 [(I - \rho W)' (I - \rho W)]^{-1} \\ E[\varepsilon'_i \varepsilon_j] &= \sigma_\varepsilon^2 (I + \lambda W)' (I + \lambda W) \\ E[\varepsilon'_i \varepsilon_j] &= \sigma_\varepsilon^2 (I + \lambda W)' [(I - \rho W)' (I - \rho W)]^{-1} \\ &\quad \cdot (I + \lambda W) \\ E[\varepsilon'_i \varepsilon_j] &= \sigma_\varepsilon^2 [(I - \lambda W)' (I - \lambda W)]^{-1} \\ E[\eta'_i \eta_j] &= \lambda^2 \sigma_\varphi^2 W' W + \sigma_\varepsilon^2 I \end{aligned}$$

したがって全てのモデルについて分散共分散行列の対角項の期待値は  $E[\varepsilon'_i \varepsilon_i] \neq const.$  であり, 構造的な分散異質性が存在する. このほか説明変数  $X$  に空間構造  $W$  を仮定した定式化  $Y = X\beta + \psi W X + \varepsilon$  も提案されているが, その共分散構造は  $\sigma_\varepsilon^2 I$  であるので, 通常の OLS が適用できる.

## (2) パラメータ推計

SAR などの空間統計モデルは, 誤差が独立ではないため OLS の仮定を満たさない. OLS で SAR を推定すると漸近一致性のない推定量に, また SMA を推定すると漸近有効性のない推定量になることが知られている<sup>36)37)</sup>. なお SAR については式 (13) の代わりに, 先験的に求めた  $\hat{\rho}$  の下で  $Y^* = (I - \hat{\rho} W)Y$  を求め,  $Y^* = X\beta + \varepsilon$  のパラメータ  $\beta$  を OLS によって推計する Spatial Filtering 法が提案されている<sup>38)</sup>. しかし  $\beta$  と  $\rho$  は独立ではないので, 先験的に適切な  $\rho$  を推計するのは容易ではない. Greene はモーメント法に基づくパラメータ推計手法を提案しているが, SMA ではパラメータを交互に代入して収束値を求める手順が必要である等の問題がある<sup>39)</sup>.

Anselin は, 最尤法によって空間統計モデルのパラメータを推計する方法を示した<sup>40)</sup>. 誤差項  $\varepsilon$  に正規分

布を仮定し,  $\Sigma$  を誤差  $\varepsilon$  の分散共分散行列,  $\xi = (\rho, \lambda, \beta)'$  をパラメータベクトルとすれば, これらの対数尤度関数は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi) &= (N/2) \log(2\pi) + (N/2) \log |\Sigma| \\ &\quad + (Y - X\beta)' \Sigma^{-1} (Y - X\beta) \end{aligned} \quad (18)$$

式 (18) は, パラメータ  $\xi$  を OLS ( $\varepsilon'$  の最小化) や GLS ( $\varepsilon' \Sigma^{-1} \varepsilon$  の最小化) によって推定すると, 第 2 項の誤差分散行列  $\log |\Sigma|$  が無視されることを示している.

最尤法によるパラメータ推計に Newton-Raphson 法などの尤度関数の勾配の情報を用いた探索法を用いると, 式 (18) の第 2 項をを繰り返し評価しなくてはならない. しかし地点数  $N$  が多い場合の固有値演算は計算負荷が大きいので, 以下の近似式が用いられる<sup>41)</sup>. なお  $(N/2) \log |\Sigma| = (N/2) (\log |I - \rho W| + \log \sigma^2)$  である. SAR の場合を以下に示す.

$$\log |I - \rho W| \simeq \sum_{i=1}^N \log(1 - \rho \omega_i) \quad (19)$$

ここで  $\omega_i$  は  $W^a$  の固有値である. 式 (19) によって, 最初に固有値  $\omega_i$  を求めておけば, 以後収束計算の過程において  $\rho$  が更新されても, 固有値の計算を繰り返すことなく  $\log |\Sigma|$  を評価することができる.

式 (19) の計算において, たとえば  $W$  が接続行列であれば, 地点数  $N$  が多い場合でも比較的疎な行列となるため, 効率的なアルゴリズムが提案されている<sup>42)</sup>. ただし地点数  $N$  が多い場合は計算負荷が非常に大きくなる. Pace and LeSage は, SAR や SMA に対して, 約 9 万点の大規模な空間データに対しても高速で式 (11) を評価する方法を示した<sup>43)</sup>. これは式 (19) を, 以下のような Chebishev の近似式によって評価する方法である.

$$\log |I - \rho W| \simeq \sum_{j=1}^{q+1} c_j(\rho) \text{tr}(T_{j-1} W) - \frac{1}{2} c_1(\rho) \quad (20)$$

ここで  $T_0(DW) = I$ ,  $T_1(W) = D$ ,  $T_2(W) = 2W^2 = I$ ,  $T_3(W) = 4W^3 - 3W$ ,  $T_4(W) = 8W^4 - 8W^2 + I$ ,  $q$  は打ち切り次数である.

$$\begin{aligned} c_j(\rho) &= \left( \frac{2}{q+1} \right) \\ &\times \sum_{k=1}^{q+1} \left( \ln \left[ 1 - \rho \cos \left( \frac{\pi(k-1/2)}{q+1} \right) \right] \right) \\ &\times \cos \left( \frac{\pi(j-1)(k-1/2)}{q+1} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Smilnov と Anselin は、SAR について特性多項式によって  $\log |\Sigma|$  を高速で精度良く近似する方法を示した<sup>44)</sup>。また空間重み付け行列に  $W^2, W^3, \dots$  等の高次項を含む SAR のパラメータを効率的に求める方法を示した<sup>45)</sup>。さらに Pace and Lesage は一般的な空間統計モデルについて、 $\log |I - \rho W|$  の上限  $\alpha_{min}$  と下限  $\alpha_{max}$  を求める方法を示した<sup>46)</sup>。この方法は、従来知られていた空間重み行列  $W$  の固有値  $\omega_{min}, \omega_{max}$  による区間よりも精度が良いため、異なる空間依存構造を持つモデルの検定を、簡便に行うために用いられる。

$$\begin{aligned} \log |I - \rho W| &\geq (\rho + \log(1 - \rho)) \text{tr}(W^2) = \alpha_{min} \geq \omega_{min} \\ \log |I - \rho W| &\leq -(1/2)\rho^2 \text{tr}(W^2) = \alpha_{max} \leq \omega_{max} \quad (22) \end{aligned}$$

最尤法以外のパラメータ推計法として、GMM (Generalized Moment Method) が提案されている<sup>47)</sup>。Kelejian and Robinson は、式 (10) の誤差項  $\eta$  を式 (12) としたモデルの解法として、次のような方法を示した<sup>48)</sup>。この方法は、説明変数  $X$  と、その部分列  $X^*$  から作成した操作変数  $H = (X, WX^*)$  は、誤差項  $\eta$  と直交する (無相関である) ことを利用している ( $E[H'\eta] = 0$ )。  $H'\eta$  の共分散行列は  $\Omega = n^{-2}H'\Xi_\eta H$  であるので、 $Z = (WY, X)$ ,  $Z = (WY, X)$  とすると、パラメータ  $\gamma' = (\rho, \beta)$  の GMM 推定量  $\hat{\gamma}_{GMM}$  は以下のように求められる。

$$\hat{\gamma}_{GMM} = (Z'\hat{D}Z)^{-1}Z'\hat{D}y \quad (23)$$

ただし  $\hat{D} = H(H'\Xi_\eta H)^{-1}H$  である。実際にパラメータ推計を行う場合は、以下の手順をとる。

1. 操作変数  $H$  を用いて、2 段階最小自乗法によってパラメータの仮の推定量  $\hat{\gamma}$  を求める。
2.  $\hat{\gamma}$  を用いて残差の推定量  $\hat{\eta}$  を求める。
3. 式 (18) より、誤差分散の推定量  $\sigma_\varphi^2, \sigma_\varepsilon^2$  を求める。
4. 再度  $\hat{\Xi}_\eta$  の推定量を求めて、式 (23) よりパラメータ  $\hat{\gamma}_{GMM}$  を求める。

Kelejian and Purcha は、式 (11) の自己回帰誤差モデルのパラメータ  $\lambda$  を、より簡便な GMM で推計した<sup>49)</sup>。 $\bar{\eta} = W\eta$ ,  $\bar{\eta} = W\eta$ ,  $\bar{\varepsilon} = W\varepsilon$  とする。 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

であるので、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E[n^{-1}\varepsilon'\varepsilon] &= \sigma_\varepsilon^2 \\ E[n^{-1}\varepsilon'\bar{\varepsilon}] &= \sigma_\varepsilon^2 n^{-1} \text{Tr}(W'W) \\ E[n^{-1}\varepsilon'\bar{\varepsilon}] &= 0 \end{aligned}$$

式 (11) より、 $\eta - \lambda\bar{\eta} = \varepsilon$ ,  $\bar{\eta} - \lambda\bar{\eta} = \bar{\varepsilon}$  であるので、これらの式を連立させると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2n^{-1}E(\eta'\bar{\eta}) & -n^{-1}E(\bar{\eta}'\bar{\eta}) & 1 \\ 2n^{-1}E(\bar{\eta}'\bar{\eta}) & -n^{-1}E(\bar{\eta}'\bar{\eta}) & n^{-1}\text{Tr}(W'W) \\ n^{-1}E(\eta'\bar{\eta} + \bar{\eta}'\bar{\eta}) & -n^{-1}E(\bar{\eta}'\bar{\eta}) & 0 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n^{-1}E[\varepsilon'\varepsilon] \\ n^{-1}E[\varepsilon'\bar{\varepsilon}] \\ n^{-1}E[\varepsilon'\varepsilon] \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$\varepsilon$  の推計値を最小自乗法によって求めれば、式 (24) は  $\lambda, \lambda^2, \sigma_\varepsilon^2$  に関する連立方程式に帰着するため、これらのパラメータは FGLS 等で求められる。次に得られた  $\lambda$  に基づいて、その他の説明変数に対応するパラメータ  $\beta$  を FGLS 等で推計することができる。

GMM 推定量は、最尤推定量と同様に漸近一致性と漸近有効性を持つ<sup>50)</sup>。空間統計モデルでの推計上の利点は、最尤法で必要であった  $\log |\Sigma|$  の評価を行うことなくパラメータ推計できるので、地点数  $N$  が大きい場合でも計算量が大きくならないことである。なお Kelejian らの GMM では空間依存パラメータ  $\lambda$  の信頼区間を直接求められないが、たとえば推計されたパラメータを尤度関数に代入して Wald 検定や LR 検定を行うことによって、間接的に  $\lambda$  の有意性を検定することができる。Kathleen and Bocksteal は GMM と最尤法のパラメータ推計結果を比較し、両者からほぼ同じ推計結果が得られることを確認した<sup>51)</sup>。

このほかに、Kelejian and Purcha は連立 SAR モデルを 2SGLS または 3SGLS によって推計する方法を提案している<sup>52)</sup>。また LeSage は Bayesian 法によるパラメータ推計手順を示している<sup>53)</sup>。

### (3) 空間依存の検出とモデル選択

空間依存の検出は、モデルの残差に空間依存が残っているかどうかを検定することによって、適切なモデルを選択するために行われる。しかし相互依存性を示す空間データは、ランダムサンプリングされた通常のデータよりも一つ一つのデータが持っている情報量が

少ないため、小標本下でも空間依存構造の検出力が高い検定統計量の開発が進められてきた。

よく用いられる空間依存の検定統計量に、OLS モデルの残差  $\varepsilon = Y - X\beta$  に基づく Moran's I がある。

$$I^m = \frac{N}{\sum_{i,j} w_{ij}} \left( \frac{\varepsilon' W \varepsilon}{\varepsilon' \varepsilon} \right) \quad (25)$$

Moran's I の期待値と分散は  $M = I - X(X'X)^{-1}X'$  とすると、以下のように求められる。

$$E[I^m] = \frac{\text{tr}(MW)}{n-k}$$

$$V[I^m] = \frac{\text{tr}(MWMW') + \text{tr}(MW)^2 + (\text{tr}(MW))^2}{(n-k)(n-k+2)} - (E[I^m])^2$$

ただし  $n$  は地点数、 $k$  はパラメータ数である。基準化された Moran's I:  $z(I^m) = (I^m - E[I^m])/V[I^m]$  は漸近的に正規分布  $N(0,1)$  に従い、帰無仮説  $H_0$  ( $W$  の下で空間依存がない) が棄却された場合、データに何らかの空間依存が含まれる可能性がある。Tiefelsdorf は、空間確率過程の小標本特性を考慮するために、 $W$  の特性方程式に基づいて Moran's I の正確な確率分布を求める方法を提案した<sup>19)</sup>。

Moran's I による検定の欠点は、 $H_0$  が棄却されても空間依存構造を特定化できないことである。そこで実際の分析では、尤度関数の情報を用いて、対立仮説に特定の空間依存構造を仮定した検定法が用いられる<sup>54)</sup>。特定の空間依存構造を仮定して得られるパラメータ推計値を  $\hat{\xi} = (\hat{\rho}, \hat{\beta})$ 、空間依存構造を仮定しない場合のパラメータ推計値を  $\hat{\xi}_0 = (\hat{\beta}; \rho = 0)$  とすると、Wald 検定の統計量は  $\mathcal{L}(\hat{\xi})$ 、LR 検定 (Likelihood Ratio) の統計量は  $\mathcal{L}(\hat{\xi}) - \mathcal{L}(\hat{\xi}_0)$  で与えられる<sup>40)</sup>。一方 LM 検定 (Lagrangean Multiplier, Rao の score 検定とも呼ばれる) の統計量は、 $d(\rho) = \partial \mathcal{L} / \partial \rho_i$ 、 $J(\rho) = \partial \partial \mathcal{L} / \partial \rho_i \partial \rho_j$  とすると、 $d' J^{-1} d$  を帰無仮説の下で評価した値で与えられるため、 $\hat{\xi}$  を推計することなく検定を行うことができる。SAR に対する LM 検定統計量を以下に示す。

$$LM_\rho = \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \hat{\varepsilon}_0' W y \right)^2 \left( T + \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} (W X \hat{\xi}_0)' M (W X \hat{\xi}_0) \right)^{-1} \quad (26)$$

ここで  $T = \text{tr} W W + \text{tr} W' W$  であり、 $\hat{\sigma}_0$ 、 $\hat{\varepsilon}_0$  はそれぞれ空間依存を仮定しない場合の分散、および残差の推計値である。よって  $\hat{\sigma}_0$ 、 $\hat{\varepsilon}_0$ 、 $\hat{\xi}_0$  は OLS で推計できる。

なお 3 種類の検定統計量はいずれも自由度  $k$  (空間依存のパラメータ数) の  $\chi^2(k)$  分布に従う。

Anselin らは SAR 過程と SMA 過程のパラメータ  $\rho$ 、 $\lambda$  について LM 検定に基づく検定法を開発し、それらが単独、または同時に存在する場合についての条件付きの帰無仮説に対応する検定統計量を示した<sup>55)</sup>。さらに Anselin は式 (12) の複合誤差過程に対する LR 検定統計量を示した<sup>56)</sup>。また Baltagi らは複合誤差過程を持つパネルデータの検定統計量を示した<sup>57)</sup>。Kelejian and Yuzefovich は独自の検定統計量を提案し、LM 検定を含む数種類の空間依存検定法の検出力をシミュレーション分析によって比較したところ、LM 検定が定式化の誤りに対して最も頑健な検定であると報告している<sup>58)</sup>。

このほかの検定法として、Pace and LeSage は、一般的な空間統計モデルについて conservative な検定結果を与える尤度比検定統計量の下限値を、簡便に評価する方法を示した<sup>59)</sup>。また Trivetz and Mur は、SAR 過程と SMA 過程を識別する non-nested 検定法として Wald 検定、King point 検定、最小残差二乗和基準を比較して、サンプル数が少ない時は、最小残差二乗和基準の検出力が最も高いと報告している<sup>60)</sup>。

多くの説明変数を含むモデルから、統計的有意性の高い説明変数を選択する場合、最も一般的なモデルからパラメータの検定を繰り返して有意水準の低い変数を削除していき、より単純なモデルに進む方法がとられる。これは Hendry の方法と呼ばれ、検定モデルの説明変数より多い変数が対立モデルに含まれる nested 型の検定法として用いられている。空間依存構造を同定するモデル選択に関して Florax らは、Hendry の方法と、単純なモデルから複雑なモデルに進む方法を比較して、Hendry の方法によってモデル選択を行うと適切なモデルに到達できない場合があることを示した<sup>61)</sup>。Saavedra は GMM によって空間相関を検出する手順を定式化して、シミュレーション分析を行った<sup>62)</sup>。

#### (4) 適用例

Can は地価データの空間依存を考慮したヘドニック関数を推計した<sup>63)</sup>。同様のヘドニック関数の推計は Brasington and Hite のほか<sup>64)</sup>、Benirschka and Binkley<sup>65)</sup> や Kim ら<sup>66)</sup> も行っている。Kim らは、アメリカ大統領選挙の投票行動について、地理的なクラスターを



抽出するために投票率関数を推計した<sup>67)</sup>。Chen and Conley は、貿易品の価格が国際的に均一化する傾向を SAR モデルによって検証した<sup>68)</sup>。Baikner は、アメリカの州の支出関数を推計して、スピルオーバー効果の実証を行った<sup>69)</sup>。同様の支出関数の推計は、イギリスを対象として Revelli も行っている<sup>70)</sup>。Overmas らはメッシュデータを用いて農地率を目的変数とした SAR を推定して、地理的なクラスターを抽出した<sup>71)</sup>。Fingleton は、独占的競争モデルに基づいて、工業生産性の伸びを SAR によって推計した<sup>72)</sup>。さらに'75 年から'95 年までの時系列パネルデータについて、プール期間を逐次延長しながら地域生産関数を推計して、生産の一次同次性に関する時系列的な構造変化の検定を行った<sup>73)</sup>。Aten は、輸出入品の価格が貿易によって均一化する傾向を検証するため、SAR モデルによって時系列的な検討を行った<sup>74)</sup>。Magarhaes らはブラジルの一人あたり所得について、 $\sigma$  収束（所得の分散が収束）と  $\beta$  収束（所得の伸び率が収束）の 2 種類の仮説の検証を目的に、所得関数を推計した<sup>75)</sup>。なおこの他の近年の適用例は Dietz が詳細にまとめている<sup>76)</sup>。

## 5. 時空間統計モデル

式(1)の反応関数において、反応にタイムラグがある場合の観測  $y_i$  は時空間的な依存性を示す。空間統計モデルを時系列モデルと統合した時空間統計モデルでは、例えばスピルオーバー効果のタイムラグを捉えられる分析ツールという意義を持つ。

時空間統計モデルの考え方は以前から提案されていたが、現象を記述するためのモデルとして用いられる場合が多く、政策分析への適用例は少なかった。しかし Elhorst が示した時空間 ECM モデルは、短期の不均衡、長期の均衡、スピルオーバー効果という時空間動学のエッセンスを簡潔に表現できる構造を持っており、政策分析への適用が期待される。本章では、時空間統計モデルを紹介する。

### (1) 空間統計モデルと時系列モデルの融合

時空間統計モデルは、まず先行して開発された時系列モデルの拡張として提案された。Pfeifer and Deutch, および Deutch and Pfeifer は、Bocks-Jenkins 法を応用した時系列モデルを定式化して、最尤法によるパラ

メータ推計法を提案した<sup>77)78)79)80)</sup>。 $Y_t$  を  $t$  時点における  $N$  地点の観測値で構成される  $N \times 1$  の行列とする。

$$\Phi_{P,\Lambda}(B^S)\phi_{p,\lambda}(B)\nabla_S^D\nabla^dY_t = \Theta_{Q,M}(B^S)\theta_{q,m}(B)\epsilon_t \quad (27)$$

$Y_t$  は、 $t$  時点における  $N$  地点の観測値で構成される  $N \times 1$  の行列である。また式(27)の各項は、次のように定義される。

$$\Phi_{P,\Lambda}(B^S) = I - \sum_{k=1}^P \sum_{l=0}^{\Lambda_k} \Phi_{kl} W_l B^{kS} \quad (28)$$

$$\phi_{p,\lambda}(B) = I - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} W_l B^k \quad (29)$$

$$\Theta_{Q,M}(B^S) = I - \sum_{k=1}^Q \sum_{l=0}^{M_k} \Theta_{kl} W_l B^{kS} \quad (30)$$

$$\theta_{q,m}(B) = I - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} W_l B^k \quad (31)$$

ここで  $\Phi_{kl}, \phi_{kl}$ : 時間ラグ  $k$  及び空間ラグ  $l$  における季節 / 非季節の自己回帰パラメータ,  $\Theta_{kl}, \theta_{kl}$ : 時間ラグ  $k$  及び空間ラグ  $l$  における季節 / 非季節の移動平均パラメータ,  $P, p$ : 季節 / 非季節の自己回帰オーダー,  $Q, q$ : 季節 / 非季節の移動平均オーダー,  $\Lambda_k, \lambda_k$ :  $k$  番目の自己回帰項における季節 / 非季節の空間オーダー,  $M_k, m_k$ :  $k$  番目の移動平均項における季節 / 非季節の空間オーダー,  $W_l$ :  $l$  番目の空間オーダーにおける  $N \times N$  の空間重み付け行列,  $D, d$ : それぞれ季節 / 非季節の差分回数,  $\nabla_S^D, \nabla^d$ : 季節 / 非季節の差分オペレータであり、季節ラグ  $S$  に対して  $\nabla_S^D = (I - B^S)^D$ ,  $\nabla^d = (I - B)^d$  である。また  $\epsilon_t$  は時点  $t$  における正規分布を取るランダム誤差項であり、以下の性質を持つ。 $E\{\epsilon_t\} = 0$ ,  $E\{\epsilon_t, \epsilon'_{t+s}\} = \sigma^2 I_N$  ( $S=0$  場合),  $= 0$ , ( $S \neq 0$  の場合),  $E\{Y_t, \epsilon'_{t+s}\} = 0$ , ( $S > 0$  の場合) である。式(27)は、 $(p_\lambda, d, q_m) \times (P_\Lambda, D, Q_M)_S$  次の季節乗法的時空間自己回帰和分移動平均モデル (Seasonal multiplicative STARIMA model) と呼ばれる。

STARIMA の適用例は少ない。道路ネットワークへの適用例として、断面交通量を内生変数とした Garrido の研究がある<sup>81)</sup>。このモデルは道路ネットワークの接続情報を  $W$  として用いており、時間ラグは  $k = 1$  である。つまり内生変数は接続する 1 時点前の別リンクから影響を受ける構造を仮定している。Epperson は、州間の移民数や環境質の変化に STARIMA を適用した

82)83) . この研究では STARIMA に時空間的な説明変数  $X_t$  を設定したり, 構造化情報  $W$  を用いない定式化にも言及している . また Niu は, AR 項を含まない STARIMA (STMA) の最尤推定量が漸近一致性と漸近効率性を有することを示し, 中心極限定理が成立する条件を検討した<sup>84)</sup> .

このほかのアプローチとして, 時空間データを多変量時系列と見なした VAR の適用が考えられる<sup>85)</sup> .  $N$  地点,  $T$  時点から成る時空間データに対して時間ラグ  $k$  の VAR を適用すると, 定数項を含む  $k \times N^2 + N$  個のパラメータを推定する必要があるが,  $N$  が大きな時空間データではパラメータ数が膨大となって自由度が不足する . これは次元の呪い (a curse of dimensions) と呼ばれる問題である . そこで VAR を時空間データに適用する場合は, 空間重み付け行列によってパラメータを制約してモデルの自由度を確保する方法が提案されているが, これは STARIMA に帰着する . なお空間重み付け行列による空間依存の制約 ( $w_{ij} = 0$ ) を確率的に設ける方法もあり, Bayesian VAR と呼ばれる<sup>86)</sup> . Bayesian VAR では, 離れた地点からの影響を表わすパラメータ  $\phi_{kl}, l \geq l_0$  の事前分布を  $E[\pi(\phi_{kl})] = 0$  とし事後確率  $f(Y_t|\phi_k)$  を最大化するパラメータ制約を求める .

空間統計モデルを時系列に拡張したモデルは, Elhorst によって提案されている<sup>87)</sup> . Elhorst が検討した Cross-sectional-STAR (以下 C-STAR) は AR 項のみで時間ラグは 1 次 ( $k = 1$ ) までしか考慮していないものの, スピルオーバー効果を含む時空間モデルとなっている .

$$Y_t = \tau Y_{t-1} + \rho_t W Y_t + \rho_{t-1} W Y_{t-1} + X_t \beta_t + X_{t-1} \beta_{t-1} + W X_t \beta_t^w + W X_{t-1} \beta_{t-1}^w + \varepsilon_t \quad (32)$$

Elhorst は誤差項  $\varepsilon_t$  および  $X_t \beta_t$  以外の各項が存在しない場合について, それぞれ尤度関数を示し, Hendry の方法 (式 (32) から出発して検定を繰り返して, 有意とならない変数を省いていく方法) によって, ヨーロッパ各国の失業率データを用いて, 実証分析を行った . なお C-STAR は, Niu らが気象データの空間依存構造を推定するために適用している<sup>88)</sup> . また Elhorst は, 誤差項に関する 1 次の空間依存と 1 次の系列相関を含む C-SMA について, 誤差過程が定常性を満たすような系列相関パラメータ  $\tau$  と空間依存パラメータ  $\rho_t$  の範囲は独立ではなく, 空間依存が大きいときは系列

表 - 1 STARIMA, C-STAR, SAR の変数

右辺の変数	STARIMA	C-STAR	SAR
$y_{-i,t-k}$	$k \geq 1$	$k \geq 0$	$k = 0$
$x_{i,t-k}$	×	$k \geq 0$	$k = 0$

相関が小さい (その逆も成立する) という条件の存在を指摘した<sup>89)</sup> .

表 - 1 に STARIMA と C-STAR, および SAR の右辺に含まれる変数の違いをまとめる . なお添字  $-i, t$  は時点  $t$  における地点  $i$  以外の地点を意味する .

## (2) 1 次の C-STAR と時空間 ECM

Elhorst は, 1 次の C-STAR から短期的な動学と長期の均衡関係を含む誤差修正モデル (ECM: Error Correction Model) を導いた<sup>87)</sup> . 以下に示すように, ECM は VAR のパラメータを再編することによって得られる . まず空間構造を持たない 1 次の VAR と, これに対応する ECM を示す .  $Y_t, X_t$  を時点  $t$  における観測ベクトルとすれば, 1 次の VAR は次のように定式化される .

$$Y_t = \tau Y_{t-1} + X_t \beta_t + X_{t-1} \beta_{t-1} + \varepsilon_t \quad (33)$$

式 (33) を ECM 形で表現すると, 式 (34) を得る . なお  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  である .

$$\Delta Y_t = \Delta X_t \beta_t - (1 - \tau) \delta_{t-1} + \varepsilon_t \quad (34)$$

$$\delta_{t-1} = Y_{t-1} - X_{t-1} \frac{\beta_t + \beta_{t-1}}{1 - \tau} \quad (35)$$

均衡状態では恒等式  $\Delta Y_t \equiv \Delta X_t \equiv 0$  が成り立つが, 短期的には不均衡になる場合もある . すなわち, 式 (34) の左辺及び右辺第 1 項は短期的な動学を表わす . 第 2 項は調整パラメータ  $0 < (1 - \tau) < 1$  と,  $t - 1$  時点における均衡方程式  $Y_{t-1} = X_{t-1} \frac{\beta_t + \beta_{t-1}}{1 - \tau}$  からの乖離量  $\delta_{t-1}$  の積である . 調整パラメータの符号条件より,  $\delta_{t-1} > 0$  ならば  $\Delta Y_t$  を減少させるような調整が起こる . したがって  $(\beta_t + \beta_{t-1}) / (1 - \tau)$  は  $Y_t$  と  $X_t$  の長期的な均衡関係を表わす . 以上の議論は, 式 (32) の 1 次の C-STAR に関しても成立する . 式 (34) との比較のため, 説明変数の空間依存を表わすパラメータについては  $\beta_t^w = \beta_{t-1}^w = 0$  とすれば, このときの C-STAR モデルは式 (36) となる .

$$Y_t = \tau Y_{t-1} + \rho_t W Y_t + \rho_{t-1} W Y_{t-1} + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (36)$$

さらに変形すると、式(37)のECMが得られる。

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= (I - \rho_t W)^{-1} \Delta X_t \beta_t \\ &\quad - (1 - \tau)(I - \rho_t W)^{-1} \delta_{t-1}^* + (I - \rho_t W)^{-1} \varepsilon_t \end{aligned} \quad (37)$$

$$\delta_{t-1}^* = Y_{t-1} - \frac{\rho_t + \rho_{t-1}}{1 - \tau} W Y_{t-1} - X_{t-1} \frac{\beta_t + \beta_{t-1}}{1 - \tau} \quad (38)$$

式(35)と式(38)を比較すると、 $Y_t$ と $X_t$ の長期的な均衡関係を表わすパラメータに、空間的な依存関係を表わすパラメータが含まれており、C-STARモデルが時空間ECMモデルとして表現されている。また式(38)において、 $\rho^* = (\rho_t + \rho_{t-1}) / (1 - \tau)$ 、 $\beta^* = (\beta_t + \beta_{t-1}) / (1 - \tau)$ と置換すれば、式(8)のSARが得られる。時空間依存を表わすパラメータ $\rho_{t-1}$ は空間的なスピルオーバー効果が時間遅れを伴って波及する強さを表わしており、それが大きいほど均衡状態の $\rho^*$ が大きくなることがわかる。

## 6. おわりに

本稿では空間統計モデルの研究動向と、時空間統計モデルへの展開について述べてきた。空間統計モデルが関係する研究は膨大で、ここで紹介できたのはそのほんの一部分に過ぎない。たとえば離散選択のMNPモデルの誤差項を構造化する方法として<sup>90)</sup>、効用関数の地点間の誤差構造に式(11)を仮定したモデルが提案されている<sup>91)</sup>。空間データの相互依存性を考慮した構造モデルについては、なお精査する必要がある。

今後は、従来研究が進められてきた効率的なパラメータ推計法に加えて、空間属性と非空間属性の因果性に関する仮説検定法の開発が必要である。このような仮説検定は、時空間データを必要とする。また時系列方向に十分な時空間データが得られる場合には、空間の構造変化の検定手法が必要である。

公共政策の効果が空間的あるいは時空間的に波及する現象は、ある地域に社会資本整備を行う理由としてしばしば挙げられてきたが、空間統計モデルによる事後的な検証は、これまであまり行われてこなかった。分析に必要な社会資本や社会経済統計などの空間データや時空間データの整備は、徐々に進んでいるので、適用例を蓄積しながら、政策分析に役立つ空間統計モデルの開発を進める必要がある。

理論物理学の発展が素粒子の観測と表裏一体であるように、都市や地域に関する理論も、空間や時空間の統計データを用いた実証研究と共に、相互に発展することを願っている。

## 謝辞

本論文を執筆するに当たり、京都大学大学院小林潔司教授、広島大学大学院奥村誠助教授から有益な唆を多く頂きました。記して感謝を表わします。

## 参考文献

- 1) Wackernagel, H. (地球統計学研究委員会訳): Geostatistics (邦題: 地球統計学), 森北出版, 2003.
- 2) De Cesare, L., Myers, L., and Posa, D.: Estimating and modelling space-time correlation structures, *Statistics and probability letters*, vol.51, pp.9-14, 2001.
- 3) 張良平: 空間データ分析, 古今書院, 2001.
- 4) 藤田昌久, ポール・クルグマン, アンソニー・ヴェナブルズ: 空間経済学, 東洋経済, 2000.
- 5) Tobler, W. R.: A computer movie simulating urban growth in the Detroit region, *Economic geography*, vol.46, pp.234-240, 1970.
- 6) Manski, C. F.: Economic analysis of social interactions, *Journal of economic perspective*, vol.14, pp.115-136, 2000.
- 7) Bivand, R., Szymanski, S.: Modelling the spatial impact of the introduction of compulsory competitive tendering, *Regional science & urban economics*, vol.30, pp.203-219, 2000.
- 8) 長峯純一: 公共選択と地方分権, 勁草書房, 2000
- 9) Brueckner, J. K.: Testing for social interactions among local governments, *Journal of urban economics*, vol.44, pp.438-467, 1998.
- 10) Keilbach, M.: Spatial Knowledge Spillovers and the Dynamics of Agglomeration and Regional Growth, *Physica-Verlag*, 2000.
- 11) Harvey, D. (竹内啓一, 松本正美訳): Social justice and the city (邦題: 都市と社会的不平等), 日本ブリタニカ, 1980.
- 12) 矢田俊文, 松原宏: 現代経済地理学, ミネルヴァ書房, 2000.
- 13) 地理情報標準委員会: 地理情報標準第2版 (JSGI2.0) の入門, 日本測量調査技術協会, 2002.
- 14) Maddala, G. S. (和合肇訳): Introduction to econometrics (邦題: 計量経済分析の方法, 第2版), シーエーピー出版, 1996.
- 15) Anselin, L.: Under the hood issues in the specification and interpretation of spatial regression models, *Agricultural economics*, vol.27, pp.247-267, 2002.

- 16) 蓑谷千鳳彦：計量経済学の理論と応用，日本評論社，1996.
- 17) 尾崎統，北川源四郎：時系列解析の方法，朝倉書店，2001.
- 18) Anselin, L., Rey, S. J. : Introduction to the spatial issues on spatial econometrics, *International regional science review*, vol.20(1), pp.1-8, 1997.
- 19) Tiefelsdorf, M. : Modelling spatial process, *Springer*, 2000.
- 20) Martin, R. : Some results on unilateral ARMA process, *Journal of statistical planning and inference*, vol.50, pp.395-411, 1996.
- 21) Geits, A., Aldstadt, J. : Constructing the spatial weight matrix using a local statistic, *Geographical analysis*, vol.36(2), pp.90-104, 2004
- 22) 堤盛人，清水英範，井出裕史：空間的自己相関を記述するための重み行列の構造が分析結果に及ぼす影響，土木計画学研究・論文集，No.17, pp.321-325, 2000.
- 23) 小林潔司，文世一，奥村誠，渡辺晴彦：知識社会と都市の発展，森北出版，1999.
- 24) Tiefelsdorf, M., Griffith, D., Boots, B. : A variance stabilizing scheme for spatial link matrices, *Environment and planning A*, vol.31, pp.165-180, 2000.
- 25) Openshaw, S. : The modifiable area unit problem, *Geobooks*, 1984.
- 26) 杉浦芳夫：地理空間分析，朝倉書店，2003.
- 27) Raymond, H., Amrhein, C. G. : Some effects of spatial aggregation on multivariate regression parameters, *Econometric advances in spatial modelling and methodology* (Griffith, D. A., Amrhein, C. G., Huriot, J., *Kluwer academic publishers*), Chap.8, pp.85-106, 1998.
- 28) Tagashira, Y., Okabe, A. : The modifiable areal unit problem in a regression model whose independent variable is a distance from a predetermined point, *Geographical analysis*, vol.34(1), pp.1-20, 2002.
- 29) Smith, T. : Aggregation bias in maximum likelihood estimation of spatial autoregressive process, *Spatial econometrics and spatial statistics* (Geits, A., Mur, J., and Zoller, H. G., *Palgrave Macmillan*), Chap.4, pp.53-88, 2004.
- 30) Giacomini, R., Granger, C. : Aggregation of space-time process, *Journal of econometrics*, vol.118, pp.7-26, 2004.
- 31) Cressie, N. : Statistics for spatial data (revised edition), *Wiley interscience*, 1993.
- 32) Cliff, A. D., Ord, J. K. : Spatial autocorrelation, *Pion*, 1973.
- 33) Anselin, L. : Spatial econometrics, *Companion to econometrics* (Baltagi, B. H., *Blackwell*), Chap.14, pp.311-330, 2000.
- 34) Anselin, L., Moreno, R. : Properties of tests for spatial error components, *Regional science and urban economics*, vol.33, pp.596-618, 2003.
- 35) Anselin, L., Bera, A. : Spatial dependence in linear regression models with an introduction to spatial econometrics, *Handbook of applied economic statistics* (Ullah, A., Giles, D., *Marcel Dekker*), pp.237-289, 1998.
- 36) Kelejian, H., Prucha, I. : 2SLS and OLS in a spatial autoregressive model with equal spatial weights, *Regional science and urban economics*, vol.32, pp.691-707, 2002.
- 37) Kelejian, H., Prucha, I. : Estimation on spatial regression models with autoregressive errors by two stage least squares procedures: a serious problem, *International regional science review*, vol.20(1), pp.103-113, 1997.
- 38) Geits, A., Griffith, D. A. : Comparative spatial filtering in regression analysis, *Geographical analysis*, vol.34(2), pp.130-140, 2002.
- 39) Greene, H. H. : Econometric Analysis, *McMillan*, 1991.
- 40) Anselin, L. : Spatial econometrics: methods and models, *Kluwer academic publishers*, 1988.
- 41) Cressie, N., Kolnack, J. : Spatial statistics in the presence of location error with an application to remote sensing of the environment, *Statistical science*, vol.18(4), pp.436-456, 2003.
- 42) Pace, R., Barry, R. : Quick computation of spatial autoregressive estimators, *Geographical analysis*, vol.29(3), pp.232-247, 1997.
- 43) Pace, R., LeSage, J. P. : Chebyshev approximation of log-determinants of spatial weight matrices, *Computational Statistics & Data Analysis*, vol.45(2), pp.179-196, 2004.
- 44) Smilnov, O., Anselin, L. : Fast maximum likelihood estimation of very large spatial autoregressive models: a characteristic polynomial approach, *Computational statistics & data analysis*, vol.35, pp.301-319, 2001.
- 45) Anselin, L., Smilnov, O. : Efficient algorithms for constructing proper higher order spatial lag operators, *Journal of regional science*, vol.36(1), pp.67-89, 1996.
- 46) Pace, R. K., LeSage, J. P. : Semiparametric maximum likelihood estimates of spatial dependence, *Geographical analysis*, vol.34(1), pp.76-90, 2002.
- 47) Conley, T. G. : GMM estimation with cross sectional dependence, *Journal of econometrics*, vol.92(1), pp.1-45, 1999.
- 48) Kelejian H. H., Robinson, D. P. : A suggested method of estimation for spatial interdependent models with autocorrelated errors, and an application to county expenditure model, *Papers in regional science*, vol.72, pp.297-312, 1993.

- 49) Kelejian, H.H., Prucha, I.: A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model , *International economic review* , vol.40(2), pp.509-533, 1999.
- 50) Hall, R. A. : Generalized method of moments , *Companion to econometrics (Baltagi, Blackwell)* , Chap.14 , pp.230-255, 2000.
- 51) Kathleen, P. B., Bocksteal, N. E. : Applying the generalized-moments estimation approach to spatial problems involving microlevel data , *The review of econometrics and statistics* , vol.82(1), pp.72-82, 2000.
- 52) Kelejian, H., Prucha, I. : Estimation of simultaneous systems of spatially interrelated cross sectional equations , *Journal of econometrics* , vol.118 , pp.27-50, 2004.
- 53) LeSage, J. P. : Bayesian estimation of spatial autoregressive models, *International regional science review*, vol.20(1), pp.113-131, 1997.
- 54) Anselin, L., Kelejian, H. : Testing for spatial error autocorrelation in the presence of endogeneous regressors, *International regional science review*, vol.20(1), pp.153-182, 1997.
- 55) Anselin, L., Bera, A., Florax, R., and Yoon, M. : Simple diagnostic tests for spatial dependence , *Regional Science and Urban Economics* , vol.26(1), pp.77-104, 1996.
- 56) Anselin, L. : Rao's score test in spatial process , *Journal of statistical planning and inference* , vol.97 , pp.113-139 , 2001.
- 57) Baltagi, B.H., Song S., and Koh, W. : Testing panel data regression models with spatial error correlation , *Journal of econometrics* , vol.117 , pp.123-150, 2003.
- 58) Kelejian, H. H., Yuzefovich, Y. : Properties of tests for spatial error components: A further analysis , *Spatial econometrics and spatial statics (Geits, A., Mur, J., and Zoller, H. G., Palgrave Macmillan)* , Chap.7 , pp.135-149 , 2004.
- 59) Pace, R. K., LeSage, L. P. : Likelihood dominance spatial inference , *Geographical analysis* , vol.35(2) , pp.133-147 , 2003.
- 60) Trivez, F.J., Mur, J. : Some proposals for discriminating between spatial processes , *Spatial econometrics and spatial statics (Geits, A., Mur, J., and Zoller, H. G., Palgrave Macmillan)* , Chap.8 , pp.150-175, 2004.
- 61) Florax, R., Folmer H., and Ray S. : Specification searches in spatial econometrics: the relevance of Hendry's methodology , *Regional science and urban economics* , vol.33, pp.557-579, 2003.
- 62) Saavedra, L. : Tests for spatial lag dependence based on the method of moments estimation, *Regional science and urban economics* , vol.33, pp.27-58, 2003.
- 63) Can, A. : Specification and estimation of hedonic housing price models , *Regional science and urban economics* , vol.22, pp.453-474, 1992.
- 64) Brasington, D., Hite, D. : Demand for environmental quality , *Regional science and urban economics* , Article in press, 2004.
- 65) Benirschka, M., Binkley, J. : Land price volatility in a geographically dispersed market , *American journal of agriculture economics* , vol.76, pp.185-195, 1994.
- 66) Kim, C., Phipps, T., and Anselin, L. : Measuring the benefit of air quality improvement: a spatial hedonic approach , *Journal of environmental economics and management* , vol.45, pp.24-39, 2003.
- 67) Kim, J., Elliott E., and Wang D. : A spatial analysis of county-level outcomes in US Presidential elections: 1988-2000 , *Electoral Studies* , vol.22, pp.741-761, 2003.
- 68) Chen, X., Conley, T. G. : A new semiparametric spatial model for panel time series, *Journal of econometrics*, vol.105, pp.59-83, 2001.
- 69) Baikner, K. : The spillover effects of state spending , *Journal of public economics* , Article in press , 2004.
- 70) Revelli, F. : Reaction or interaction? Spatial process identification in multi-tiered government structures , *Journal of Urban Economics* , vol.53(1), pp.29-53, 2003.
- 71) Overmars, K., de Koning, G., and Veldkamp, A. : Spatial autocorrelation in multi-scale land use models , *Ecological Modelling* , vol.164 , pp.257-270, 2003.
- 72) Fingleton, B. : Theoretical economic geography and spatial econometrics: dynamic perspective, *Journal of economic geography* , vol.1 , pp.201-225, 2001.
- 73) Fingleton, B. : Theoretical economic geography and spatial econometrics: bridging the gap between theory and evidence , *Spatial econometrics and spatial statics (Geits, A., Mur, J., and Zoller, H. G., Palgrave Macmillan)* , Chap.2 , pp.8-28, 2004.
- 74) Aten, B. H. : Does space matter? international comparisons of the prices of tradables and nontradables, *International regional science review*, vol.20, pp.35-52, 1997.
- 75) Magarhaes, A., Hewings, G., and Azzoni, C. : Spatial dependence and regional convergence, *discussion papers, Regional Economics Application Laboratory, Illinois Univ.*, REAL 00-T-11, 2000.
- 76) Dietz, R. D. : The estimation of neighbourhood effects in the social science: An interdisciplinary approach , *Social science research* , vol.31, pp.539-575, 2002.
- 77) Pfeifer, P., Deutch, S. : A three-stage iterative procedure for space-time modeling, *Technometrics* , vol.22(1), pp.35-47, 1980.
- 78) Pfeifer, P., Deutch, S. : Identification and interpretation of first order space-time ARMA models, *Technometrics* , vol.22(3), pp.397-408, 1980.

- 79) Deutch,S,Pfeifer, P. : Space-time ARMA modeling with contemporaneously correlated innovations , *Technometrics* , vol.23(4), pp.401-409, 1981.
- 80) Pfeifer,P.,Deutch, S. : Seasonal space-time ARIMA modeling, .*Geographical analysis*, vol.13(2), 1981.
- 81) Garrido, R. : Spatial interaction between the truck flows through the Mexico-Texas border, *Transportation research part A.*, vol.34, pp.23-33, 2000.
- 82) Epperson, K. : Spatial and space-time correlation in systems of subpopulations with stochastic migration , *Theoretical population biology* , vol.46, pp.160-197, 1994.
- 83) Epperson, K. : Spatial and space-time correlation in ecological models ,*Ecological modelling* , vol.132 , pp.63-76 , 1994.
- 84) Niu, X. : Asymptotic properties of maximum likelihood estimates in a class of space-time regression models , *Journal of multivariate analysis* , vol.55, pp.82-104, 1995.
- 85) Kamarianakis,Y. :Spatial-time series modeling: a review of the proposed methodologies ,*discussion papers, Regional Economics Application Laboratory, Illinois Univ.*, REAL 03-T-19, 2003.
- 86) Kamarianakis,Y. : A hierarchical bayesian approach for spatial time series, *discussion papers, Regional Economics Application Laboratory, Illinois Univ.*, REAL 03-T-15, 2003.
- 87) Elhorst, J. : Dynamic models in space and time ,*Geographical analysis* , vol.33, pp.119-140, 2001.
- 88) Niu, X.,Mckeague, W., and Elsner, J. B. : Seasonal space-time models for climate systems, *Statistical inference of stochastic processes* , vol.6, pp.111-133, 2003.
- 89) Elhorst, J.P. : Serial and spatial error dependance in space-time models , *Spatial econometrics and spatial statics(Geits, A., Mur, J., and Zoller, H. G., Palgrave Macmillan)* , Chap.9 , pp.176-193, 2004.
- 90) 屋井鉄雄, 中川隆広:構造化プロビットモデルの発展性 , *土木計画学研究・論文集* , No.13, pp.563-570,1996.
- 91) Bolduc, D., Fortin, B., and Gordon, S. : Multinomial probit estimation of spatially interdependent choices: an empirical comparison of two new techniques, *International regional science review*, vol.20, pp.77-101, 1997.