交通需要と経路選択の確率変動を考慮した交通均衡モデル：
ガンマ分布に従う OD 交通量を持つ確率ネットワーク均衡

A Network Equilibrium Model with Gamma-Distributed Demand and Stochastic Route Choice

○中山晶一朗[1], 高山純一[2]

1. はじめに

日々の交通の中では，通勤交通や到着制約のある業務交通を始めとして，単に旅行時間が短いだけでなく，その正確さが求められることが多い．また，ITS や VICS 等の効果を分析する場合，情報提供は不確実な状況下にこそ意味があるため，不確実性を的確に計測・評価することは不可欠である．このように道路ネットワークに関しては，旅行時間（所要時間）の値そのものだけでなく，そのばらつきはどれほどかを把握することは極めて重要なことと言える．

交通量や旅行時間が変動し，ばらつく原因には様々なものが考えられるが，事故や災害などが発生していない通常の交通では，交通需要が変動すること，道路利用者が経路選択を変更することなどが大きな原因であると考えられる．そこで，本研究では，そのような交通需要及び経路選択の確率変動を考慮した確率ネットワーク均衡モデルを提案する．なお，本稿のモデルは著者らが既に発表した経路選択の確率変動を考慮した均衡モデル[1)]について，新たに交通需要の確率変動も考慮するものである．

2. 基本概念

ワードロップ均衡の基本的な考え方は，利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しいというものである．交通量や旅行時間を確率変数と考え，このワードロップ均衡の考え方を適用すると，利用される経路の「期待旅行時間」は皆等しく，利用されない経路の「期待旅行時間」よりも小さいかせいぜい等しい，という均衡を考えることは極めて自然なことである．これが本均衡モデルの基本的な考え方である．この時，期待旅行時間の代わりに効用の期待値や一般化費用の期待値を用いることも当然可能となる．例えば，ＯＤペア i の経路 j の効用 v_j^i を $\mathrm{E}[T_j^i] + \eta \cdot \mathrm{SD}[T_j^i]$とする．ここで，$\mathrm{E}[T_j^i]$はＯＤペア i の経路 j の旅行時間の平均，$\mathrm{SD}[T_j^i]$はその標準偏差，ηはリスクに関するパラメータである．このような効用を仮定すると，リスク態度を考慮した配分も可能である．

本研究では，道路利用者は確率的に経路を選択すると仮定する．この時，n^i 人が存在する OD ペア i ($\in I$)の利用者が経路 j ($\in J^i$)を確率 p_j^i で選択すると，OD ペア i の経路 j の経路交通量は二項分布 $\mathrm{Bin}(n^i, p_j^i)$に従う（ＯＤ間の全ての経路交通量の同時分布として見る場合は多項分布に従い，1 つの経路の交通量のみに着目すると，多項分布の周辺分布としての二項分布に従う）．ただし，ここでは，同一 OD ペア全員が同じ確率で経路を選択すると仮定する．このように経路交通量が確率変数となると，経路旅行時間も当然確率変数となる．

二項分布は選択確率が小さい場合，ポアソン分布で近似できることが知られている．交通ネットワークの規模が大きい場合は OD 間の経路数は大きくなり，一つの経路の選択確率は小さくなり，ポアソン分布を適用することが可能となると考えられる．ポアソン分布は再生性など二項分布よりも取り扱いが容易な性質を持つ．なお，先に，数学的には経路交通量は二項分布に従うと説明したが，実際には交通量が二項分布に従っているかどうかは詳しく調査する必要があり，実際はポアソン分布に従っている可能性も否定することはできないと考えられる．

このように経路交通量はポアソン分布に従うと仮定

Key Words: 交通ネットワーク均衡，旅行時間の不確実性

1 正員 工博 金沢大学大学院自然科学研究科
〒920-8667 金沢市小立野 2-40-20 金沢大学工学部
Tel: 076-234-4614, Fax: 076-234-4632
2 正員 博（工）金沢大学大学院自然科学研究科

できると，OD ペア i の経路 j の（経路）交通量は平均が $n^i \cdot p_j^i (\equiv \mu_j^i)$ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\mu_j^i)$ に従う．

なお，多項分布の性質から，経路 j と経路 j' の交通量の共分散は $n^i \cdot p_j^i \cdot p_{j'}^i$ となる．しかし，上で述べたようにポアソン分布を仮定する場合，経路選択確率 p_j^i 及び $p_{j'}^i$ は小さいと仮定しているため，微小項の二乗は無視できるとし，経路交通量の共分散は 0 と仮定する．つまり，ポアソン分布を仮定することは経路交通量の共分散は考えないことを意味する．ただし，それは，リンク交通量の共分散（相関）は考慮しないことを意味しているものではなく，配分の際には．リンク交通量の共分散（相関）は取り扱っている．

3. 交通需要の確率変動

(1) ガンマ·ポアソンモデル

a)OD交通量

本研究では，OD 交通量（交通需要）の確率変動も考慮する．OD ペア i の OD 交通量の確率変数 N^i がガンマ分布に従っていると仮定する．正規分布と仮定することも考えられるが，ガンマ分布は負の値をとることがないという特長を持つ．また，以下で述べるが，OD 交通量をガンマ分布と仮定すると，経路選択の確率変動とを合わせた経路交通量の分布はガンマ·ポアソン分布（負の二項分布）という既知の分布に従うようになるという特長もある．既知の分布は特性関数·積率母関数等が定義されており，旅行時間の平均·分散を求める際に都合が良い．

前節では，OD 交通量が固定値の場合，経路交通量はポアソン分布に従うと述べた．ここで，上のようにOD交通量がガンマ分布に従う場合について考えよう．前節では，経路交通量は，固定値であるOD交通量 n^i と配分計算により決まる確定値の経路選択確率 p_j^i の積である $n^i \cdot p_j^i$ を平均とするポアソン分布であると述べた．ここでは，確率変数である OD 交通量 N^i がガンマ分布に従うため，この時の経路交通量は，（p_j^i は確定値＜配分により決定されるもの＞であるため）前節での $n^i \cdot p_j^i$ に相当する平均自体がガンマ分布に従う，ポアソン分布となる．このような母数（平均や分散など）がある分布に従う分布は複合分布（compound distribution）と呼ばれている．上の複合分布はガンマ·ポアソン分布と呼ばれており，通常の確率分布である負の二項分布と同じものとなっている．

ここで，ガンマ分布の性質について，簡単に説明する．ガンマ分布 $\mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ の平均は $\alpha \cdot \beta$ であり，分散は $\alpha \beta^2$ である．ガンマ分布は，正規分布やポアソン分布も持つ，以下のような再生性の性質を持つ．N が独立なガンマ変数 N_j の和とする時，$N = \sum_j N_j \sim \mathrm{Ga}(\sum_j \alpha_j, \beta)$ となる．ただし，$N_j \sim \mathrm{Ga}(\alpha_j, \beta)$ とする．

OD ペア i の OD 交通量がガンマ分布 $\mathrm{Ga}(\alpha^i, \beta^i)$ に従うとする（平均は $\alpha^i \cdot \beta^i$，分散は $\alpha^i \cdot (\beta^i)^2$）．前節で述べたように，経路交通量は独立であるため，上で述べたガンマ分布の再生性の性質を使い，OD ペア i の経路 j の経路交通量 F_j^i は $\mathrm{Ga}(p_j^i \cdot \alpha^i, \beta^i)$ に従うとする．

$$N^i = \sum_j F_j^i \sim \mathrm{Ga}(\alpha^i \textstyle\sum_j p_j^i, \beta^i) = \mathrm{Ga}(\alpha^i, \beta^i) \tag{1}$$

となり，フロー保存則が成り立つ．

b) 経路交通量

平均 κ_j^i が与えられたとき経路交通量の条件付分布は以下のポアソン分布に従う．

$$f_{X_j^i}\left(x_j^i \middle| \kappa_j^i\right) = \frac{e^{-\lambda_j^i}(\kappa_j^i)^{x_j^i}}{x_j^i!} \tag{2}$$

先に述べたように，ＯＤ交通量がガンマ分布に従って確率変動するため，κ_j^i が以下のガンマ分布に従う．

$$g_{K_j^i}\left(\kappa_j^i\right) = \frac{e^{-\kappa_j^i/\beta^i}(\kappa_j^i)^{p_j^i\alpha^i - 1}}{\Gamma\left(p_j^i \alpha^i\right)\left(\beta^i\right)^{p_j^i\alpha^i}} \tag{3}$$

このとき，

$$\begin{aligned} f_{X_j^i}\left(x_j^i\right) &= \int_0^\infty g_{K_j^i}\left(\kappa_j^i\right) f_{X_j^i}\left(x_j^i \middle| \kappa_j^i\right) d\kappa_j^i \\ &= \frac{\Gamma\left(x_j^i + p_j^i \alpha_j^i\right)}{\Gamma\left(p_j^i \alpha_j^i\right) x_j^i!} \left(\frac{1}{1+\beta^i}\right)^{p_j^i \alpha_j^i} \left(\frac{\beta^i}{1+\beta^i}\right)^{x_j^i} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$r^i \equiv 1/(1+\beta^i)$，$k_j^i \equiv p_j^i \cdot \alpha^i$ とし，k_j^i が自然数の場合，上の式は以下のように記述できる．

$$f_{X_j^i}\left(x_j^i\right) = {}_{x+k-1}C_{k-1}\left(r^i\right)^k\left(1-r^i\right)^x \tag{5}$$

ただし，k, x の添え字 i, j は省略している．

ガンマ･ポアソン分布の平均は $k_j^i\ (1-r^i)/r^i$ であり，分散は $k_j^i\ (1-r^i)/(r^i)^2$ である．

旅行時間の平均と分散はガンマ･ポアソン分布の積率母関数を用いて計算することが出来る．ガンマ･ポアソン分布の積率母関数 $M_j^i(s)$は以下の通りである．

$$M_j^i(s)=\frac{\left(r^i\right)^{k_j^i}}{\left[1-(1-r^i)e^s\right]^{k_j^i}} \tag{6}$$

旅行時間の平均･分散の計算には，積率母関数を用いることができる．リンク走行時間が BPR 関数とすると，リンクの旅行時間 t は $b+cx^l$ で表される．ただし，x は交通量，b, c, l はパラメータである．したがって，期待リンク旅行時間を計算するためには $\mathrm{E}[X^l]$が計算できれば良い．リンク交通量 X_a は経路交通量 F_j^i の和である．つまり，$X_a = \sum_i \sum_j \delta_{aj}^i \cdot F_j^i$ である．ただし，δ_{aj}^i はリンク-経路接続変数．F_j^i は既に述べたように負の二項分布であり，それぞれの積率母関数を $M_j^i\ (s)$ とすると，積率母関数の性質を使うと，確率変数の和である X_a の積率母関数 $M_a(s)$は$\Pi_i\Pi_j\ M_j^i(s)$，$\mathrm{E}[(X_a)^l]$は $d^lM_a(s)/ds^l\big|_{s=0}$ となる． BPR 関数の場合，リンク旅行時間の期待値（平均）は以下の式となる．

$$E[T_a]=\alpha+\beta\cdot\left.\frac{d^lM_a(s)}{ds^l}\right|_{s=0} \tag{7}$$

なお．旅行時間の分散に関しては，紙面の都合上，省略する．

⑵ 負の多項分布モデル

前節のガンマ･ポアソンモデルでは，（需要が固定の場合）経路交通量がポアソン分布に従うと仮定し，交通需要がガンマ分布に従う場合を考えた．2. 基本概念で述べたように，確率的に経路を選択する場合は多項分布（二項分布）に従う．（交通需要が固定の時）経路交通量が多項分布に従う場合のモデル化も可能である．この場合，ＯＤ交通量は負の二項分布と仮定すると，経路交通量は負の多項分布となる．つまり，負の二項分布と多項分布の複合（compound）を考えることを意味する．しかし，負の多項分布は多変量分布であり，その取り扱いは一変量分布よりも取り扱いは難しくなる．したがって，この負の多項分布モデルに関しては，別の機会に詳述したい．

3. 定式化

前節で述べたように経路選択を確率的に行うとき，実現される交通ネットワークの状態は以下のように表現できる．

$$\mathrm{E}[T_j^i]=\lambda^i \quad \text{if } p_j^i>0 \quad \forall j\in J^i\ \forall i\in I \tag{8}$$

$$\mathrm{E}[T_j^i]\geq\lambda^i \quad \text{if } p_j^i=0 \quad \forall j\in J^i\ \forall i\in I \tag{9}$$

ここで，$\mathrm{E}[\cdot]$は期待値であり，T_j^i は OD ペア i の経路 j の旅行時間（確率変数），λ^i は OD ペア i の最短の期待旅行時間である．

上式は相補性問題，変分不等式問題，不動点問題として定式化できる．変分不等式は以下の通りである．

$$\begin{aligned}&\text{Determine } \mathbf{x}^*=(\mu^*,\lambda^*)\in R^J_+\times R^I_+\\ &\quad\text{such that } \mathbf{x}\cdot\mathbf{F}[\mathbf{x}]=0,\quad \mathbf{x}\geq\mathbf{0},\mathbf{F}[\mathbf{x}]\geq\mathbf{0}\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{F}[\mathbf{x}]=(\mathbf{E}[\mathbf{T}]-\mathbf{\Gamma}^t\lambda, \mathbf{\Gamma}\mu-\mathbf{I})$，$\mathbf{E}[\mathbf{T}]$は経路の期待旅行時間ベクトル，$\mu$ は経路交通量の期待値，λは経路の最短期待旅行時間のベクトル，$\mathbf{\Gamma}$ は OD-経路接続行列，$\mathbf{I}$ は単位ベクトル，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ はベクトルの内積， tは行列･ベクトルの転置である．なお，μの要素μ_j^iは $k_j^i\ (1-r^i)/r^i = p_j^i\cdot\alpha^i\cdot\beta^i$ である．α^iとβ^iはＯＤ交通量の分布の母数として所与であるため，p_j^i が配分として求められる決定変数となる

4. 数値計算

(1)リスク態度

現実の交通では，通勤トリップなど，遅刻ペナルティがあり，旅行時間変動の激しい経路を避ける道路利用者も多数存在すると考えられる．本研究では，このような旅行時間の変動に対する道路利用者の態度（リスク態度）を以下によって定式化することにする．

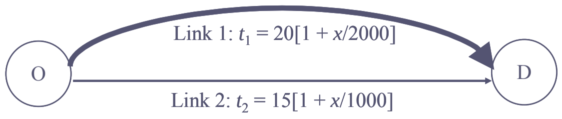

図１ 数値計算例のネットワーク

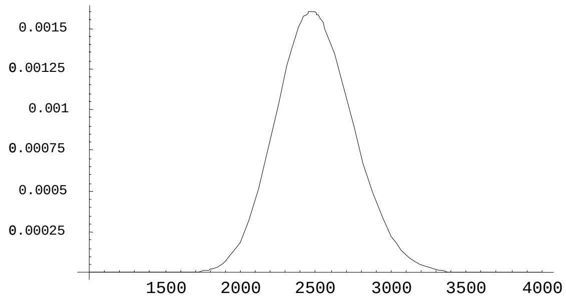

図２ 数値計算例でのＯＤ交通量の分布

$$v_j^i = E[T_j^i] + \eta\sqrt{Var[T_j^i]} \quad (4)$$

ここで，v_j^i はＯＤペア i の経路 j の効用，$Var[\cdot]$は分散を出す演算子であり，ηはリスク態度である．ηが正の場合は道路利用者がリスク回避であり，負の場合はリスク選好である．

(2)数値計算例

本来ならば，多数の経路を持つネットワークに適用すべきであるが，簡単のため，数値計算例として，図1に示す1ＯＤ2リンクの単純なネットワークとした．なお，ＯＤ交通量は，平均が 2500，分散が 250^2（変動係数が 0.1）のガンマ分布 Ga(100, 25)とした．均衡状態は，式(4)の v_j^i が等しくなる，$v_1 = v_2$ である．1ＯＤのため，ＯＤの表示する添え字は省略している．

図 3 が両リンクの平均旅行時間，図 4 が旅行時間の標準偏差を表している．図4からリンク 1 の旅行時間の標準偏差の方がリンク 2 よりも小さいことがわかる．これはリンク 1 の交通容量の方がリンク 2 よりも大きいため，旅行時間の変動がより小さいためである．このようにリンク 1 の旅行時間の変動の方が小さいため，図 3 から分かるように，リスク態度が大きくなるにつれて，つまり，リスク回避傾向が高くなるにつれて，リンク 1 の平均旅行時間がリンク 2 よりも大きなまま，その差（リンク 1 とリンク 2 の平均旅行時間の差）が広がっていることが分かる．リスク回避になるほど，より旅行時間変動の小さいリンク 1 をよく利用するようになったためである．

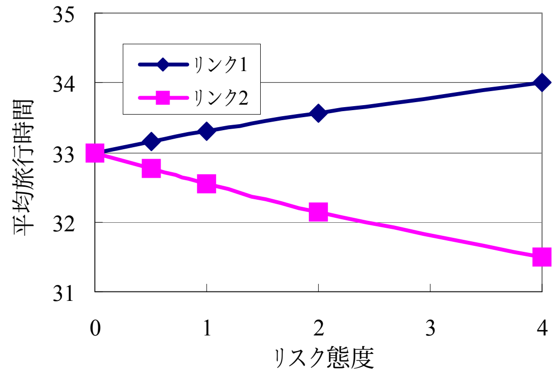

図３ 旅行時間の平均

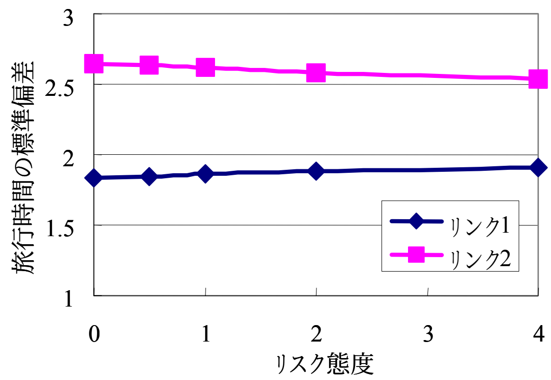

図４ 旅行時間の標準偏差

5. おわりに

本研究では，交通需要及び経路選択の確率変動を考慮した確率交通ネットワーク均衡モデルを提案した．

均衡解の性質の解明，現実ネットワークへの適用，そのためのアルゴリズムの開発等が今後の課題である．

参考文献

1) 中山晶一朗，高山純一，笠島崇弘：旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡：二項分布とポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡モデル，第25回土木計画学研究発表会，on CD-ROM，2002.