

旅行時間の不確実性を考慮した動的システム最適配分問題の解法*

*An Algorithm for Solving the Dynamic System Optimal Assignment Problem
with Stochastic Travel Time **

棟方 章晴[†], 赤松 隆[‡]

By Akiharu MUNEKATA[†], Takashi AKAMATSU[‡]

1 はじめに

本研究の目的は、旅行時間の不確実性を考慮した動的システム最適 (DSO: Dynamic System Optimal) 配分問題を解くアルゴリズムを開発することである。解析の対象は、First-In-First-Out (FIFO) 条件を満足するパラレルリンクネットワークである。

従来より、DSO 配分に関してはいくつかの研究がある¹⁾²⁾。しかし、従来研究では、いずれもネットワーク要件が確定的な場合のみを議論しており、OD 交通量や旅行時間が本質的に持つ不確実性を一切考慮していない。

本研究では、まず、旅行時間の不確実性を考慮した DSO 配分問題を、確率的最適制御問題として定式化する。次に、その最適制御問題の最適制御条件が、サブ問題としていくつかの線形相補性問題を組み合わせた問題として表現できることを示す。そして、この結果を活用すれば、定式化した最適制御問題を、最近の数理計画理論に基づくアルゴリズムによって、効率的に解けることを示す。

2 状況設定とモデルの定式化

(1) ネットワーク及び交通需要条件

本研究において対象とするネットワークは、ノードが2つ、OD ペアが1つ、リンクが並行に2本存在するようなパラレルリンクネットワークである。紙面の都合上、本稿では、リンク1を高速道路、リンク2を一般道路と見做したパラレルリンクネットワークの場合のみを定式化/解析する。この状況は、高速道路と一般道路が並行して走るネットワークにおけるランプ流入制御問題と見做すこともできる。

DSO 配分とは、最大流出率、旅行時間、OD 需要 $q(t)$ を与件として、計画時間帯 $[0, T]$ でネットワーク全体で消費される総旅行時間を最小化するような、リンク1へのフロー流入率 $u(t)$ を求める問題である。本研究では、リンク2の旅行時間が不確実性を持ち、時々刻々確率的に変動するものとする。

*キーワード: 交通制御, ランプ流入制御, 動的システム最適配分, 確率的最適制御理論

[†] 学生員, 東北大学大学院情報科学研究科

[‡] 正会員, 工博, 東北大学大学院情報科学研究科

(2) リンク・モデル

リンク1 – 高速道路 高速道路として見做されるリンク1では、旅行時間を0、最大流出率を $\mu < \infty$ とする。リンク1の待ち行列台数を $x(t)$ とすれば、リンク1の旅行時間 $c_1(t)$ は

$$c_1(t) \equiv x(t)/\mu \quad (1)$$

で与えられる。また、待ち行列台数 $x(t)$ の時間変化率 $dx(t)/dt \equiv \dot{x}(t)$ は

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} u(t) - \mu & \text{if } x(t) > 0 \\ \max[u(t) - \mu, 0] & \text{if } x(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

となる。

リンク2 – 一般道路 一般道路を集約したものとして見做されるリンク2では、旅行時間が $m(t) \neq 0$ 、最大流出率は無限大とする。リンク2の旅行時間 $c_2(t)$ は

$$c_2(t) \equiv m(t) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、自由旅行時間 $m(t)$ は、その変動が以下の幾何 Brown 運動に従うものとする:

$$dm/m(t) = \alpha(t)dt + \sigma dz. \quad (4)$$

ここで $\alpha(t)$ は確定的な時間変化率、 σ は不確実性の度合である。また、 dz は標準 Wiener 過程の増分であり、旅行時間の不確実な変動を表す。

(3) 確率的最適制御問題としての定式化

前節までの議論に、各変数の非負制約、境界条件を付加することにより、DSO 配分を求める問題は、 $u(t)$ を制御変数とする以下の確率的最適制御問題 [S-DSO] として定式化できる:

$$\min_{\{u(t)\}} E_0 \left[\int_0^T \{c_1(\tau)u(\tau) + c_2(\tau)(q(\tau) - u(\tau))\} d\tau \right] \\ \text{subject to Eqs. (1), (2), (3), (4)} \\ x(t) \geq 0, u(t) \geq 0, x(0) = 0, x(T) \text{ is free.}$$

表 1: ネットワークの状態別最適制御条件

ネットワーク状態 $(x(t), m(t), q(t))$ による分類		最適制御条件	最適な流入率	制御番号	
$x(t) = 0$	$q(t) < \mu$	-	$0 = \mathcal{L}_0 V(t, x(t), m(t))$	$u(t) = q(t)$	A
	$q(t) \geq \mu$	$m(t) \leq \partial V / \partial x$	$0 = C_1 + \mathcal{L}_0 V(t, x(t), m(t))$	$u(t) = \mu$	B
		$m(t) > \partial V / \partial x$	$0 = \mathcal{L}_q V(t, x(t), m(t))$	$u(t) = q(t)$	C
$x(t) > 0$	-	$m(t) \leq x(t) / \mu + \partial V / \partial x$	$0 = C_2 + \mathcal{L}_\mu V(t, x(t), m(t))$	$u(t) = 0$	D
		$m(t) > x(t) / \mu + \partial V / \partial x$	$0 = C_3 + \mathcal{L}_q V(t, x(t), m(t))$	$u(t) = q(t)$	E

3 最適制御条件

本節ではまず、DP 原理を用いて、問題 [S-DSO] の最適値関数が満たすべき条件 (i.e. Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式) を導出する。この HJB 方程式は、状態変数及びネットワーク要件により、各状態での制御ルールとともに、成立すべき条件として場合分けできる。そして、この場合分けされた各条件が、線形相補性問題として表現できることを示す。つまり、問題 [S-DSO] は、いくつかの線形相補性問題をサブ問題として組み合わせた問題であることが明らかになる。

(1) HJB 方程式の導出

最適値関数 $V(t, x(t), m(t))$ を

$$V(t, x(t), m(t)) \equiv \min_{\{u(t)\}} E_t \left[\int_t^T C(u(\tau)) d\tau \right] \quad (5)$$

と定義する。ここで、 $C(u(t)) \equiv c_1(t)u(t) + c_2(t)(q(t) - u(t))$ である。DP 原理により各時刻毎の問題に分割し、伊藤の補題を用いて整理すると、任意の時刻 t について最適値関数が満たすべき条件である HJB 方程式が求まる:

$$0 = \min_{\{u(t)\}} \left[C(u(t)) + \dot{x}(t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \alpha(t)m(t) \frac{\partial V}{\partial m} + \frac{1}{2} \sigma^2 m^2(t) \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (6)$$

(2) 最適制御ルール

式 (6) で示される HJB 方程式は、待ち行列 $x(t)$ のある/なし、OD 需要 $q(t)$ と最大流出率 μ の大小関係、旅行時間 $m(t)$ と渋滞待ち時間の大小関係によって、その時の最適制御ルールと共に、表 1 のように場合分けできる。ただし、 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_q, \mathcal{L}_\mu$ は以下で定義される微分演算子である:

$$\mathcal{L}_0 \equiv \alpha m(t) \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \sigma^2 m^2(t) \frac{\partial^2}{\partial m^2} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_q \equiv \{q(t) - \mu\} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{L}_\mu \equiv -\mu \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{L}_0 \quad (8)$$

また、 $C_1 \equiv m(t)\{q(t) - \mu\}, C_2 \equiv m(t)q(t), C_3 \equiv q(t)x(t)/\mu$ である。

(3) 最適制御条件の持つ構造と線形相補性問題としての表現

表 1 に示す最適制御条件 A ~ E のうち、旅行時間 $m(t)$ と渋滞待ち時間の大小関係で分類される条件 B と条件 C、及び条件 D と条件 E は、その各々が排他的に成立する。また、排他的に成立する各最適制御条件は、ネットワーク要件及び対応する最適制御ルールから、非成立時は非負の値をもつことが解る。よって、この最適制御条件は、線形相補性問題を含む、サブ問題 [PDE1],[LCP1], [LCP2] の組み合わせとして表現できる:

$x(t) = 0$ (待ち行列がない状態)

$$[\text{PDE1}] \quad \text{if } 0 \leq q(t) < \mu, 0 = \mathcal{L}_0 V(t, x, m)$$

$$[\text{LCP1}] \quad \text{if } 0 \leq \mu < q(t),$$

$$\begin{cases} [C_1 + \mathcal{L}_0 V(t, x, m)] [\mathcal{L}_q V(t, x, m)] = 0 \\ C_1 + \mathcal{L}_0 V(t, x, m) \geq 0, \mathcal{L}_q V(t, x, m) \geq 0 \end{cases}$$

$x(t) > 0$ (待ち行列がある状態)

$$[\text{LCP2}] \begin{cases} [C_2 + \mathcal{L}_\mu V(t, x, m)] [C_3 + \mathcal{L}_q V(t, x, m)] = 0 \\ C_2 + \mathcal{L}_\mu V(t, x, m) \geq 0, C_3 + \mathcal{L}_q V(t, x, m) \geq 0 \end{cases}$$

サブ問題 [PDE1], [LCP1], [LCP2] の状態変数 $x(t), m(t)$ に関する境界条件は、以下の i) ~ iv) で与えられる:

i) $m(t) \rightarrow \infty$

このとき、一般道路にはフローを流さずに、 $u(t) = q(t)$ とすることが最適制御であるため、

$$V(t, x, m \rightarrow \infty) = \int_t^s \{Q(\tau) - \mu\tau\} d\tau - [Q(t) - x(t)] \quad (9)$$

となる．ここで， $Q(t)$ は時刻 t までの累積 OD 交通量である．また， s は渋滞終了時刻であり，ネットワーク要件から容易に求められる．

ii) $m(t) \rightarrow 0$

一般道の旅行時間が 0 であり，一般道は非渋滞である．また，旅行時間 $m(t)$ が幾何 Brown 運動に従うため，

$$V(t, x(t), m \rightarrow 0) = 0. \quad (10)$$

iii) $x(t) \rightarrow \infty$

このとき，一般道路に全てのフローを流す $u(t) = 0$ が最適制御となるため，

$$V(t, x \rightarrow \infty, m) = E_t \left[\int_t^T q(s)m(s)ds \right]. \quad (11)$$

iv) $x(t) \rightarrow 0$

$q(t) \leq \mu$ のときは [PDE1]， $q(t) > \mu$ のときは [LCP1] の解として与えられる．これらのサブ問題を解く際に，境界条件として i) $m(t) \rightarrow \infty$ ，ii) $m(t) \rightarrow 0$ を用いる．

ネットワークの状態と最適制御，及び境界条件の関係を図 1 に示す．時刻 t における $q(t)$ と μ の関係により，図中 (1)，(2) の 2 つの制御パターンが存在する．図中 (1) では，境界条件 ii) として [PDE1] の解を用い，その境界上では制御 A となる．一方，図中 (2) では，境界条件 ii) として [LCP1] の解を用いる．このとき，境界条件 ii) 上での制御は，自由境界 $\partial V / \partial x$ (数値的に解かなければ求まらない) と旅行時間 $m(t)$ の大小関係により，制御 B と制御 C に分けられる．

境界条件 ii) 以外の部分は，図中 (1)，(2) 共通であり，[LCP2] を解く問題である．[LCP2] に関して，自由境界 $x(t) / \mu + \partial V / \partial x$ と旅行時間 $m(t)$ の大小関係により，制御 D と制御 E に分けられる．

このように，これらのサブ問題は， $x(t) > 0$ の場合の問題である [LCP2] を解く際に，境界条件として $x(t) = 0$ の場合の問題である [PDE1] あるいは [LCP1] の解を用いるという構造を持っている．また，[LCP1]，[LCP2] に関しては，数値的に解かなければ求まらない自由境界によって，最適制御が異なることが解る．

4 アルゴリズム

本節では，まず，前節で示した各サブ問題を離散化する．そして，その結果を活用すれば，確率的最適制御問題 [S-DSO] は，最近の数値計画理論に基づくアルゴリズムによって，効率的に解けることを示す．

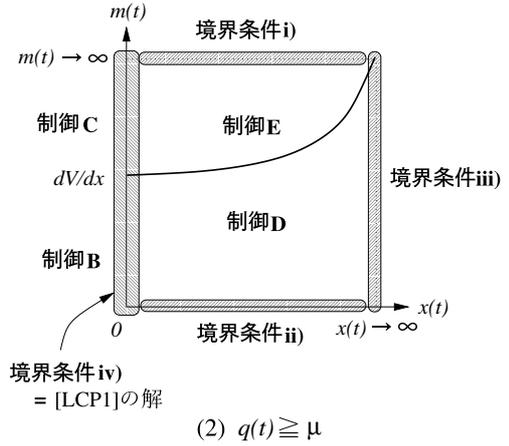
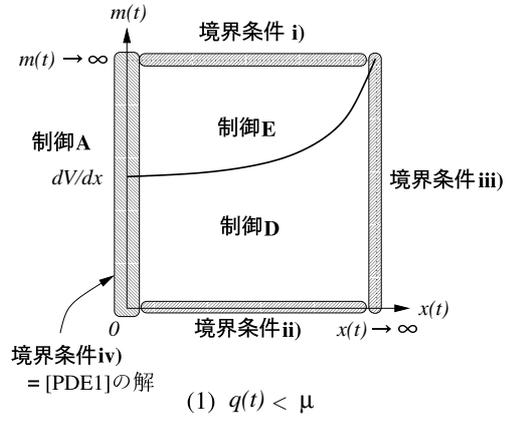


図 1: 各サブ問題の境界条件を介した関係

(1) 問題の離散化表現

以下のサブ問題の離散化では，時刻 t を $t = k\Delta t$ と離散表現する． $0 \leq k \leq K$ ， $K\Delta t = T$ である．時刻 k における OD 需要を q^k ，累積 OD 需要を Q^k ，待ち行列台数を x^k と離散表現する．また，最適値関数ベクトルを V^k と置く．特に， $x^k = 0$ であるときの (i.e. 境界条件 iv) 上での) 最適値関数ベクトルを \hat{V}^k とする．さらに，前節で明示した境界条件 i) ~ iv) を離散表現したものを，境界条件 I) ~ IV) とする．

[PDE1] の離散化 [PDE1] は，典型的な 1 変数の偏微分方程式を解く問題そのものである．結果として，[PDE1] は以下のように離散近似される：

$$M_1^{k+1} \hat{V}^{k+1} - M_2^k \hat{V}^k = 0 \quad (12)$$

ここで， M_1^{k+1} ， M_2^k は，微分演算子 \mathcal{L}_0 を適当な差分スキームで離散化して得られる正方行列である．この離散近似した問題を，境界条件 I) の下で解く．

[LCP1] の離散化 [LCP1] 内の微分演算子 \mathcal{L}_q は， $x(t)$ 及び $m(t)$ についての偏導関数を含むため， $\mathcal{L}_q V = 0$ は 2 変数の偏微分方程式となっている．しかし，[LCP1] は $x(t) = 0$ ， $\mu < q(t)$ の場合に成立する

ことを考慮すれば、 $\partial V/\partial x \approx 1/\mu$ と近似できる^{*}。このことを利用すれば、[LCP1] は 1 変数の偏微分方程式によって構成される LCP となり、[PDE1] とほぼ同様の手順によって離散化できる。結果として、[LCP1] は以下のように離散化される：

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} C_1 + M_1^{k+1} \hat{V}^{k+1} - M_2^k \hat{V}^k \\ \frac{1}{\mu}(q^k - \mu)\mathbf{1} + M_1^{k+1} \hat{V}^{k+1} - M_2^k \hat{V}^k \end{array} \right] = 0 \\ C_1 + M_1^{k+1} \hat{V}^{k+1} - M_2^k \hat{V}^k \geq 0, \\ \frac{1}{\mu}(q^k - \mu)\mathbf{1} + M_1^{k+1} \hat{V}^{k+1} - M_2^k \hat{V}^k \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 C_1 は C_1 を離散化した定数ベクトルである。この離散近似した問題を、[PDE1] と同様、境界条件 I) の下で解く。

[LCP2] の離散化 [LCP2] は、典型的な 2 変数の偏微分方程式を解く問題である。結論として、[LCP2] は、以下のように離散近似される：

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} C_2 + H_\mu V^k - V^{k+1} \\ C_2 + H_\mu V^k - V^{k+1} \geq 0, C_3 + H_q V^k - V^{k+1} \geq 0 \end{array} \right] = 0 \\ C_2 + H_\mu V^k - V^{k+1} \geq 0, C_3 + H_q V^k - V^{k+1} \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

ここで、 H_μ, H_q は、微分演算子 $\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_q$ を適当な差分スキームで離散化して得られる正方行列、 C_2, C_3 は C_2, C_3 を離散化した定数ベクトルである。この離散近似された問題を、境界条件 I), II), III), そして IV) ([PDE1] あるいは [LCP1] で求めた \hat{V}^k に対応する) の下で解く。

(2) 各サブ問題を解くアルゴリズム

式 (12), 式 (13), 式 (14) で示される最適制御条件は、仮に V^k を既知とすれば、 V^{k+1} のみを未知変数とする問題である。一方、最適値関数 $V(t, x, m)$ の定義により、満期 T では $V^K = 0$ である。したがって、式 (12), 式 (13), 式 (14) により、時点 $k = 0$ から $k = K$ で定義された一群の問題は、時点 $k = K$ から $k = 0$ へと後ろ向きに考えれば、各時点 k 毎に逐次的に解くことができる。よって以下では、時刻 k でのサブ問題の解法について説明する。

[PDE1] の解法 [PDE1] は、連立方程式を解く問題に帰着しており、Jacobi 法、SOR 法など、既存のアルゴリズムにより容易に解くことができる。

[LCP1], [LCP2] の解法 式 (13), 式 (14) は、一般化相補性問題 (GCP: Generalized Complementarity

^{*} $\partial V/\partial x$ は、待ち行列台数が 1 台増えたときの、ネットワークで消費される旅行時間の増分である。また、時刻 t においては $x(t) = 0$ かつ $\mu < q(t)$ であるので。

Problem) の特殊ケースである。近年、数理計画理論の分野において、GCP に対する効率的なアルゴリズムが開発されている³⁾。この結果を用いることで、式 (13), 式 (14) で示されるサブ問題 [LCP1], [LCP2] を効率的に解くことができる。

(3) 全体のアルゴリズム

各サブ問題を解くルーチンを [Alg-PDE1], [Alg-LCP1], [Alg-LCP2] とすると、問題 [S-DSO] を解くアルゴリズム [Alg-S-DSO] は、以下のように纏められる：

```
[Alg-S-DSO]
(最適値関数の終端条件)
 $V^K := 0;$ 
(時間ループ)
for  $k := K - 1$  to 0 step 1 do
  (境界条件 I) を用いて、
   $x^k = 0$  のときの最適値関数  $\hat{V}^k$  を求める)
  if  $q^k \leq \mu$  then
     $\hat{V}^k :=$  [Alg-PDE1];
  end if
  else if  $\mu < q^k$  then
     $\hat{V}^k :=$  [Alg-LCP1];
  end if
  (上で求めた  $\hat{V}^k$  を境界条件として用いて、
   $x^k \neq 0$  のときの最適値関数  $V^k$  を求める)
   $V^k :=$  [Alg-LCP2];
end for.
```

5 おわりに

本研究では、旅行時間の不確実性を考慮した動的システム最適配分問題の解法を開発した。発表会では、開発した [Alg-S-DSO] を計算機に実装し、具体的なネットワークについて数値計算を行なった結果を報告する予定である。

参考文献

- [1] 桑原雅夫, 吉井稔雄, 熊谷香太郎, “動的システム最適配分とランプ流入制御に関する研究 – 簡略ネットワークにおける基礎的分析 –, ” 土木学会論文集, No.667/IV, pp.59-71, 2001.
- [2] 棟方章晴, 三浦伸之, 赤松隆, “動的システム最適配分の基本的特性に関する研究”, 土木計画学研究・講演集, Vol. 24, 2001.
- [3] H.Jiang, M.Fukushima, L.Qi, D.Sun, “A Trust Region Method for Solving Generalized Complementarity Problems,” SIAM J. of Optimization, 8, No.1, pp.140-157, 1998.