経路コストの加法性の仮定を緩和した利用者均衡配分モデル*

User Equilibrium Traffic Assignment Model with Relaxation of Additive Path Cost Assumption*

井上紳一**
By Shin-ichi INOUE**

1. はじめに

既存の利用者均衡配分モデルは、通常、経路コストの加法性の仮定、すなわち、「経路のコストはその経路を構成するリンクのコストの線形和で表わされる」とする仮定を置いている。この仮定によって、モデルの定式をリンクベースで行なうことが可能になる。これに加えて、リンクコストの分離性の仮定（リンクコストはそのリンクの交通量のみの関数であるとする仮定）を併せて置くことによって、モデルの理論的な解析を行なう上でもアルゴリズム開発の上でも、取り扱いが容易になる。したがって、これら2つの仮定は非常に有用であるといえる。

リンクコストの分離性を仮定することに対しては、現実の交通現象と整合しないという批判と、それに対応したモデルに関する研究が既に行なわれており、本研究では触れない。一方、経路コストの加法性については、実務において最近問題となり始めているものの、これを緩和したモデルは（理論上それほど難しくないためか逆に）まだあまり知られていないように思われる。

そこで、本研究では、経路コストの加法性の仮定を緩和し、道路料金について加法性を仮定しない利用者均衡配分モデルについて、定式化とアルゴリズムの検討を行なう。

2. 既往研究のレビュー

経路コストの非加法性の下での利用者均衡配分モデルを扱った研究としては、Gabriel and Bernstein (1997)が、かなり広い枠組みの下でモデルの整理とアルゴリズムの提示を行なっている。ただし、この研究ではかなり高い一般性を保ったままモデルを扱っているため、経路変数を明示的に用いたアルゴリズムが不可欠となっている。

また、Yang et al. (2004)は、有料道路料金の最適設定問題の下位問題として、料金が出入口ペアごとに与えられている場合の利用者均衡配分を扱っている。本研究のモデルは、このモデルと類似したものである。

3. 本モデルが対象とする道路料金制度

ネットワーク上を流れる車にかかるコストとしては、主に、旅行時間と道路料金の2つが考えられる。このうち旅行時間に関しては、加法性を仮定することに大きな問題はないと思われるが、道路料金の加法性のもとでは、モデルで取り扱える道路料金制度が制約されることになり、現実の料金体系にはそぐわない事態も生じている。

道路料金をリンクに分解できるのは、主に以下の2種類の料金体系の場合である。（これ以外にも分解できる場合はあるが、あまり現実的ではない。）

①均一料金制度

②「ターミナルチャージ＋利用距離×料率」で表わされる料金体系

しかし、既に採用または検討されている以下のような現実の料金制度の下では、一般には道路料金をリンクに分解することができない。

③距離に対して料金が階段状に変化する場合

④長距離逓減制

⑤有料道路の入口～出口間に複数の経路が存在する場合、実際の経路にかかわらず、入口～出口間の最短距離に応じた料金を課す場合

⑥特定の入口～出口間のみを対象とした割引き（昨今の有料道路割引き社会実験の多くがこのタイプである）

⑦乗り継ぎ料金制（有料道路を利用した自動車が一般道に一旦下りた後、再び有料道路を利用する際に、料金を割り引く制度）

例えば JH 等の対距離制区間では、短距離に限れば近似的には②であるが、厳密に言えば50円単位で

---

*　キーワーズ：配分交通，ネットワーク交通流
**　正員，修(工)，財団法人 計量計画研究所
（東京都新宿区市谷本村町 2-9
Phone: 03-3268-9911　e-mail: sinoue@ibs.or.jp）

丸められているため③である。また、100km 以上では割引きとなるため④となっている。

一方、都市高速道路のようにネットワークを形成している箇所では、今後仮に均一料金制から対距離制に移行するとしても、⑤になることが予想される。

⑦の乗り継ぎ制については、限定的ながら既に例えば阪神高速道路公団で導入されており、今後は他地域でも TDM や料金多様化の一環として導入される可能性が、ETC 普及とともに高まっている。

本研究では、③～⑦のように道路料金がリンクに分解できないような料金体系の下で、Wardrop 均衡に従う利用者均衡配分モデルを構築することとする。

4. 道路料金の加法性を仮定しない利用者均衡配分モデル

(1) モデルの定式化

従来のモデルでは、経路コストはその経路に含まれるリンクのリンクコストの線形和によって表されていた。

$$c_{rs,k} = \sum_a \delta^a_{rs,k} \cdot t_a(x_a) \tag{1}$$

ここに,

$c_{rs,k}$: OD ペア rs 間の経路 k のコスト（一般化費用）

x_a : リンク a の交通量

$t_a(x_a)$: リンク a のリンクコスト（旅行時間＋料金項）

$\delta^a_{rs,k}$: リンク－経路接続行列の要素

これを以下のように変更する。

$$c_{rs,k} = \sum_a \delta^a_{rs,k} \cdot t_a(x_a) + \tau_{rs,k} \tag{2}$$

ここに,

$t_a(x_a)$: リンク a のリンク旅行時間（料金項は含まない）

$\tau_{rs,k}$: OD ペア rs 間の経路 k のコストの料金項（道路料金を時間換算したもの）

コストのうち t_a はリンク交通量 x_a に依存する項であり、かつ加法性が成り立っている。$\tau_{rs,k}$ は経路に依存する項で加法性は成り立たないが、交通量に依存しない定数である。リンク旅行時間が t_a に相当し、道路料金を時間換算したものが $\tau_{rs,k}$ に相当する。

ここで、以下のように Wardrop 均衡が成り立つものとする。

$$f_{rs,k} \cdot (c_{rs,k} - C_{rs}) = 0 \quad \forall rs,k \tag{3}$$

$$c_{rs,k} - C_{rs} \geq 0 \qquad \forall rs,k \tag{4}$$

ここに,

C_{rs} : OD ペア rs 間の最小コスト

$f_{rs,k}$: OD ペア rs 間の経路 k の交通量

(2) 等価な最適化問題

このモデルは以下の数理最適化問題と等価である。

$$\min Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{f}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) \cdot d\omega + \sum_{rs} \sum_k f_{rs,k} \cdot \tau_{rs,k} \tag{5}$$

subject to

$$x_a = \sum_{rs} \sum_k \delta^a_{rs,k} \cdot f_{rs,k} \qquad \forall a \tag{6}$$

$$\sum_k f_{rs,k} = q_{rs} \qquad \forall rs \tag{7}$$

$$f_{rs,k} \geq 0 \qquad \forall rs,k \tag{8}$$

ここに,

q_{rs} : OD ペア rs 間の交通量

この最適化問題が元のモデルと等価であることは、Kuhn-Tucker 条件を調べることにより、容易に証明できる。

(3) 解の一意性

最適化問題の解が一意であるためには、制約条件式によって示される変数の実行可能領域が凸で、かつ、目的関数が狭義の凸関数であればよい。

制約条件式はすべて線形であることから、変数の実行可能領域は凸である。また、

$$\frac{\partial Z_P}{\partial x_a} = t_a(x_a) \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_a \partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b} t_a(x_a) = \begin{cases} dt_a/dx_a > 0 & \text{for } a = b \\ 0 & \text{for } a \neq b \end{cases} \tag{10}$$

すなわち、リンク交通量に関する Hessian は正定値行列であるから、リンク交通量は一意である。

経路交通量については、一般には Hessian が正定値行列とはならないので、解も一意ではない。（これは、このモデルが従来の UE を一般化したものであることから考えても、明らかである。）

目的関数の第2項は総料金収入額を意味している。目的関数の値は均衡状態においては当然一意であり、かつ、目的関数第 1 項の一意性はリンク交通量の一意性から自明であるから、目的関数の第2項は一意である。したがって、総料金収入額は一意である。

5. アルゴリズムの概要

(1) 降下方向の探索

この最適化問題を最急降下法によって解くことを考える。

まず、主問題の目的関数をテンポラリーな解$\mathbf{f}$の近傍で一次近似する。ここに、$\mathbf{g}$は経路交通量ベクトルの補助変数である。

$$
\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{g}) \\
&\cong Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{f})+\sum_{rs}\sum_{k}\frac{\partial Z_{\mathrm{P}}}{\partial f_{rs,k}}\cdot\left(g_{rs,k}-f_{rs,k}\right) \\
&=Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{f})+\sum_{rs}\sum_{k}\left(\sum_{a}\delta_{rs,k}^{a}\cdot t_{a}(\mathbf{f})+\tau_{rs,k}\right)\cdot\left(g_{rs,k}-f_{rs,k}\right) \\
&=Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{f})+\sum_{rs}\sum_{k}c_{rs,k}(\mathbf{f})\cdot\left(g_{rs,k}-f_{rs,k}\right) \\
&=Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{f})-\sum_{rs}\sum_{k}c_{rs,k}(\mathbf{f})\cdot f_{rs,k}+\sum_{rs}\sum_{k}c_{rs,k}(\mathbf{f})\cdot g_{rs,k}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

したがって、降下方向探索のための補助問題は以下のようになる。

$$\min Z_{\mathrm{Sub}}(\mathbf{g})=\sum_{rs,k}c_{rs,k}(\mathbf{f})\cdot g_{rs,k} \tag{12}$$

subject to

$$\sum_{k\in K_{rs}}g_{rs,k}=q_{rs} \qquad \forall rs \tag{13}$$

$$g_{rs,k}\geq 0 \qquad \forall rs,k \tag{14}$$

つまり、コスト最小の経路に全 OD 交通量を配分することにより、補助解$\mathbf{g}$が求められる。ただし，最短経路探索にあたって、ラベル確定法（Dijkstra 法）やラベル更新法（Ford 法）など、経路コストの加法性を仮定している既存のアルゴリズムは用いることができなくなる。したがって、新たな最短経路探索アルゴリズムを開発する必要があるが、その具体については、対象とする料金制度に依存する。

(2) 最短経路探索アルゴリズム

ここで、有料道路の入口～出口ペアに対する料金テーブルという形で料金が与えられる場合（有料道路のランプペアに対応して料金が決まり、有料道路上の経路には依らない場合）について考えると、以下のように比較的簡単なアルゴリズムで対応することができる。

Step 1: 有料道路のみのネットワークを用いて、全入口～出口ペア間の最短旅行時間を検索する。（この時、道路料金は無視する。）

Step 2: 全入口～出口ペア間に仮想リンクを張り、この仮想リンクにランプ間のコスト（Step 1で算出した時間項＋入口出口ペアに応じた料金項）を持たせる。

Step 3: ネットワークから本来の有料道路リンクを削除する。

Step 4: Dijkstra 法等の既存アルゴリズムにより経路探索を行なう。

Step 5: All-or-nothing 配分を行なう。仮想リンクに配分された交通量は、もとの有料道路リンク上にもどして配分する。

なお、全体ネットワークの中に完全に独立して課金される複数の有料道路サブネットワークが含まれる場合（例えば首都圏における JH と首都高）には、サブネット間を跨いで料金テーブルや仮想リンクを設定するのではなく、それぞれのサブネットごとにこれらの処理を行なえばよい。（この場合、サブネット間の境界ノードは、出入口の一種となる。）

このアルゴリズムは、全入口～出口ペア間の料金表を予め用意しておく必要があるが、前述の料金制度③～⑥に対応可能となるため、有用であると考えられる。

また、道路料金が入口～出口ペアのみでなく有料道路ネットワーク上の経路にも依存する場合（例えば首都高速湾岸線の環境ロードプライシング等）には、Step 1において、入口～出口間の経路探索を経由地別に行ない、得られた旅行時間に料金項を加えた一般化費用が最小となるルートを採用すればよい。

一方、⑦の乗り継ぎ料金制については、乗り継ぎ料金が適用される出口～入口ペア間の一般道に対応した仮想リンクを張り、この仮想リンクに出口～入口ペア間の最短旅行時間と乗り継ぎ割引後の料金の和を持たせることにより、既存の最短経路探索アルゴリズムの適用が可能となる。ただし、現在の阪神高速道路のように乗り継ぎ料金が適用される出口～入口ペアが極めて限定されている場合にはよいが、広範な出口～入口ペア間で乗り継ぎ料金が適用される場合には、必要な仮想リンクが多くなり、かつ、各仮想リンクに対応する実リンクチェーンも相当長くなるため、計算負荷が膨大になる可能性がある。

(3) 降下ステップサイズの探索

降下ステップサイズの一次元探索を行なうためには、目的関数の値を評価する必要がある。目的関数は経路変数を含んでいるが、経路変数を明示的に扱

うことなく、目的関数を評価することが可能である。

ここで、補助問題の解の経路交通量ベクトルとリンク交通量ベクトルをそれぞれ$\mathbf{g}$，$\mathbf{y}$とし、降下ステップサイズをα、目的関数の第1項をZ_1，第2項をZ_2とし、

$$Z^{(+1)} = Z\left(\mathbf{x}+\alpha\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \mathbf{f}+\alpha\cdot(\mathbf{g}-\mathbf{f})\right)$$

と書くことにすると、

$$Z_1^{(+1)} = \sum_a \int_0^{x_a+\alpha\cdot(y_a-x_a)} t_a(\omega)\cdot d\omega \tag{15}$$

$$\begin{aligned} Z_2^{(+1)} &= \sum_{rs}\sum_k \left\{(1-\alpha)\cdot f_{rs,k}+\alpha\cdot g_{rs,k}\right\}\cdot\tau_{rs,k} \\ &= (1-\alpha)\cdot\sum_{rs}\sum_k f_{rs,k}\cdot\tau_{rs,k} \\ &\quad +\alpha\cdot\sum_{rs}\sum_k g_{rs,k}\cdot\tau_{rs,k} \\ &= (1-\alpha)\cdot Z_2(\mathbf{f})+\alpha\cdot\sum_{rs}\sum_k g_{rs,k}\cdot\tau_{rs,k} \end{aligned} \tag{16}$$

$Z_1^{(+1)}$は従来どおりの方法で計算すればよいので問題ない。

$Z_2^{(+1)}$を計算するために必要となる$Z_2(\mathbf{f})$は定数であり、収束計算の前回のラウンドで計算したものを記憶しておけばよい。また、$\sum\sum g_{rs,k}\cdot\tau_{rs,k}$については、前述の経路探索の際の仮想リンクの料金と交通量の積の総和と等しいため、計算は容易である。算出した$Z_2^{(+1)}$は次のラウンドのために記憶しておく必要があるが、経路交通量や仮想リンク上の交通量は、$\sum\sum g_{rs,k}\cdot\tau_{rs,k}$の算出が終われば破棄してかまわない。

以上まとめると、従来の Frank-Wolfe 法にいくつかの変更を加えることにより、求解が可能となっている。このため、実務への適用においても支障は極めて少ないと考えられる。

6. 確率的利用者均衡配分への拡張

本モデルは容易に、確率的利用者均衡(SUE)配分に拡張できる。ロジット型モデルと等価な最適化問題は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \min Z_{\mathrm{P}}(\mathbf{f}) &= \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\cdot d\omega + \sum_{rs}\sum_k f_{rs,k}\cdot\tau_{rs,k} \\ &\quad + \frac{1}{\theta}\cdot\sum_{rs} q_{rs}\cdot\sum_k \frac{f_{rs,k}}{q_{rs}}\cdot\ln\frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \end{aligned} \tag{17}$$

subject to (6)～(8)

これを部分線形化法で解くことを考えると、降下方向探索のための補助問題は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \min Z_{\mathrm{Sub}}(\mathbf{g}) &= \sum_{rs,k} c_{rs,k}(\mathbf{f})\cdot g_{rs,k} \\ &\quad + \frac{1}{\theta}\cdot\sum_{rs} q_{rs}\cdot\sum_k \frac{g_{rs,k}}{q_{rs}}\cdot\ln\frac{g_{rs,k}}{q_{rs}} \end{aligned} \tag{18}$$

subject to (13), (14)

これは、コスト固定の下でのロジット型確率的配分と等価である。前述の最短経路探索アルゴリズムと同様に有料道路ネットワークを仮想リンクに置き換えれば、Dial 配分や Markov Chain 配分などの既存アルゴリズムを適用可能である。ただし、このとき仮想リンクのコストは、入口～出口間の最小コストではなく期待最小コストとする必要がある。また、仮想リンクに配分された交通量を有料道路の実リンクに戻す際には、確率的配分を行なう必要がある。

ちなみに、有料道路部分に限ればネットワークはそれほど複雑ではないため、期待最小コスト算出や確率配分にあたっては、経路を明示的に列挙するアルゴリズムでも実用に耐えられると思われる。

なお、本モデルは SUE への拡張のほかに、需要変動型モデルへの拡張も容易である。

7. まとめ

本モデルにより、現実に実施または検討されている料金制度のほとんどに利用者均衡配分を適用することが可能になったと思われる。今後はプログラムの開発を行ない、実用性を検証する予定である。

しかし、そもそも本研究の背景にあるのは、多様な料金制度の評価に適用可能なモデルへのニーズである。料金制度や料金政策を取り巻く今後の状況を考えた場合、マルチクラス配分（車種別、目的別、ETC と非 ETC）をはじめとする発展的な各種モデルの実用化に向け、実証的研究を更に進める必要があるものと思われる。

最後に、本研究を進めるにあたって、東北大学の赤松隆先生、東京大学の円山琢也先生に重要なご示唆をいただいた。ここに感謝の意を表したい。

参考文献

1) S. Gabriel and D. Bernstein (1997), The traffic equilibrium problem with nonadditive path costs, Transportation Science Vol. 31, No. 4, pp. 337–348

2) H. Yang et al. (2004), Modeling private highways in networks with entry-exit based toll charges, Transportation Research Part B 38, pp. 191–213