

The basic characteristic of optimal congestion pricing under MNL model SUE assignment and extension to CNL model*

木下隆介**・羽藤英二***

By Ryusuke KINOSHITA**・Eiji HATO***

1. はじめに

本研究では、確率的利用者均衡 (SUE) 配分の混雑料金問題の定式化について、MNL 型を下敷きとして、非飽和時の経路の重複問題を明示的に取り扱うことのできる CNL 型の二段階最適化問題への拡張を行う。経路間に重複を含む Braess のネットワークを用いて、重複の割合や、需要及び容量の変化に対して比較・検証を行い、混雑料金の基本的な特性の理解を試みたい。

2. MNL 型 SUE 配分に対する混雑料金の定式化

経路の期待効用の確率項の分布に互いに独立なガンベル分布と仮定した多項ロジット (MNL) 型 SUE 配分下での最適混雑料金を取り上げる。「最適」の基準はシステム最適 (SO) 配分としてよく知られる総走行費用最小化とする。課金は以下のようにして求められる¹⁾。

まず、リンク a の一般化費用 $c_a(x_a)$ として、リンク所要時間 $t_a(x_a)$ とリンクごとに課す混雑料金 d_a との和を考える。

$$\mathbf{c} = \mathbf{t} + \mathbf{d} \quad (1)$$

最適混雑料金パターン \mathbf{d} は、式(2)の二段階最適化問題 (BP: Bilevel Programming) を解くことにより得られる。

$$\min_{\mathbf{d}} Z_p = \sum_a x_a t_a(x_a) \quad (2)$$

subject to

$$\max_x Z_s = \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}(\mathbf{c}) - \sum_a x_a c_a(x_a) + \sum_a \int_0^{x_a} c_a(w) dw \quad (3)$$

*キーワード：均衡配分，混雑料金

**学生員、愛媛大学大学院環境建設工学専攻

(愛媛県松山市文京町 3、

Tel 089-927-9843、E-mail kinoshita@eh.cce.ehime-u.ac.jp)

***正員、工博、愛媛大学工学部

(愛媛県松山市文京町 3、

Tel 089-927-9830、E-mail hato@eng.ehime-u.ac.jp)

x_a : リンク a の交通量

q_{rs} : OD ペア rs 間の交通量

S_{rs} : OD ペアごとの期待最小一般化費用関数

$$S_{rs} = S_{rs}(\mathbf{c}_{rs}) = E[\min\{C_k^{rs}\}]$$

$$= -\frac{1}{\theta} \ln \sum_k \exp(-\theta c_k^{rs}) \quad \forall r, s \quad (4)$$

θ : スケールパラメーター

BP 問題を解くために最適化が達成された状態を想定する。一般化費用についての SUE 配分(式(3))と所要時間についての SO 配分(式(2))が一致するための必要十分条件を考えると、以下の式が得られる。

$$\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}^*(\mathbf{P}_{rs}) = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(w) dw - \sum_a \int_0^{x_a} \hat{t}_a(w) dw \quad (5)$$

ここで、限界所要時間は以下の式(6)で表される。

$$\hat{t}_a = t_a + x_a \frac{dt_a}{dx_a} \quad (6)$$

式(5)から求まる最適混雑料金 d をリンクに設定することで、利用者の自由な経路選択行動の結果がシステム全体の最適化状態と一致する。

3. CNL 型 SUE 配分に対する混雑料金の定式化

次に前節で定式化した MNL 型 SUE 配分の混雑料金問題を GEV 型 SUE 配分に拡張することを考える。

(1) GEV モデル

ロジットモデルでは、効用の誤差項に独立で同一な極値分布を仮定しているため、経路間の期待効用を互いに独立で扱える。このことからネットワークローディングの計算が容易となる。実際のネットワーク上の様々な選択行動においては、選択肢間の複雑な相互作用が存在する。たとえば、Braess のパラドクスのような現象は実際のネットワークデザインにおいて存在するが、ネットワークの構造が及ぼす意思決定への影響を考慮できない MNL 型モデルで

はネットワークの構造上のもたらされるパラドクスを過小評価してしまう恐れがある。

GEV(generalized extreme value)モデルとして、CNLモデルを考える。複数のネストへの帰属の程度をそれぞれ構造的に定義する。経路選択のツリー構造は、リンクベースのネスティングを行い、下位レベルで実経路の選択を考える。経路 k 、およびリンク a の選択確率は以下の式(7) - (9)で表すことができる。

$$P_k = \sum_a P_a P_{k|a} \quad (7)$$

$$P_k = \frac{\left(\sum_{k' \in N_a} [\alpha_{ak'} e^{V_{k'}}]^{1/\mu} \right)^\mu}{\sum_{a' \in M_k} \left(\sum_{k' \in N_{a'}} [\alpha_{a'k'} e^{V_{k'}}]^{1/\mu} \right)^\mu} \quad (8)$$

$$P_{k|a} = \frac{[\alpha_{ak} e^{V_k}]^{1/\mu}}{\left[\sum_{k' \in N_a} \alpha_{ak'} e^{V_{k'}} \right]^{1/\mu}} \quad (9)$$

α_{ak} はアロケーションパラメータであり、各ネスト(リンク)に対する経路の帰属の程度を示し、以下の条件を満たす。

$$0 \leq \alpha_{ak} < 1, \sum_a \alpha_{ak} = 1, \forall k \quad (10)$$

$$\alpha_{ak} = \left(\frac{L_a}{L_k} \right)^\gamma \delta_{ak} \quad (11)$$

ここで、 L_k はパス k の長さを、 L_a はリンク a の長さを示す。 $\delta_{ak}=1$ なら経路 k 上にリンク a があることを示す。

(2)最適混雑料金の定式化

リンク a の一般化費用 $c_a(x_a)$ をリンク所要時間 $t_a(x_a)$ とリンクごとに課す課金 d_a との和として定義し、MNL型SUE配分下における、最適混雑料金の求め方と同様に、二段階最適化問題を考える。

CNL型SUE配分の最適化問題を以下に示す。

$$\begin{aligned} \min . Z = & \sum_a \int_0^{x_a} c_a(w) dw + \frac{\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_a \sum_k f_{ak}^{rs} \ln \frac{f_{ak}^{rs}}{(\alpha_{ak}^{rs})^{1/\mu}} \\ & + \frac{1-\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_a \left(\sum_k f_{ak}^{rs} \right) \ln \left(\sum_k f_{ak}^{rs} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、最適化が達成された状態を想定し一般化費用についてのCNL型配分結果とSO配分において走行費用が一致するための必要十分条件を考える(式(13))

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_a \sum_k f_{ak}^{rs} \ln \frac{f_{ak}^{rs}}{(\alpha_{ak}^{rs})^{1/\mu}} + \frac{1-\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_a \left(\sum_k f_{ak}^{rs} \right) \ln \left(\sum_k f_{ak}^{rs} \right) \\ = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(w) dw - \sum_a \int_0^{x_a} \hat{t}_a(w) dw \end{aligned} \quad (13)$$

OD交通量を q^{rs} とすると、以下のように表せる。

$$\sum_a \sum_k f_{ak}^{rs} = q^{rs} \quad (14)$$

また、式(9)は両辺を f_{ak}^{rs} で偏微分することにより得られる次式と等価である。

$$\frac{\mu}{\theta} \cdot \frac{q^{rs}}{f_{ak}^{rs}} + \frac{1-\mu}{\theta} \cdot \frac{q^{rs}}{\sum_k f_{ak}^{rs}} = (t_k^\circ + e_k) - \hat{t}_k^\circ \quad (15)$$

ここで、上付き添え字 $^\circ$ はSO状態に対応していることを示す。また、 \hat{t}_k° は限界経路所要時間である。

$$\hat{t}_k^\circ = \sum_a \hat{t}_a \delta_{ak}^{rs}$$

よって、経路課金は以下のように表せる。

$$e_k = \hat{t}_k^\circ - t_k^\circ + \frac{\mu}{\theta} \cdot \frac{q^{rs}}{f_{ak}^{rs}} + \frac{1-\mu}{\theta} \cdot \frac{q^{rs}}{\sum_k f_{ak}^{rs}} \quad (16)$$

4. 仮想ネットワークを用いた計算例

図-1のような1OD3経路の仮想ネットワークを用いて最適混雑料金の計算を行う。リンク1と5がそれぞれ経路1,3間、2,3間における重複リンクとなり、リンクコストは以下のBPR関数を用いる。

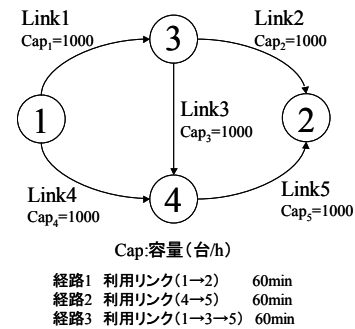


図-1 仮想ネットワーク

$$t_a(x_a) = t_{a0} \left\{ 1 + \alpha (x_a / Cap_a)^\beta \right\} \quad (17)$$

$t_a(x_a)$:リンクコスト

t_{a0} :リンク自由走行コスト

x_a :リンク交通量

Cap_a :リンク容量

α, β :パラメータ($\alpha = 1.0, \beta = 3.0$)

(1) 課金の変動

OD 交通量, 容量, ネットワークの重複率の変化, またスケールパラメーター θ の変化に対して課金がどのように変動するのか, MNL 型最適混雑料金の基本的な特性を検証する.

a) OD 交通量の変化

経路 3 の重複率 0.5 に固定し, OD 交通量を 500→1000→3000 (台/hr) と変化させる. 各リンクとも OD 交通量が多くなるにつれ混雑料金が高くなり, 経路 3 は各 OD 交通量に対して常に最も高くなる. また最も課金の高いリンクは OD 交通量によって異なる. 課金パターンを混雑レベルに応じて制御する必要があるといえる.

b) 容量の変化

OD 交通量を 1000 (台/h), 経路 3 の重複率 0.5 に固定し, リンク 3 の容量を 500→1000→3000 (台/hr) と変化させる. リンク 3 の容量が大きくなるにつれリンク 3 の課金は低くなり, 重複リンク(1, 5)の課金は高くなる. またリンク 3 の容量を増加させた場合経路 3 の課金は減少する.

c) 重複率の変化

OD 交通量を 1000 (台/h) に固定し, 経路 3 の重複率を 0.1→0.5→0.9 と変化させる. 重複率が高くなるにつれ, 各リンクの課金は高くなり, 経路 1, 2 と経路 3 の課金の差が拡大する.

表-1 重複率の変化に対する課金変化

経路番号	経路料金 (min)		
	経路3重複率		
	0.1	0.5	0.9
1, 2	20.24	27.50	29.63
3	21.50	36.17	56.20
差	1.26	8.67	26.57

d) スケールパラメーター θ の変化

OD 交通量を 1000 (台/h), 経路 3 の重複率を 0.5

に固定し, スケールパラメーター θ を 0.01→0.1→5 と変化させる. θ の値が大きくなるにつれ, 各リンクの混雑料金は低くなり, 経路間の課金差が小さくなる. また課金レベルはスケールパラメーター θ の大小によって大きく変化するが, その変動幅はリンクによって異なる.

表-2 θ の値に対する混雑料金

リンク番号	混雑料金 (min)		
	スケールパラメーター θ		
	0.01	0.1	5
1	77.29	15.92	9.24
2	29.58	11.58	9.62
3	97.72	10.19	0.66
4	87.94	17.35	9.67
5	19.06	10.06	9.08

(2) MNL 型配分と CNL 型配分の比較

次に, MNL 型と CNL 型の配分結果を総旅行時間に着目して比較する. 対象とするネットワークを図-1 に示す.

a) θ を変化させた場合

重複率 0.5, OD 交通量 1000 (台/h) とし, θ を変化させて配分を行った. CNL 型の総旅行時間は常に MNL 型より小さくなる. θ を大きくしたとき, 双方とも総旅行時間が減少する.

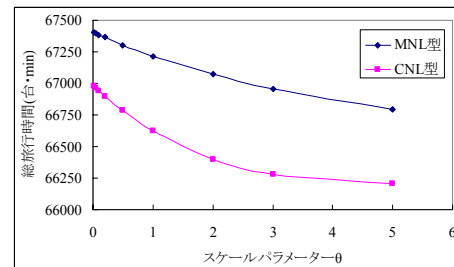


図-2 θ と総旅行時間の関係

b) OD 交通量を変化させた場合

重複率 0.5, $\theta = 0.1$ とし, OD 交通量を変化させて配分を行った. OD 交通量の変化に対して, 双方の総旅行時間に対する感度はほぼ同様の結果を示した.

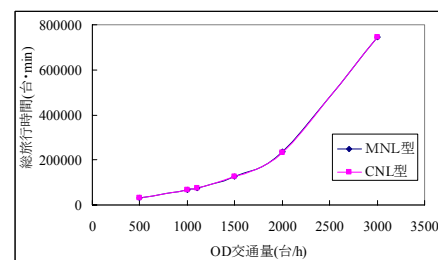


図-3 OD 交通量と総旅行時間の関係

c) パラドックスを発生させるリンクに課金を行う場合

重複率 0.1, 0.5, 0.9, OD 交通量 1000 (台/h) とし, リンク 3 のみに課金する. MNL 型よりも CNL 型の方が課金に対する感度が高い. 特に重複率 0.9 では Braess のパラドックスが生じており, 課金額によって旅行時間が非線形に変化することがわかる.

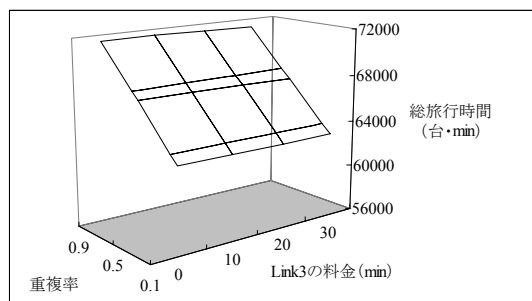


図-4 リンク 3 課金と総旅行時間の関係 (MNL 型)

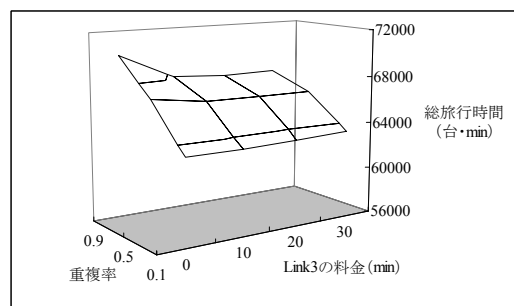


図-5 リンク 3 課金と総旅行時間の関係 (CNL 型)

(3) 課金後の配分結果

2, 3 で求めた混雑料金を図-1 のネットワークに課金し, それぞれ配分計算を行うと SO 配分に一致することがわかる.

表-3 交通量配分結果

リンク 番号	リンク交通量(台/h)				
	SO	MNL	課金後の MNL	CNL	課金後の CNL
1	587	666	586	650	586
2	414	334	414	350	414
3	173	332	173	299	171
4	413	334	413	350	414
5	586	666	586	650	586

※OD 交通量 1000 (台/h) 重複率 0.5

5. 混雑料金の比較

図-1 のネットワークにおいて, MNL 型と CNL 型の混雑料金の比較を行う.

表-4 重複率 0.1 の混雑料金

OD交通量 (台/h)	配分方法	経路料金 (min)		
		1	2	3
500	MNL	11.77	11.81	13.05
	CNL	29.95	30.10	33.89
1000	MNL	20.24	20.24	21.50
	CNL	38.47	38.47	42.33
3000	MNL	271.71	271.05	272.39
	CNL	289.92	289.28	293.23

表-5 重複率 0.5 の混雑料金

OD交通量 (台/h)	配分方法	経路料金 (min)		
		1	2	3
500	MNL	11.15	11.15	19.92
	CNL	26.48	26.48	60.46
1000	MNL	27.50	27.41	36.17
	CNL	42.84	42.78	76.43
3000	MNL	512.17	511.14	520.37
	CNL	527.52	526.50	560.63

表-6 重複率 0.9 の混雑料金

OD交通量 (台/h)	配分方法	経路料金 (min)		
		1	2	3
500	MNL	10.07	10.07	36.61
	CNL	23.47	23.52	296.92
1000	MNL	29.63	29.63	56.20
	CNL	43.05	43.05	316.50
3000	MNL	611.30	610.10	637.78
	CNL	624.72	623.53	900.90

各計算パターンにおいて, MNL 型配分の混雑料金よりも, CNL 型配分の混雑料金が大きな値を示している. 経路別の課金差に着目すると, 重複率が少ないネットワークでは経路間の課金差は少ない. 一方ネットワークの重複率が高くなるにつれ, CNL 型において経路間の課金差が拡大していることがわかる. ネットワーク構造の変化に対して課金パターンの変化の感度は CNL 型で高いといえよう.

6. まとめと今後の課題

本研究では, MNL 型 SUE 配分下での最適混雑料金の基本的な特性を理解した. その後, 混雑料金を CNL 型 SUE 配分下での拡張を行った. しかしながらその混雑料金は, 図-1 のような特定のネットワークでのみの算出であり, 一般ネットワークへの適用はこれからの課題である. また CNL 型のリンク最適混雑料金の導出も行い, MNL 型のリンク課金と比較する必要がある.

参考文献

- 1) 赤松隆・桑原雅夫, 確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金, 土木学会論文集, 第 389 号/IV-8, pp.121-129, 1988