災害による不連続的劣化を考慮した施設の最適点検・補修戦略問題[*1]

An Optimal Monitoring and Repairing Problem for Infrastructures under Natural Disaster Risk[*1]

長江 剛志[*2]・多々納 裕一[*3]

By Takeshi NAGAE[*2] and Hirokazu TATANO[*3]

1 はじめに

橋梁, トンネル, 空港・港湾といった, 大規模な社会基盤施設の多くは，自然災害がもたらすリスク (以下，災害リスク) に晒されている．ここで，災害リスクとは，地震や洪水といった，突発的に発生する自然災害によって，その力学的強度 (以下，機能水準) が不連続的に減少し，それによって，予測しない補修費用の発生のみならず，施設供用ができなくなる危険性として定義する．こうした災害リスクに直面する施設に対しては，事後的保全 (CM: *Corrective Maintenance*) のみならず，予防的保全 (PM: *Preventive Maintenance*) が必要不可欠である．

長江・多々納 [1] は，こうした自然災害リスク下での施設の最適 PM 問題に対し，連続時間-連続状態の一般的な枠組に適用できる定量的手法の枠組を提案した．しかし，この研究では，常に機能水準が直接観測できることを前提としているため，社会基盤施設にそのまま適用するには問題が残る．なぜなら，水道管などの地下埋蔵施設をはじめとする多くの社会基盤施設は，点検業務を通じてのみ施設の機能水準を観測することができ，その際に無視できない費用（以下，点検費用）が発生するためである．そこで，本研究では，長江・多々納 [1] の枠組を，施設点検のタイミング (および点検費用) を明示的に考慮したものへと拡張する．

本稿は以下のように構成される．続く 2 では，最適点検・補修問題を確率制御問題として定式化する．3 では，この問題の最適性条件を準変分不等式問題 (QVIP: *Quasi Variational Inequality Problem*) として記述する．最後に，4 では，問題の数値解法を議論する．このために，まず，3 で求めた QVIP を離散表現したものが，適切な変数変換によって標準形の非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) に帰着することを明らかにする．この分析結果を利用して，相補性問題の数値解法に関する最近の理論を活用した解法を開発する．

[*1] キーワーズ：防災計画，計画手法論，土木施設維持管理

[*2] 正会員，博士（情報科学）神戸大学大学院自然科学研究科
(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

[*3] 正会員，工博，京都大学防災研究所総合防災研究部門
(〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

2 定式化

(1) モデルの枠組

単一の施設を無限期間 $\mathcal{T} \equiv [0,\infty)$ に渡って維持・管理する主体を考える．この無限期間における事象集合 Ω およびそのフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t)|t \in \mathcal{T}\}$ を考え，可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathcal{P}$ を定義する．これらの 3 つ組で構成される確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ 上の任意の確率過程 $X : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathcal{R}$ を $X(t) \equiv X(t,\omega)$ で表現する．

管理主体は，管理期間 $\mathcal{T}$ 中に施設から発生するキャッシュ・フローの期待現在正味価値 (ENPV:*Expected Net Present Value*) 最大化を目的とする．このキャッシュ・フローは，以下の 4 つの部分から構成されるとする：a) 毎時刻発生する利用便益フロー f(t); b) 施設を補修している間，毎時刻発生する補修費用フロー $c(t)$; c) 施設を点検する瞬間に発生する点検費用 M; d) 破壊された施設を建設しなおす瞬間に発生する再建設費用 R．これらのキャッシュ・フローは，後述する管理者の戦略，および当該時刻における施設の機能水準に依存して決定する．

任意の時刻 $t \in \mathcal{T}$ における当該施設の機能水準を，1 次元の状態変数 $P(t)$ を用いて集約的に表現しよう．供用開始時の施設の機能水準を $P(0) = \bar{P}$ で表し，施設が破壊されて供用不可能となる機能水準を $P = 0$ で表す．施設の機能水準は，経年劣化によって連続的に減少するのみならず，自然災害の発生によって不連続的に減少 (下方ジャンプ) する．施設が破壊されない間 (i.e. $P(t) > 0$) ならば，補修を行うことで有限の速度で機能水準を回復させられるが，ひとたび施設が破壊された (i.e. $P(t) = 0$) 場合，管理者は即座に費用 R を支払って機能水準 $\bar{P}$ の施設を再建設するものと仮定する．

本研究では，図 1 に示すように，管理期間 $\mathcal{T} \equiv [0,\infty)$ が，供用，点検，および補修という 3 つのフェイズを 1 サイクルとしたサブ期間集合 $\{\mathcal{T}^k|k \in \mathcal{K}\}$ で構成されるとする ($\mathcal{K} \equiv \{1,2,\cdots\}$ は，サブ期間のインデクス集合とする)．管理者は，観測される機能水準に応じて状況依存的にこれらのフェイズを切り替えることで，キャッシュ・フロー流列および施設の機能水準をコントロールする．

(2) キャッシュ・フロー流列および機能水準プロセス

本節では，第 k 番目のサブ期間 $\mathcal{T}^k \equiv [T^k, T^{k+1})$ を構成するフェイズごとに，発生するキャッシュ・フローおよび施設の機能水準が従うプロセスを記述する．

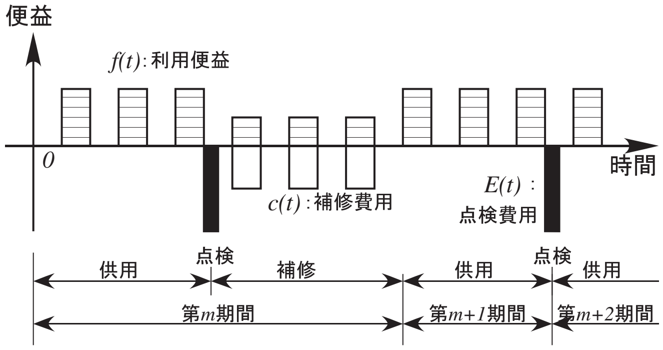

図１　維持・管理サイクル

(a)　供用フェイズ (O)

施設の全てが供用される段階を “供用フェイズ” と呼び，その期間を $[T^k, \tau^k)$ で表す．供用フェイズにおいては，毎時刻，利用便益が発生する一方で，施設の経年劣化によって機能水準が減少する．さらに，供用フェイズが開始された後は，次の点検時刻 τ^k まで機能水準を直接観測することはできないものとする．

供用フェイズにおいて発生する単位時間当たりの利用便益を，$f(t) = f_{\mathrm{O}}$ (f_{O} は所与の定数) で表す．供用フェイズ中に機能水準が従うプロセスを以下の伊藤確率過程で表現する．

$$\mathrm{d}P(t) = \mu(P)\,\mathrm{d}t + \sigma(P)\,\mathrm{d}W(t) - \eta(P)\,\mathrm{d}q(t). \qquad (1)$$

ここで，$W(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の 1 次元 Wiener 過程，$q(t)$ は，強度 λ の Poisson 過程である（すなわち，微少時間 $[t, t+\mathrm{d}t]$ におけるその増分 $\mathrm{d}q(t)$ が，確率 $\lambda\mathrm{d}t$ で 1 となり，確率 $1-\lambda\mathrm{d}t$ で 0 となる）．式 (1) の右辺の第 1 項および第 2 項は，それぞれ，経年劣化による機能水準の低下量の期待値および分散を表し，その単位時間当たりの大きさ $\mu, \sigma : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$ は，それぞれ，$\mu(0) = 0, \sigma(0) = 0, \sigma(\overline{P}) = 0$ なる性質を満たす所与の関数である．式 (1) の右辺第 3 項は，自然災害による機能水準の減少分を表し，その大きさを表す関数 $\eta(\cdot)$ は与件であるとする．

(b)　点検フェイズ (M)

施設の点検が行われ，機能水準が観測される瞬間を “点検フェイズ” と呼び，その時刻を τ^k で表す．点検フェイズにおいては，点検費用 M (所与の定数) のみが発生する．

(c)　補修フェイズ (R)

施設の補修が行われる段階を “補修フェイズ” と呼び，その期間を $[\tau^k, T^{k+1})$ で表す．サブ期間によっては補修フェイズが存在しないこともある (i.e. $\tau^k = T^{k+1}$)．これは，点検後に必ずしも補修が行われるわけではないことを反映している．補修フェイズにおいては，毎時刻補修費用フローが発生するが，補修工事によって施設の供用が制限される (e.g. 路面舗装補修を行う際の片側交互通行)．一方で，補修によって機能水準が時々刻々回復し，その値を (追加点検費用を支払うことなく)，毎時刻，直接観測できるとする．

補修フェイズの時刻 t において発生する単位時間当たりの便益および補修費用を，それぞれ，$f(t) = f_{\mathrm{R}}$ および $c(t) = c(P)$ で表す．ここで，$f_{\mathrm{R}} (< f_{\mathrm{O}})$ は所与の定数，$c(P)$ は $c(P) > 0, c'(P) < 0$ なる性質を満たす所与の関数とする．補修フェイズで機能水準が従うプロセスを以下の伊藤確率過程で表現する．

$$\mathrm{d}P(t) = [x - \mu(P)]\,\mathrm{d}t + \sigma(P)\,\mathrm{d}W(t) - \eta(P)\,\mathrm{d}q(t). \qquad (2)$$

ここで，x は単位時間当たりの機能水準の回復量を表す所与の定数であり，経年劣化による機能水準の減少量に対して十分に大きいとする (i.e. $x \gg \mu(P), \forall P$).

(3)　定式化

上述の枠組下で，第 k 期間における管理主体の戦略は，点検時刻 τ^k と補修終了時刻 T^{k+1} の 2 つ組 $S^k \equiv (\tau^k, T^{k+1})$ で表される．管理主体は，対象施設から期間 $[0, \infty)$ 中に発生するキャッシュ・フロー流列の ENPV を最大化するように，点検・補修戦略 $\{S^k\}_{k\in\mathcal{K}}$ を決定する．この問題は，以下の確率制御問題として定式化される．

[P]
$$\max_{\{S^k\}_{k\in\mathcal{K}}} \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(0; S) | P(0) = \overline{P}\right], \ \text{s.t.(1) and (2).}$$

ここで，$\mathcal{J}(t; S)$ は，点検・補修戦略 $\{\tau^k, T^k\}$ の下で期間 $[t, \infty)$ 中に得られるキャッシュ・フローを，時刻 t で評価した ENPV であり，以下の式で定義される．

$$\mathcal{J}(t; S) \equiv \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} \left[f(s) - c(P(s))\right] \mathrm{d}s - \sum_{k\in\mathcal{K}(t)} e^{-\rho(\tau^k - t)} M, \qquad (3)$$

この式の右辺第 1 項および第 2 項は，それぞれ，施設から毎時刻発生する純便益 (利用便益から補修費用を差し引いたもの)，および点検費用の現在価値を表している．ただし，ρ は割引率を表し，$\mathcal{K}(t)$ は，時刻 t 以降に始まるサブ期間のインデクス集合である．

3　最適性条件の導出

(1)　準変分不等式問題としての最適性条件の表現

本節では，問題 [P] の最適性条件を導出し，それが無限次元の準変分不等式問題 (QVIP: *Quasi Variational Inequality Problem*) として記述できることを明らかにする．まず，時刻 t に機能水準 $P(t) = P$ が観測された*1ときの問題 [P] の最適値関数を以下のように定義しよう．

$$V(t, P) \equiv \max_{\{S^k\}_{k\in\mathcal{K}(t)}} \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(t; S) | P(t) = P\right], \ \text{s.t.(1) and (2).} \qquad (4)$$

この最適値関数は，最適戦略の下で期間 $[t, \infty]$ 中に得られるキャッシュ・フロー流列の ENPV を表す．問題 [P] は無限

*1　補修を開始する際に初期費用が発生しないため，時刻 t が点検直後なのか補修フェイズ中なのかを区別する必要はない．

期間を対象とするため，その最適値関数は，時計時刻 t には依存しない．そこで，以下では，時計時刻を $t=0$ で基準化し，最適値関数を，時刻 $t=0$ で観測された機能水準 P のみの関数 $V(P) \equiv V(t,P)$ で表現する．

式 (4) の最適値関数は，期待値のネストを用いて以下のように書き直せる．

$$V(P) = \max_{(T,\tau)} \mathrm{E}\Bigg[\int_0^T e^{-\rho t}\,[f_{\mathrm{R}} - c(P(t))]\,\mathrm{d}t + \int_T^{\tau} e^{-\rho t} f_{\mathrm{O}}\,\mathrm{d}t + e^{-\rho\tau}\mathrm{E}\left[\left\{\mathcal{J}(\tau;S) - M\Big|P(T)\right\}\right]\Bigg|P(0)=P\Bigg] \quad (5)$$

この式の右辺の期待演算子内の第 1 項および第 2 項は，それぞれ，最近の補修終了時刻までの期間 $[0,T)$，およびその次の点検までの期間 $[T,\tau)$ に獲得するキャッシュ・フローの ENPV である．そして，第 3 項は次の点検以降 $[\tau,\infty)$ に最適戦略の下で獲得するキャッシュ・フローの ENPV である．すなわち，第 3 項は，時刻 T に機能水準 $P(T)$ が観測されたときの最適値関数に他ならない．これを利用すれば，式 (5) は，以下の再帰方程式として書き直せる．

$$V(P) = \max_{(T,\tau)} \mathrm{E}\Bigg[\int_0^T e^{-\rho t}\,[f_{\mathrm{R}} - c(P(t))]\,\mathrm{d}t + \int_T^{\tau} e^{-\rho t} f_{\mathrm{O}}\,\mathrm{d}t + e^{-\rho T}\{V(P(T)) - M\}\Bigg|P(0)=P\Bigg] \quad (6)$$

式 (6) の再帰方程式に DP (*Dynamic Programming*) 原理を適用すれば，機能水準 P が観測されている下での最適行動は，以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：a) 微少時間 $\mathrm{d}t$ だけ補修を行う；b) 次の点検時刻 τ を決定し，供用フェイズを開始する．以下では，それぞれの選択について，最適値関数が従う条件を述べる．

■i) 微少時間だけ補修を行う場合　この場合，最適値関数の定義より，以下の不等式が成立する．

$$V(P) \geq [f_{\mathrm{R}} - c(P)]\,\mathrm{d}t + e^{-\rho\,\mathrm{d}t}\mathrm{E}\,[V(P) + \mathrm{d}V(P)|P(0)=P].$$

右辺第 2 項に Ito の補題を適用して整理すれば，以下の不等式を得る．

$$-\mathcal{D}_{\mathrm{R}}V(P) - f_{\mathrm{R}} + c(P) \geq 0. \quad (7)$$

ここで，$\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ は，補修フェイズ中に機能水準が従うプロセス (2) のみから決定される (常) 微分作用素であり，以下の式で定義される

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}}V(P) \equiv [x - \mu(P)]V'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2(P)V''(P) - (\rho+\lambda)V(P) + \lambda V(P - \eta(P)). \quad (8)$$

■ii) 次の点検時刻 τ まで供用フェイズを継続する場合　管理者は，現時刻で観測されている機能情報 $P(0)=P$ のみに基づいて点検時刻 τ を決定するため，最適値関数の定義より，以下の不等式が成立する．

$$V(P) \geq \max_{\tau} \mathrm{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\rho t} f_{\mathrm{O}}\,\mathrm{d}t + e^{-\rho\tau}\{V(P(\tau)) - M\}\,|P(0)=P\right].$$

左辺から右辺を引いて整理すれば，以下の不等式を得る．

$$-\Psi V(P) + V(P) \geq 0 \quad (9)$$

ここで，$\Psi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は，以下で定義される写像である．

$$\Psi V(P) \equiv \max_{\tau} \frac{f_{\mathrm{O}}}{\rho} - e^{-\rho\tau}\left\{\frac{f_{\mathrm{O}}}{\rho} + M\right\} + e^{-\rho\tau}\mathrm{E}\,[V(P(\tau))|P(0)=P]. \quad (10)$$

任意の機能水準について，上記 2 つの選択肢 i), ii) は排他的である．すなわち，式 (7), (9) のいずれかについてのみ等号が成立する．これより，問題 [P] の最適性条件は，以下の QVIP として表現される．

> [QVIP'] Find $\{V(P)|P \in \mathcal{R}_+\}$ such that
> $$\min.\left\{-\mathcal{D}_{\mathrm{R}}V(P) - f_{\mathrm{M}} - c(P),\ -\Psi V(P) + V(P)\right\} = 0,\ \forall P \in \mathcal{R}_+.$$

ただし，下側境界条件は以下の式で与えられる．

$$\lim_{P\to 0} V(P) = V(\bar{P}) - R. \quad (11)$$

(2)　サブ問題—最適点検時刻問題

問題 [QVIP'] は，最適値関数 $\{V(P)\}$ が “仮に” 与えられたとき，供用フェイズ開始時点で観測される機能水準 $P \in \mathcal{R}_+$ ごとに最適点検時刻 $\{\tau(P)\}$ を求める次の問題を下位に持つ．

[SP'] Find $\{\tau(P)|P \in \mathcal{R}_+\}$ such that

$$\max_{\tau} \frac{f_{\mathrm{O}}}{\rho} - e^{-\rho\tau}\left\{\frac{f_{\mathrm{O}}}{\rho} + M\right\} + \phi(\tau, P; V).$$

ここで，

$$\phi(\tau, P; V) \equiv e^{-\rho\tau-}\mathrm{E}\,[V(P(\tau))|P(0)=P]. \quad (12)$$

は，以下の偏微分方程式の Feynman-Kac 解であることが知られている．

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\mathrm{O}}\phi(\tau, P; V) = 0 \\ \quad \phi(0, P; V) = V(P) \end{cases} \quad (13)$$

ただし，$\mathcal{L}_{\mathrm{O}}$ は以下の式で定義される偏微分作用素である．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{O}}\phi(\tau, P; V) = \left\{-\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu(P)\frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma^2(P)\frac{\partial^2}{\partial P^2} - (\rho+\lambda)\right\}\phi(t, P; V) + \lambda\phi(t, P - \eta(P); V) \quad (14)$$

偏微分方程式 (13) は，サブ問題 [SP] の解とは無関係に，与えられた最適値関数 $\{V(P)\}$ のみから予め計算しておけることに注意されたい．

4　数値計算

これまでの議論により，最適点検・補修問題 [P] は，準変分不等式問題 [QVIP'] として表現できることが判った．一般に，問題 [QVIP'] は解析的に解けないため，最適値関数および最適点検・補修は数値計算によって求めざるを得ない．以下では，その数値計算方法を議論しよう．

(1)　問題の離散的表現

機能水準がとる領域 $[0, \bar{P}]$ を，$\gamma \equiv \{P^j \equiv j\Delta P | j = 0, 1, \cdots, \mathrm{J}\}$ なる点列を用いて離散表現する．任意の関数 $f : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ の γ 上の各点での値を $f^j \equiv f(P^j)$ およびベクトル $\boldsymbol{f} \equiv \{f^1, \cdots, f^{\mathrm{J}}\}'$ で表す．

この離散的枠組下で，問題 [QVIP'] の最適値関数 $\{V(P)\}$ をベクトル $\boldsymbol{V} \equiv \{V^1, \cdots, V^{\mathrm{J}}\}$ で表すとき，式 (8) の微分作用素 $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ は，以下のように離散近似できる．

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} V(P) \approx \boldsymbol{D}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{V} \tag{15}$$

ただし，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}} \equiv \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{Q}$ である．ここで，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$ は以下の式で定義される 3 項帯行列である．

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} \equiv \begin{bmatrix} b^1 & c^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{\mathrm{J}} & b^{\mathrm{J}} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

where $a^j \equiv \frac{-x+\mu^j}{2\Delta P} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^j}{\Delta P}\right)^2$, $b^j \equiv -\left(\frac{\sigma^j}{\Delta P}\right)^2 - (\rho + \lambda)$, $c^j \equiv \frac{x-\mu^j}{2\Delta P} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^j}{\Delta P}\right)^2$. $\boldsymbol{Q}$ は J×J 行列であり，その (j, j') 要素 $Q^{j,j'}$ が以下の式で定義される：

$$Q^{j,j'} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j' \leq \frac{P^j - \eta(P^j)}{\Delta P} < j' + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

このとき，準変分不等式問題 [QVIP'] は，以下の有限次元 QVIP として表現される．

[QVIP] Find $\boldsymbol{V} \in \mathcal{R}^{\mathrm{J}}$ such that

$$\min\{-\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{1} f_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{c}, -\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{V}\} = \boldsymbol{0}$$

ここで，$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{V})$ は，式 (10) で定義される写像を離散表現したものである．

(2)　変数変換による標準形相補性問題への帰着

問題 [QVIP] は，そのままの形では解きにくい問題である．そこで，本節の残りの部分では，この問題が適切な変数変換によって標準形の非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) に帰着することを明らかにする．まず，問題 [P] の最適値関数に対して，以下の変数変換を考えよう．

$$\boldsymbol{X} \equiv -\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{1} f_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{c}. \tag{18}$$

このとき，行列 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}$ が非退化であれば，逆行列 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}^{-1}$ が存在し，元の最適値関数は，新しい未知変数 $\boldsymbol{X}$ を用いて

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}^{-1}\{-\boldsymbol{X} - \boldsymbol{1} f_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{c}\}. \tag{19}$$

と書き直せる．これを問題 [QVIP] に代入して整理すれば，以下の有限次元の標準形 NCP を得る．

[NCP] Find $\boldsymbol{X} > \boldsymbol{0}$ such that

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) = 0, \quad \boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{0}.$$

ここで，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}))$ である．このような標準形の相補性問題の効率的解法に関しては，数理計画の分野において近年進歩が著しく，そこで開発された解法を利用することで問題 [NCP] を解くことができる [1, 3]．

以上の議論より，最適点検・補修問題 [P] の最適値関数は，①問題 [NCP] を解き，$\boldsymbol{X}$ を求め，②変数逆変換式 (19) より $\boldsymbol{V}$ を求める，という 2 段階の手順により求められる．

5　おわりに

本研究では，災害リスクに直面する社会基盤施設に関し，最適な補修・点検タイミングを求めるための定量的分析手法を提案した．その具体的な適用例および数値計算結果については，講演会で報告する予定である．

付録Ａ　写像 $\boldsymbol{\Psi}(V)$ の計算方法

供用フェイズ開始後の時刻 τ を，点列 $\{\tau^i \equiv i\Delta t | i = 0, 1, \cdots\}$ で離散表現し，時刻 τ^i における未知関数 $\phi(\tau, P; V)$ の，点列 γ 上の値を $\boldsymbol{\phi}^i \equiv \{\phi(\tau^i, P^j)\}$ で離散表現する．

この枠組下で偏微分方程式 (13) は，以下の差分方程式：

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{\phi}^i + \boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{i+1} = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

で近似できる（ただし，初期条件は $\boldsymbol{\phi}^0 = \boldsymbol{V}$）．ここで，$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ は，式 (14) の偏微分作用素を適当なスキームで差分近似して得られる J×J 正方行列である．この式は，ある時点での未知関数 $\boldsymbol{\phi}^i$ が既知ならば，次の時点での未知関数 $\boldsymbol{\phi}^{i+1}$ が線型方程式の解として求められることを意味している．すなわち，初期条件 $\boldsymbol{\phi}^0 = \boldsymbol{V}$ より $\boldsymbol{\phi}^1$ が計算でき，さらにそれを用いれば $\boldsymbol{\phi}^2$ を計算できる．この手続きを十分な回数繰り返せば，任意の時点における未知関数 $\{\boldsymbol{\phi}^i | i = 0, 1, \cdots\}$ が求められる．

こうして求めた $\{\boldsymbol{\phi}^i\}$ を用いれば，最適点検時刻問題 [SP'] を離散表現した以下の問題

$$\text{[SP]} \quad \max_i . \frac{f_{\mathrm{O}}}{\rho} - e^{-\rho\tau^i}\left\{\frac{f_{\mathrm{O}}}{\rho} + M\right\} + \phi(\tau^i, P^j; \boldsymbol{V}), \forall j \in J$$

の解 (i.e. 最適点検時点 i)，および写像 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{V})$ は容易に計算できる．

参考文献

1) 長江剛志, 多々納裕一：自然災害リスク下での施設の最適予防的保全問題：確率的インパルス制御アプローチ, 土木計画学研究・講演集, Vol. 29, pp. CD–ROM, 2004.
2) 慈道充, 小林潔司：不確実性下における最適点検・修繕ルール, 土木学会論文集, No. 744/IV-61, pp. 39–50, 2003.
3) 赤松隆, 長江剛志：不確実性下での社会基盤投資・運用問題に対する変分不等式アプローチ, 土木学会論文集, 2004, 投稿中.