社会基盤システムの集計的アセットマネジメントモデル *

ASSET MANAGEMENT MODEL FOR INFRASTRUCTURE SYSTEMS:APPROXIMATE APPROARCH*

織田澤利守**・小林潔司***
by Toshimori OTAZAWA** and Kiyoshi KOBAYASHI***

1. はじめに

社会基盤システムには，時間の進展に伴って，力学的強度の低下といった物理的劣化だけでなく，システムの機能が時代の要請に応えられなくなるという経済的劣化も発生する．システムの物理的劣化が進展した場合，修繕によりシステムのサービス水準を回復することができる．しかし，経済的劣化に対しては，システムの経済的機能の向上や他用途への転用のためにシステムの更新が必要となる．そのため，経済的劣化と物理的劣化を同時に考慮した社会基盤システムの効率的なマネジメント政策を策定する必要がある．ただし，システムを構成するサブシステムの数が多くなると，システムの経済的・物理的な劣化状態の組み合わせで表されるシステムの状態変数の数が膨大となり，最適政策を求めることが極めて困難となる．本研究ではサブシステムの劣化状態を集計的に表現する状態変数を導入した集計的最適アセットマネジメントモデルを定式化し，多くのサブシステムで構成されるシステムの最適マネジメント政策を求める簡便な方法論を提案する．

2. 本研究の基本的な考え方

システムが提供するサービス内容は時間とともに陳腐化し，経済的寿命に到達した社会基盤システムは，更新・転用のため廃棄される．一方，システムが経済的寿命に到達するまでは，利用者に対してサービスが提供される．物理的劣化により，システムのサービス水準は時間とともに不確実に低下する．システムが運営される間は，適切な修繕の実施により，システムが維持される必要がある．システム管理者は，システムを運営管理により獲得できる経済便益と，システムを転用もしくは機能更新により得られる潜在的経済便益を計測し，当該システムの運営を継続するか，運営を終了しシステムを別の用途に転用するかを決定する．ただし，システム運営によってもたらされる経済便益は不確実性を有する．このとき，アセットマネジメント政策は，経済状態とサブシステムの劣化状態の組み合わせで定義されるシステム状態に依存したアクションルールとして導出される．しかし，サブシステムの数が増加するにつれて，システム状態を表す状態変数の数が膨大になるという問題が生じる．そのような問題を回避するために，システムの劣化状態を集計的に表現する集計的状態変数を導入したアセットマネジメントモデルを提案する．そこでは，サブシステムの劣化状態を「良好な状態」(以下，G状態とよぶ）と「注意して管理すべき状態」（以下，D状態とよぶ）と「修繕すべき状態」（以下，R状態と呼ぶ）の３つに区分し，システム状態をD状態とR状態にあるサブシステム数で表現する．ここで，D状態とは近い将来に劣化状態が臨界的劣化水準に到達し，修繕が必要となるような状態を意味する．

3. モデル

(1) モデル化の前提条件

時点$i=0$を起点とする時間軸上に等間隔に設定された離散的時点i $(i=0,1,2,\cdots)$を考えよう．システム管理者は各時点iにおいて，社会基盤システムがもたらす経済的価値とシステムを構成する各サブ

*キーワーズ：アセットマネジメント，マルコフ決定過程，集計的アプローチ
**正会員 博（工学） 東北大学大学院情報科学研究科
（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06 TEL022-217-7502，FAX 022-217-7500）
***フェロー 工博 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻
（〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5071）

システムの物理的劣化状態を観測する．各時点におけるシステムの経済状態を有限の状態変数m $(m=1,\cdots,M)$を用いて表し，経済状態mが実現したときにシステムがもたらす経済的価値を$B(m)$と表す．ただし，経済的価値は時点iから時点$i+1$までの期間中に当該システムがもたらす期待便益の総和を時点iの当該期価値で評価した結果である．状態変数mが大きいほど，当該時点におけるシステムの経済的価値は大きくなる．一方, システムを転用した場合に獲得できるシステム価値の最大値をΘと表し，時間を通じて一定と仮定する．Θの中には，既存システムのスクラップ費用も含まれている．

システムはN個の独立した対称的なサブシステムにより構成され，すべてのサブシステムの機能が正常な状態に維持されることにより，システム全体としてサービスを提供することが可能になる．各サブシステムの劣化状態はK個の離散的な状態変数k $(k=1,\cdots,K)$で表される．kの値が大きくなるほど劣化が進行していることを意味している．N個のサブシステムのうち劣化状態kにあるサブシステムの数を$n_k (k=1,\cdots,K)$で表そう．システム全体の劣化状態を各劣化状態にあるサブシステムの数n_kを用いて定義される劣化状態ベクトル$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_K)\in\Xi$を用いて表現する．ただし，$\Xi$は劣化状態ベクトルの集合であり

$$\Xi=\left\{\boldsymbol{n}:\sum_{k=1}^{K}n_k=N,\ n_k\geq 0,k=1\cdots,K\right\} \tag{1}$$

で定義される．各サブシステムの劣化状態の推移過程は不確実であり，将来のシステムの劣化状態ベクトル$\boldsymbol{n}$を確定的に予測できない．ここで，サブシステムの劣化状態を以下の３つの状態に分類する．

$$\begin{cases} 1,2,\cdots,k_*-2\text{の時} & \rightarrow G\text{状態} \\ k_*-1\text{の時} & \rightarrow D\text{状態} \\ k_*,\cdots,K\text{の時} & \rightarrow R\text{状態} \end{cases} \tag{2}$$

なお，k_*はサブシステムの修繕が実施される臨界劣化状態を表す．このとき，ある期の期首に劣化状態がD状態，R状態にあるサブシステム数をそれぞれ新しい状態変数n_D，n_Rを用いて表現しよう．単位期間の長さは十分に短く，単位期間あたりに新しくD状態からR状態に到達するサブシステム数は高々１つであり，修繕が瞬時に終了すると仮定すれば，R状態にあるサブシステム数n_Rは$n_R=0$，あるいは$n_R=1$となる．また，$0\leq n_D\leq N-n_R$が成立する．

(2) アセットマネジメント政策

i期の期首における集計的システム状態を当該時点の経済状態mとD状態，R状態にあるサブシステムの数n_D，n_Rを用いて(m,n_D,n_R)と表そう．システム管理者は集計的システム状態に関する情報に基づいて，「システムの運営を継続するか否か」，「サブシステムの修繕を実施すべきかどうか」に関する意思決定を行う．マネジメント政策dをシステムの運営政策d_1と修繕政策d_2の組$d=(d_1,d_2)$ $(d_1\in D_1,d_2\in D_2)$により定義する．ただし，D_1は運営政策，D_2は修繕政策の集合である．運営政策d_1は，集計的システム状態(m,n_D,n_R)に対して運営アクション$\xi^{d_1}(m,n_D,n_R)$を次のように指定する.

$$\xi^{d_1}(m,n_D,n_R)=\begin{cases} 0 & \text{運営を終了する時} \\ 1 & \text{運営を継続する時} \end{cases} \tag{3}$$

$$(m=1,\cdots,M\ n_D=0,1,\cdots,N-n_R\ n_R=0,1)$$

修繕政策d_2は，当該の政策下でサブシステムの修繕が実施される臨界劣化状態$k_*^{d_2}$を通じて，修繕アクション$\eta^{d_2}(n_R)$を次のように指定する．

$$\eta^{d_2}(n_R)=\begin{cases} 0 & n_R=0\text{の時} \\ 1 & n_R=1\text{の時} \end{cases} \tag{4}$$

本研究では，経済状態mに依存せず，システムの劣化状態にのみ依存する準状況依存的政策ルールを対象とする．なお，議論の見通しをよくするため，修繕により常に$k=1$まで回復すると考える．なお，議論の見通しをよくするため，サブシステムは修繕により常に$k=1$まで回復すると考える．

(3) 便益過程のモデル化

離散的な$M(\geq 2)$個の状態で定義される状態空間$\mathrm{S}_m=\{1,2,\cdots,M\}$上において，システムの経済状態の推移過程が斉次マルコフ過程に従うと仮定し，単位期間あたり推移確率行列をπ，その構成要素を$\pi_{mm'}$と表そう．つぎに，運営政策d_1が実施された場合の経済状態の推移確率を定義しよう．運営政策d_1に基づくアクション内容は集計的システム状態(m,n_D,n_R)に対して式(3)で定義される．いま，集計的システム状態(m,n_D,n_R)の時に運営政策d_1を適用した場合，システムの経済状態の推移確率$\pi^{d_1}_{mm'}(n_D,n_R)$は

$$\pi^{d_1}_{mm'}(n_D,n_R) =\begin{cases} \pi_{mm'} & \xi^{d_1}(m,n_D,n_R)=1\text{の時} \\ 0 & \xi^{d_1}(m,n_D,n_R)=0\text{の時} \end{cases} \tag{5}$$

と表せる．すなわち，システムの運営が継続された場合，経済状態は推移確率行列πに従って推移する．ここで，システムの運営が終了した状態を表す状態変数$m' = 0$を新たに追加しよう．集計的システム状態(m, n_D, n_R)の時に運営政策d_1を適用しシステムの運営が終了する場合，経済状態の推移確率$\pi^{d_1}_{m0}(n_D, n_R)$を

$$\pi^{d_1}_{m0}(n_D, n_R) = \begin{cases} 0 & \xi^{d_1}(m, n_D, n_R) = 1 \text{の時} \\ 1 & \xi^{d_1}(m, n_D, n_R) = 0 \text{の時} \end{cases} \tag{6}$$

と定義しよう．この時，推移確率の定義より，任意の(m, n_D, n_R)に対して$\sum_{m'=0}^{M} \pi^{d_1}_{mm'}(n_D, n_R) = 1$が成立する．また，運営政策$d_1 \in D_1$の下において，システム状態$(m, n_D, n_R)$が観測された場合の経済便益$B^{d_1}(m, n_D, n_R)$は，次式で表される．

$$B^{d_1}(m, n_D, n_R) = \begin{cases} B(m) & \xi^{d_1}(m, n_D, n_R) = 1 \text{の時} \\ 0 & \xi^{d_1}(m, n_D, n_R) = 0 \text{の時} \end{cases} \tag{7}$$

(4) 劣化過程のモデル化

いま，$\mathrm{S}_k = \{1, 2, \cdots, K\}$を離散的な$K(\geq 2)$個の状態で定義される状態空間とし，任意のサブシステムの劣化過程は状態空間S_k上で定義される斉次マルコフ過程に従うと仮定する．いま，単位期間あたりにサブシステムの劣化状態がkからk'に推移する確率を$p_{kk'}$と定義する．ただし，システムの劣化過程は修繕がない限り常に劣化が進展する方向に推移するため$p_{kk'} = 0\,(k > k')$が成立する．また，修繕がない限り状態Kはマルコフ過程における吸収状態となり，$p_{KK} = 1$が成立する．いま，時間間隔が十分微小であり，単位期間中に当該サブシステムの劣化状態は高々1段階しか劣化しないと考えよう．この時，推移確率行列$\boldsymbol{P}$の構成要素である$p_{kk'}$は

$$p_{kk'} = \begin{cases} 1 - \nu_k & k' = k \text{の時} \\ \nu_k & k' = k + 1 \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{8}$$

$$(k = 1, \cdots, K - 1)$$

と表せる．つぎに，修繕政策d_2の下で，サブシステムの修繕が実施される場合の劣化状態の推移行列を定義しよう．修繕政策d_2において修繕が直ちに実施される臨界劣化状態をk_*と表そう．修繕政策d_2を適用することにより，劣化状態は推移確率

$$q^{d_2}_{jk} = \begin{cases} 1 & 1 \leq j \leq k^{d_2}_*, j = k \text{の時} \\ 1 & k^{d_2}_* \leq j \leq K, k = 1 \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{9}$$

$$(j, k = 1, \cdots, K)$$

に従う．すなわち，修繕が実施された後の劣化状態（修繕が実施されない場合は元の劣化状態）に確率1で推移する．いま，修繕政策$d_2 \in D_2$の下で，システムの劣化状態が実現した時点から，修繕工事を経て次の時点まで劣化状態が推移する確率を表す推移確率行列$\boldsymbol{P}^{d_2}$の構成要素$p^{d_2}_{kk'}$は，次式のようになる．

$$p^{d_2}_{kk'} = \sum_{l=1}^{K} q^{d_2}_{kl} p_{lk'} \tag{10}$$

(5) 集計的アセットマネジメントモデル

修繕政策d_2の下で劣化過程が定常状態に到達したとしよう．この時，任意のサブシステムの劣化状態に関する定常確率$\boldsymbol{\omega}^{d_2} = (\omega^{d_2}_1, \omega^{d_2}_2, \cdots, \omega^{d_2}_K)$を用いて表現しよう．このとき，定常確率$\boldsymbol{\omega}^{d_2}$は以下の関係を満足する．

$$\boldsymbol{\omega}^{d_2} = \boldsymbol{\omega}^{d_2} \boldsymbol{P}^{d_2} \tag{11}$$

$$\omega^{d_2}_1 + \omega^{d_2}_2 + \cdots + \omega^{d_2}_K = 1 \tag{12}$$

このとき，定常確率$\omega^{d_2}_k\ (k = 1, 2, \cdots, k^{d_2}_*)$が

$$\omega^{d_2}_k = 1/\nu_k \sum_{l=1}^{k^{d_2}_*-1} \frac{1}{\nu_l} \tag{13}$$

となることから，定常分布においてG状態，D状態にある確率ω^d_G，ω^d_Dはそれぞれ$\omega^{d_2}_G = \sum_{l=1}^{k^{d_2}_*-2} \omega^{d_2}_l$，$\omega^{d_2}_D = \omega^{d_2}_{k^{d_2}_*-1}$と表される．ここで，ある時刻$i$においてD状態にあるシステム数が$n_D$であるときに，$i+1$期の期首にD状態のシステム数が$n_D+1$,$n_D-1$,$n_D$である確率をそれぞれ$\lambda^{d_2}(n_D)$，$\mu^{d_2}(n_D)$，$\alpha^{d_2}(n_D)$とする．このとき，$\lambda^{d_2}(n_D)$,$\mu^{d_2}(n_D)$,$\alpha^{d_2}(n_D)$はそれぞれ次のように表される．

$$\begin{aligned} \lambda^{d_2}(n_D) &\simeq E[n_{k^{d_2}_*-1} \mid n_D] \cdot p_{k^{d_2}_*-1k_*} \\ &= \frac{\omega^{d_2}_{k^{d_2}_*-1}}{\omega^{d_2}_G}(N - n_D)\nu_{k^{d_2}_*-1} \end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} \mu^{d_2}(n_D) &\simeq E[n_{k^{d_2}_*} \mid n_D] \cdot p_{k^{d_2}_* k^{d_2}_*+1} \\ &= n_D \nu^{d_2}_{k_*} \end{aligned} \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} \alpha^d(n_D) &\simeq 1 - \lambda^{d_2}(n_D) - \mu^{d_2}(n_D) \\ &= 1 - \frac{\omega_{k^{d_2}_*-1}}{\omega^{d_2}_G}(N - n_D)\nu_{k^{d_2}_*-1} - \frac{\omega^{d_2}_{k_*}}{\omega^{d_2}_D} n_D \nu_{k^{d_2}_*} \end{aligned} \tag{14c}$$

ここで，n_Gは修繕後にG状態にあるサブシステム数を表し，$E[n_k \mid n_D]$はD状態のサブシステムの数がn_Dであるときに，劣化状態kにあるサブシステムの数の期待値である．ある時点iにR状態にあるシステム数は0もしくは1である．$n_R = 0$のとき，当該期

において修繕は行われず，$n_R=1$のとき修繕が行われ，修繕費用c_{k_*}が生じる．マネジメント政策dを適用したときの修繕費用$C^d(m,n_D,n_R)$は次式となる．

$$C^d(m,n_D,n_R) = \begin{cases} c_{k^*} & \xi^{d_1}(n_D,n_R)=1,\ \eta^{d_2}(n_R)=1\text{の時} \\ 0 & \xi^{d_1}(n_D,n_R)=1,\ \eta(n_R)^{d_2}=0\text{の時} \\ 0 & \xi^{d_1}(n_D,n_R)=0\text{の時} \end{cases} \quad (15)$$

本モデルにおいて，運営アクション$\xi^{d_1}(m,n_R,n_D)$は，修繕アクション$\eta^{d_2}(n_R)$と依存関係にある．そのため，次のような２つの意思決定問題を考える必要がある．一方は修繕政策$\overline{d}_2$(臨界劣化状態k_*)を所与として最適な運営政策$d_1^*(\overline{d}_2)$を求める問題であり，もう一方は集計化した最適運営政策d_1^*に対して，最適な修繕政策d_2^*(臨界劣化状態k_*)を求める問題である．以下，前者の問題を「集計的運営問題」，後者の問題を「集計的修繕問題」と呼ぶことにする．

集計的運営問題は修繕政策$\overline{d}_2$を所与としたときに，経済状態mとD状態にあるサブシステム数n_Dの組合せに対する期待純便益を最大化するように運営の継続と終了の意思決定を行うモデルとして定式化することができる．システムの集計的システム状態が(m,n_D,n_R)であるときの期待純便益の最大値を表す最適値関数を$\Phi^{\overline{d}_2}(m,n_D,n_R)$とする．このとき，$\Phi^{\overline{d}_2}(m,n_D,n_R)$はベルマン方程式

$(1 \leq n_D \leq N-1$の場合)

$$\begin{aligned}
&\Phi^{\overline{d}_2}(m,n_D,n_R) \\
&= \max_{d_1\in E}\Big[B^{d_1}(m,n_D,n_R) - C^{d_1\overline{d}_2}(m,n_D,n_R) \\
&\quad +\delta\sum_{m'}^{M}\pi_{mm'}^{d_1\overline{d}_2}(n_D,n_R)\lambda^{\overline{d}_2}(n_D)\Phi^{\overline{d}_2}(m,n_D+1,0) \\
&\quad +\delta\sum_{m'}^{M}\pi_{mm'}^{d_1}(n_D,n_R)\mu^{\overline{d}_2}(n_D)\Phi^{\overline{d}_2}(m,n_D-1,1) \\
&\quad +\delta\sum_{m'}^{M}\pi_{mm'}^{d_1}(n_D,n_R)\alpha^{\overline{d}_2}(n_D)\Phi^{\overline{d}_2}(m,n,0)\Big\} \\
&\quad +\pi_{m0}^{d_1}(n_D,n_R)\Theta\Big] \qquad (16)
\end{aligned}$$

によって表される．ここで，$\delta\ (0<\delta\leq 1)$は割引因子である．$n_D=0$および$n_D=N$の場合においても式(16)と同様に定式化することにより，各集計的システム状態(m,n_D,n_R)に関する連立のベルマン方程式を得る．これを解くことにより修繕政策$\overline{d}_2$を所与とした条件付き最適運営政策$d_1^*(\overline{d}_2)$が求められる．

次に，集計的修繕問題を考えよう．集計的修繕問題は集計的運営問題に対して導出された最適運営政策$d_1^*(\overline{d}_2)$を与件として，最適な修繕政策d_2^*を決定する問題である．ここで、経済状態の定常分布$\boldsymbol{\chi}$を定義する．$\boldsymbol{\chi}$は定常状態において経済状態mにある確率$\chi(m)$を用いて$\boldsymbol{\chi}=(\chi(1),\chi(2),\cdots,\chi(M))$で表される．ここで経済状態の定常分布の存在を仮定しよう．経済状態の定常分布$\boldsymbol{\chi}$は以下の関係を満たす．

$$\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\pi}^{d_1} \qquad (17)$$

$$\chi(1)+\chi(2)+\cdots+\chi(M)=1 \qquad (18)$$

$\boldsymbol{\pi}^{d_1}$は，$\pi_{mm'}^{d_1}\ (m,m'=1,\cdots,M)$を構成要素とする推移確率行列である．このとき集計的修繕問題は以下の最大化問題として定式化される．

$$\begin{aligned}
\Psi = \max_{d_2}\Big[&\sum_{m=1}^{M}\sum_{n_D=1}^{N}\sum_{n_R=0}^{1}\chi(m)\Pi^{d_2}(n_D,n_R) \\
&\times\Phi^{d_2}(m,n_D,n_R)\Big] \qquad (19)
\end{aligned}$$

ここで，$\Pi^{d_2}(n_D,n_R)$は以下のとおりである．

$(n_D=0, n_R=0$の場合)

$$\Pi(n_D,0)=P_D(n_D)\alpha^{d_2}(n_D)$$

$(1\leq n_D\leq N, n_R=0$の場合)

$$\begin{aligned}\Pi(n_D,0)&=P_D(n_D-1)\lambda^{d_2}(n_D-1) \\ &\quad +P_D(n_D)\alpha^{d_2}(n_D)\end{aligned}$$

$(0\leq n_D\leq N-1, n_R=1$の場合)

$$\Pi(n_D,1)=P_D(n_D+1)\mu^{d_2}(n_D+1)$$

D状態にあるシステム数がn_Dである確率$P_D(n_D)$は

$$P_D(n_D)=\frac{N!}{n_D!(N-n_D)!}\omega_D^{n_D}\omega_G^{N-n_D} \qquad (20)$$

となる．集計的修繕問題を解くことによって臨界劣化状態$k_*^{d_2}$を決定することができる．

4. おわりに

本研究では，サブシステムの劣化状態を集計的に表現するような集計的状態変数を導入することにより，複数サブシステムで構成される社会基盤システムの運営・修繕政策を求めるための集計的モデルを提案した．モデルの詳細と数値計算事例は講演時に示す．

参考文献

1) Otazawa,T.,Ishihara,K.,Kobayashi,K.and Kondo,Y.:Optimal Repair Strategies with Reference to Economical Life Expectancy,Working Paper,Kyoto univ.,2004.

2) Gürler, Ü and kaya, A.: A maintenance policy for a system with multi-state components: an approximate solution , *Reliability Engineering and System Safety*,Vol.76, pp.117-127, 2002.