交通量の確率分布を内生的に決定する確率ネットワーク均衡モデル

A Stochastic Network Equilibrium Model where Normal Distributed Flows Determined Endogenously

中山晶一朗
Shoichiro Nakayama

1. はじめに

日々の交通行動の中で，通勤や業務など到着制約のあるトリップは多く，また，緊急車両など単に早く目的地に到着できるだけでなく，どれほど「確実」に指定時刻までに到着できるのかが求められる場面も多い．また，ITS や VICS の効果を分析する場合，情報提供は不確実な状況下にこそ意味があるため，不確実性を的確に取り扱い，計測・評価することは不可欠である．このように道路ネットワークに関しては，旅行時間（所要時間）の値そのものだけでなく，そのばらつきはどれほどかを把握することは極めて重要なことと言える．

交通ネットワークの分析としては，従来からワードロップ均衡モデルや確率的利用者均衡モデルが用いられてきた．確率的利用者均衡はランダム効用理論に基づいた経路選択による交通ネットワーク均衡であるが，その確率的利用者均衡という名称に反し，確定的な交通量および旅行時間を求めるものであり，交通量や旅行時間を陽に確率的には取り扱っていない．よって，確率的利用者均衡は，旅行時間の不確実性を評価するためには十分とは言えないと考えられる．

交通ネットワークの状態は日々変動しており，それを確率的に捉えることは一つの重要なアプローチであろう．当然のことながら，モデルの操作性や理論展開のために，上で述べたようなワードロップ均衡や確率利用者均衡のように（確率的な性質も持つと考えられる）交通ネットワークを確定的に扱うこともまた重要であり，これまで交通ネットワーク均衡は，基本的に確定的なアプローチにて発展してきたと言える．しかし，確率的な取り扱いや確率的なモデルによってのみ解明することが出来る交通ネットワークの性質も多数存在するであろうし，また，上で述べたように，実用的にも必要な不確実性の考慮も確率的アプローチによって可能になる．さらに，交通行動分析で見られるように，確率・統計理論を援用することによって，均衡モデルにおけるパラメータ推定[1]やどのような均衡モデルが適切なのかを決めるというモデル選択等が可能となるなど，交通ネットワークの確率的な取り扱いによる有益性は極めて高いと考えられ，確率的な取り扱いは，交通ネットワーク分析において，一つの重要なアプローチであろう．本研究は，交通ネットワークを確率的に扱ったモデルを提案するものである．

著者らはこれまで交通需要の不確実性（交通需要が確率的）を前提とした確率ネットワーク均衡を提案している[2)3)]．これらの研究では，交通量を正規分布に従う確率変数とし，その分散は平均値の定数倍と仮定していた．しかし，交通量の分散が常にその平均のある定数倍とすることには問題も少なくないと考えられる．

著者らのモデル[2)3)]を拡張し，平均の関数（交通量の平均を説明変数とし，目的変数をその分散とする非線形関数）によって分散を与えるモデルも考えられる．このようなモデルは交通量の平均と分散には何らかの関係があると仮定し，それを用いるモデルであると言えよう．このような関係を用いることで，均衡モデルでは，実質，交通量の平均のみを決めるだけで，その分散も付随的に決定できる．しかし，以上のような外生的に交通量の平均と分散の関係を与え，モデル化する方法だけ

キーワーズ：確率ネットワーク均衡，確率交通需要，交通量の確率分布の内生決定

正員，博（工），金沢大学大学院自然科学研究科
（〒920-8667　金沢市小立野 2-40-20
TEL: 076-234-4614，FAX: 076-234-4632
E-mail: snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp ）

でなく，その両方を同時に内生的に決定するアプローチも当然ありえる．交通量の平均と分散を同時に内生的に決定するモデルは，交通量の平均と分散の関係が分かっていなくとも使用することが出来るという特長を持つ．

そこで，本研究では，OD 交通量が確率変動し，確率分布としての交通量の平均及び分散が内生的に決定される確率ネットワーク均衡を提案することを目的とする．なお，本研究では交通量は正規分布と仮定する．

2. 基本概念

(1) 独立な経路交通量

本研究では，OD 交通量は正規分布に従う確率変数と仮定する．そして，経路交通量は独立な正規分布に従う確率変数とする．経路交通量の独立性の仮定は，道路利用者の経路選択は確率的ではないことを意味している．つまり，交通需要は確率的に変動するが，各道路利用者の選択経路は固定されており，選択経路が固定された道路利用者の数が確率的に増減する．もし道路利用者が合理的であると仮定すると，経路選択を確率的に行うことによって，旅行時間の不確実性が高まり，効用が下がるため（旅行時間関数が狭義単調増加関数の場合平均旅行時間が増加するため），経路選択を確率的に行うことはないと推測できる．なお，当然，確率的な経路選択も考慮したモデルも意味のあるモデルであり，それについては別の機会に発表したい．

独立な正規変数の和は正規変数であるため，経路交通量は独立の仮定により OD 交通量･経路交通量を一貫性を持って取り扱うことができる．つまり，

$$\begin{aligned} &\sum_j m_{ij} = M_i, \\ &\sum_j v_{ij} = V_i \\ &m_{ij} \geq 0, v_{ij} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで， m_{ij}, v_{ij} は各々OD ペア i の経路 j の経路交通量の平均及び分散であり，また，M_i, V_i は OD ペア i の OD 交通量の平均と分散である．

経路交通量が互いに独立な正規分布に従っているため，リンク交通量も正規分布となる．リンク交通量の平均と分散は以下の通りである．

$$\begin{aligned} m_a &= \sum_i \sum_j \delta_{a,ij} \cdot m_{ij} \\ v_a &= \sum_i \sum_j \delta_{a,ij} \cdot v_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，m_a, v_a はリンク a の交通量の平均及び分散であり，$\delta_{a,ij}$ はリンク-経路の接続変数であり，リンク a が OD ペア i の経路 j に含まれていれば 1 であり，そうでなければ 0 である．ただし，上で，経路交通量は独立であると仮定したが，リンク交通量がリンク間で互いに独立であるとは限らない．隣接するリンクには共通した経路交通量が多く流れており，交通量の相関は高くなる．

上で経路交通量は独立な正規分布に従うと仮定し，それによりリンク交通量および OD 交通量は正規分布に従うと記載した．しかし，旅行時間の分布は正規分布に従うとは限らない．もし旅行時間 t がリンク交通量 x の二乗となる場合（$t = x^2$），旅行時間は自由度が 1 のカイ二乗分布に従い、正規分布には従わない．上のように交通量が正規分布に従うと仮定した場合，旅行時間の分布は旅行時間関数により様々な分布形を取ることになるため，本研究では，旅行時間については，分布形を特定することはせず，その平均や分散，必要に応じて共分散等，を計算するのみとする．この旅行時間の平均･分散･共分散の計算には積率母関数を用いることによって計算することが出来る[3)4)]．

(2) 均衡概念

本研究の目的は，このような経路交通量（もしくはその和であるリンク交通量）の平均と分散を内生的に決定する均衡モデルを提案することである．本節では，本研究の核心となる均衡について述べる．

本研究では，1) 道路利用者のリスク態度は様々である，2) 道路利用者は経路旅行時間の平均と分散のみを考慮して経路を選択する，3） 道路利用者は合理的である，と仮定しよう．この場合，「利用される経路の旅行時間は経路間で皆等しく，利用されない経路のそれよりも小さいかせいぜい等しい」というワードロップ均衡[5)]を拡張し，「利用される経路の旅行時間の平均と分散はそれぞれ経路間で皆等しく，利用されない経路のそれらよりも小さいかせいぜい等しい」という均衡を考える

ことができよう.

極端な例として，道路利用者の半数がリスク中立であり，つまり，経路旅行時間の平均が最も小さい経路を選択するとし，残りが平均旅行時間を全く気にせず，その分散のもっとも小さい経路を選択すると仮定しよう．この場合，リスク中立な道路利用者がいるため，選択される経路の旅行時間の平均は OD 間で等しくなると予想される．また，旅行時間の分散が最小の経路を選択しようとする道路利用者がいるため，選択される経路の旅行時間の分散も OD 間で等しくなる．このような極端な例からも類推できるように，「利用される経路の旅行時間の平均と分散はそれぞれ経路間で皆等しく，利用されない経路のそれらよりも小さいかせいぜい等しい」という均衡下では，様々なリスク態度の道路利用者がいたとしても成立し得る均衡状態であると考えられる.

ここで，（次ページの）図２のような 1OD2 リンクのネットワークを考えよう．リンク１と比較して，リンク２は距離は短いが道路が狭い（容量が小さい）リンクであり，抜け道とも言える．上述の均衡では，旅行時間の平均はリンク１でもリンク２でも等しくなる．つまり，平均的にはリンク１でもリンク２でも旅行時間に違いがない．また，リンク1及びリンク2の旅行時間の分散も等しい状態が上述の均衡である．抜け道であるリンク2は，いつもは早く行け，抜け道であるが，容量が小さいため，たまに混むととても旅行時間が大きくなる．そのため，抜け道であるリンク２の分散はリンク１と結局等しくなり，同様に平均旅行時間も等しい状態が均衡になるであろうと上述の均衡概念では考えている.

以上のような均衡は通常のワードロップ均衡概念に比べて分散に関する条件も添付されており，より強い仮定下の均衡概念と言える．このような均衡は不確実性を考慮する，交通量の確率分布を内生的に求めることができ，確率的な交通ネットワークの理論的な考察に優れ手いると考えられ，交通ネットワークの研究において，ベンチマーク（水準点）としての役割も果たすと考えられる.

上の均衡概念に従った交通量配分を図示したのが図１である．本研究の均衡モデルは図１のように，確率分布（正規分布）を持つ OD 交通量（所与）を確率分布を持つ交通量に配分するというものであり，その交通量の平均と分散を内生的に決定する．繰り返しになるが，その決定については，経路間で旅行時間の平均及び分散のそれぞれが等しくなるようにするものである.

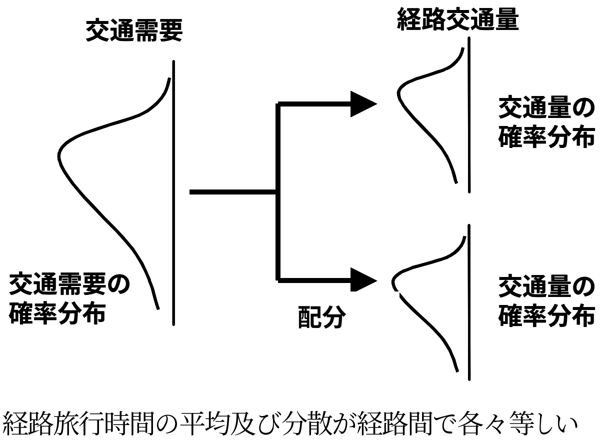

図１　均衡モデルの概略

3. 定式化

前節で述べた均衡は以下のように表現できると考えられる：

$$\begin{cases} c_{ij}^{m} = \lambda_i & if\ m_{ij} > 0 \\ c_{ij}^{m} \geq \lambda_i & if\ m_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall i\, \forall j$$
$$\begin{cases} c_{ij}^{v} = \kappa_i & if\ m_{ij} > 0 \\ c_{ij}^{v} \geq \kappa_i & if\ m_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall i\, \forall j \qquad (1)$$

制約条件（フロー保存則等）は

$$v_{ij} = 0 \ \ if\ m_{ij} = 0 \qquad \forall i\, \forall j \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &\sum_j m_{ij} = M_i,\ \sum_j v_{ij} = V_i \\ &m_{ij} \geq 0,\ v_{ij} \geq 0 \end{aligned} \qquad \forall i\, \forall j \qquad (3)$$

ここで，$c^m{}_{ij}$, $c^v{}_{ij}$ は各々OD ペア i の経路 j の旅行時間の平均及び分散であり，m_{ij}, v_{ij} は経路交通量の平均及び分散である．λ_i, κ_i は正のパラメータであり，それぞれ OD ペア i の経路旅行時間の最小平均及び最小分散を意味する．また，M_i, V_i は OD ペア i の OD 交通量の平均と分散である．式(2)は平均が 0 の経路交通量はその OD 間の交通量が全く流れない経路であり，その分散を 0 とすることを意味している.

式(1)は以下の式としても表現できる:

$$\begin{cases} m_{ij}\left(c_{ij}^m - \lambda_i\right) = 0 \\ m_{ij}\left(c_{ij}^v - \kappa_i\right) = 0 \\ c_{ij}^m - \lambda_i \ge 0 \\ c_{ij}^v - \kappa_i \ge 0 \\ m_{ij} \ge 0 \end{cases} \qquad \forall i\ \forall j \qquad (4)$$

上式は一般の相補性問題と異なる部分はあるが,形式上類似の部分も多い.計算アルゴリズムに関しても,相補性問題のアルゴリズムを修正して利用することができると考えられる.以下に,Fischer-Burmeister 関数[6]を用いた方法の概略を述べる.上式は,以下の式で表される最小化問題として再定式化でき,通常の非線形最適手法を用いることで解を求めることができると考えられる.

$$\min\ \Psi = \frac{1}{2}\sum_{ij}[(\varphi_{ij}^m)^2 + (\varphi_{ij}^v)^2] \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^m &= m_{ij} + c_{ij}^m - \lambda_i + \sqrt{(m_{ij})^2 + (c_{ij}^m - \lambda_i)^2} \\ \varphi_{ij}^v &= m_{ij} + c_{ij}^v - \kappa_i + \sqrt{(m_{ij})^2 + (c_{ij}^v - \kappa_i)^2} \end{aligned} \qquad (6)$$

$s.t.$

$$c_{ij}^m - \lambda_i \ge 0,\ c_{ij}^v - \kappa_i \ge 0,\ m_{ij} \ge 0$$

なお,解の一意性が保障されるのかなど均衡解の性質の解明は早急に取り組むべき今後の課題である.

4. 数値計算

図2で示す1OD2リンクの単純なネットワークに上述の確率ネットワーク均衡を適用した.図2のネットワークは,リンク1と比較してリンク2は距離は短いが道路が狭い(容量が小さい)リンクである.OD 交通量(交通需要)は平均が 2500,分散が 250^2 (= 65200) (OD 交通量の変動係数が 0.1)の正規分布としている.

数値計算の結果は表2の通りである.表2から,両経路(リンク)の旅行時間の平均及び分散が等しくなるように,交通量(の平均及び分散)が配分されていることがわかる.

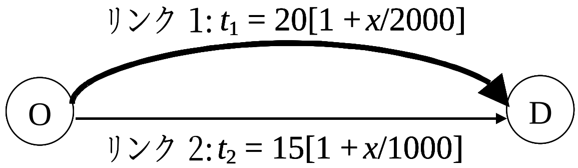

図2　数値実験ネットワーク

表1　数値計算結果

	リンク1	リンク2
旅行時間の平均	33.0	33.0
旅行時間の標準偏差	4.33	4.33
交通量の平均	1200	1300
交通量の標準偏差	208.0	138.7

5. おわりに

本研究では,OD 交通量が確率的であるとともに,経路及びリンク交通量,さらに経路・リンク旅行時間が確率的な交通ネットワーク均衡モデルを提案することを目的とし,OD 交通量,経路・リンク交通量が正規分布に従うと仮定し,経路交通量の平均と分散を内生的に決定する確率交通ネットワーク均衡を提案した.そして,提案したモデルの定式化及び 1OD2 リンクの簡単なネットワークへの適用を行った.

解の一意性が保障されるのかなど均衡解の性質の解明が今後必要である.今後,実際の大規模ネットワークへの適用等が必要と考えられる.

参考文献

1) 中山晶一朗,高山純一:リンク交通量間の相関を考慮した交通ネットワーク分析におけるパラメータ推定法:ポアソン確率ネットワーク均衡を用いて,土木計画学研究・講演集,Vol. 28,CD-ROM,2003.
2) 中山晶一朗・高山純一:OD 交通量が正規分布である場合の確率ネットワーク均衡モデル,第58回土木学会年次学術講演会講演概要集,2003.
3) 中山晶一朗・高山純一・長尾一輝:正規分布に従う交通量を持つ交通ネットワーク均衡モデル,第28回土木計画学研究発表会・講演集,2003.
4) Nakayama, S. and J. Takayama: Traffic Network Equilibrium Model for Uncertain Demands, Presented at the 83rd Annual Meeting of Transportation Research Board, on CD-ROM, 2003.
5) Wardrop J. G.: Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II, Vol. 1, pp.325-378, 1952.
6) 福島雅夫:非線形最適化の基礎,朝倉書店,東京,2001.