自然災害リスク下での施設の最適予防的保全問題：確率的インパルス制御アプローチ[*1]

An Optimal Preventive Maintenance Problem for Infrastructures under Natural Disaster Risk: A Stochastic Impulse Control Approach[*1]

長江 剛志[*2]・多々納 裕一[*3]

By Takeshi NAGAE[*2] and Hirokazu TATANO[*3]

1　はじめに

橋梁やトンネル，道路といった社会基盤施設の多くは，自然災害リスクに直面している．ここで，自然災害リスクとは，地震などの自然災害によって施設の機能水準（ひいては施設から得られる便益フロー）が非連続的に下方に減少する可能性として定義する．こうした自然災害リスクに直面した施設の減災行動としては，事後の対処的保守 (CM; corrective maintenance) のみならず，事前の予防的保守 (PM; preventive maintenance) が必要不可欠である．

本研究では，こうした自然災害リスクの下で最適予防的保全 (PM) 問題に対する定量的分析手法のための枠組を提案する．より具体的には，以下の 3 つの重要な性質を考慮した上で，最適 PM 問題の記述・分析のための枠組を提案し，具体的な数値計算手法を開発する：① 施設補修が必要とする時間を明示的に考慮する；② 施設補修を開始する際に発生する初期固定費用（i.e. 補修に関する規模の経済性）を明示的に考慮する；③ 非定常 (non-steady-state) な自然災害事象を取り扱える．本稿は，以下のように構成される．続く 2 では，最適 PM 戦略問題を定式化し，その最適性条件を無限次元の変分不等式問題 (VIP: *Variational Inequality Problem*) として記述する．次に，3 では，最適 PM 問題に対する数値解法を開発する．このために，まず，2 で求めた VIP を，離散的枠組の下で表現し直す．そして，適切な変数変換により，この問題が標準形の線形相補性問題 (LCP: *Linear Complementarity Problem*) に帰着することを明らかにする．こうして得られた LCP に対して，相補性問題の数値解法に関する最近の理論を活用した効率的解法を開発する．

2　定式化

$[0,T]$ の間，単一の施設を管理する主体を考える．満期 $t=T$ において生起する事象集合を Ω とし，その確率分布 $\mathcal{P}\equiv\{\mathcal{P}(\omega)|\omega\in\Omega\}$ およびフィルトレーション $\mathcal{F}\equiv\{\mathcal{F}(t)|t\in[0,T]\}$ からなる確率空間 $(\Omega,\mathcal{P},\mathcal{F})$ を定義する．施設利用による便益は施設の機能水準に依存して決定されるとし，時刻 $t\in[0,T]$ における機能水準が，一次元の状態変数 $P(t)$ を用いて集約的に表現できるものとする．完成直後の施設の機能水準を $P(0)=\bar{P}$ で表し，施設がまったく機能しなくなる（i.e. 便益が発生しない）機能水準を $P=0$ で表す．施設の機能水準は，経年劣化によって連続的に減少するのみならず，自然災害の発生によってある程度の幅をもって非連続的に減少する．この機能水準は，補修を行うことにより有限の速度で回復させられるものとする．管理主体は，各瞬間 $t\in[0,T]$ において機能水準を観測し，その値 $P(t)=P$ に応じて補修を行うか否かを決定すると仮定する．

いま，補修を開始する瞬間に固定費用 $I_{\mathrm{M}}>0$ が発生するとき，管理主体は，ある程度のまとまった期間に集中的に補修を行うことで，固定費用を節約しようとする．以下では，問題の記述を簡潔にするために，補修が行われている間（以下，補修期間）は施設を利用できず（便益が発生しない），施設が利用されている間（以下，運用期間）は補修が行われないと仮定する．すなわち，管理者は，管理期間中の各瞬間 $t\in[0,T]$ において，施設を運用するか，補修を行うかのいずれかを選択するものとする．時刻 t における管理者の戦略を $n(t)$ で記述し，時刻 t で施設を運用する場合を $n(t)=\mathrm{O}$，補修を行う場合を $n(t)=\mathrm{M}$ で，それぞれ表す．

(1)　施設の機能水準の表現

施設が運用されている場合（i.e. $n(t)=\mathrm{O}$），機能水準は以下の確率微分方程式に従うとする：

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{O}}(t)=-\mu(t,P)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,P)\,\mathrm{d}z(t)-\eta(P)\,\mathrm{d}q(t). \qquad (1)$$

この式の右辺第 1 項および第 2 項は，それぞれ，経年劣化による機能水準の減少およびその確率的変動を表し，第 3 項は，自然災害による機能水準の減少分を表す．ここで，$\mu,\sigma:[0,T]\times[0,\bar{P}]\to\mathcal{R}_{+}$ および $\eta:[0,\bar{P}]\to\mathcal{R}_{+}$ はいずれも既知関数である．$z(t)$ は確率空間 $(\Omega,\mathcal{P},\mathcal{F})$ 上で定義される 1 次元 Wiener 過程，$\{q(t)|t\in[0,T],q(t)\}$ は，強度 (intensity) $\{\lambda(t)|t\in[0,T]\}$ をもつ非定常 Poisson 過程とする．このとき，微小時間 $[t,t+\mathrm{d}t]$ における増分 $\mathrm{d}q(t)$ は以下の確率変数として表現される：

$$\mathrm{d}q(t)\equiv\begin{cases}1 & \text{with prob. } \lambda(t)\,\mathrm{d}t\\ 0 & \text{with prob. } 1-\lambda(t)\,\mathrm{d}t\end{cases} \qquad (2)$$

[*1] キーワーズ：防災計画，計画手法論，土木施設維持管理

[*2] 正会員，博士（情報科学）神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

[*3] 正会員，工博，京都大学防災研究所総合防災研究部門 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

一方，補修が行われる場合（i.e. $n(t)=\mathrm{M}$），施設の機能水準は単位時間当たり $\bar{x}$（所与の定数）だけ回復すると仮定する．すなわち，補修が行われている間，機能水準が従う確率微分方程式は，

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{M}}(t)=[\bar{x}-\mu(t,P)]\,\mathrm{d}t+\sigma(t,P)\,\mathrm{d}z(t)-\eta(P)\,\mathrm{d}q(t) \qquad (3)$$

で表されるとする．

(2) **キャッシュ・フロー流列とサンク・コスト**

本稿では，当該施設から発生するキャッシュ・フローが以下の 4 つに分類されるとする*[1]：a) 施設運用している間，毎時刻発生する便益；b) 補修を行っている間，毎時刻発生する補修費用；c) 補修の開始時および運用の再開時に発生する固定費用；d) 満期 T において発生する，施設の運用・保全事業売却益．まず，時刻 t で機能水準が $P(t)$ であるとき，施設を運用していることで得られる単位時間あたりの便益を $\pi(t,P(t))$ で表し，補修を行っている間発生する単位時間当たりの補修費用を $c(t,P)$ で表す．従って，戦略 $n(t)\in\{\mathrm{O},\mathrm{M}\}$ を選択している管理主体が単位時間あたりに獲得する純利潤フローは，

$$f_n(t,P)\equiv\begin{cases}\pi(t,P) & \text{if } n(t)=\mathrm{O}\\ -c(t,P) & \text{if } n(t)=\mathrm{M}\end{cases} \qquad (4)$$

で表現される．次に，k 回目の補修に関して，補修が開始される時刻を τ_k，運用が再開される（i.e. 補修が終了される）時刻を $\mathcal{T}_k$ で表す．このとき，補修開始時刻 τ_k で発生する補修の初期固定費用，および運用再開時刻 $\mathcal{T}_k$ で発生する運用再開の初期固定費用を，それぞれ，所与の定数 $I_{\mathrm{M}},I_{\mathrm{O}}$ で表す．最後に，満期 T において発生する事業売却益は，満期時点での機能水準 $P(T)$ に依存するとし，その値を $P(T)$ についての既知関数 $F(P(T))$ で表す．

(3) **最適予防的保全問題の定式化**

上述の枠組の下で，管理主体は，対象施設から発生するキャッシュ・フロー流列の期待現在正味価値 (ENPV: *Expected Net Present Value*) の総和を最大化するように，毎時刻施設を運用する（i.e. ($n(t)=\mathrm{O}$）か，補修を行う（i.e. $n(t)=\mathrm{M}$ かを選択する．この最適予防的保全問題は以下の確率制御問題として定式化される．

[PM]

$$\max_{\{n(t)\}_0^T}.\ \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(0,T;n(\cdot))\middle|P(0)=\bar{P},n(0)=\mathrm{O}\right],\ \text{s.t.(1), (3), (4).}$$

ここで，$\mathcal{J}(t,T;n(\cdot))$ は，補修戦略 $\{n(s)\}_t^T$ の下で，期間 $[t,T]$ 中に当該施設から得られるキャッシュ・フローを時刻 t で評価した ENPV の総和であり，以下の式で定義される．

$$\mathcal{J}(t,T;n(\cdot))\equiv\int_t^T e^{-\rho(s-t)}f_{n(s)}(s,P(s))\,\mathrm{d}s + e^{-\rho(T-t)}F(P(T))-\sum_{k\in K(t)}\left\{e^{-\rho(\tau_k-t)}I_{\mathrm{M}}+e^{-\rho(\mathcal{T}_k-t)}I_{\mathrm{O}}\right\} \qquad (5)$$

ただし，ρ は割引率を表し，$K(t)$ は時刻 t 以降に行われる補修のインデクス集合を表す．

(4) **変分不等式問題としての最適性条件の表現**

本節では，問題 [PM] の最適性条件を導出し，それが無限次元の変分不等式問題 (VIP:*Variational Inequality Problem*) として記述できることを明らかにする．まず，時刻 t において機能水準 $P(t)=P$ が観測され，施設の運用・補修モードが $n(t)=n$ であるときの問題 [PM] の最適値関数を以下のように定義しよう．

$$V(t,P,n)\equiv\max_{\{n(s)\}_t^T}.\ \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(t,T;n(\cdot))\middle|P(t)=P,n(t)=n\right] \qquad (6)$$

ここで $\mathcal{J}(\cdot)$ は式 (5) で定義される期間 $[t,T]$ 中のキャッシュ・フロー流列の ENPV 総和である．以下では，この最適値関数を，運用・補修モードが n の施設の，状況 (t,P) での "価値" と呼び，$V_n(t,P)\equiv V(t,P,n)$ と記述する．

状況 (t,P) において運用されている施設の価値は，期待値のネストを用いて，以下のように書き直せる．

$$V_{\mathrm{O}}(t,P)=\max_{\tau\in[t,T]}.\ \mathrm{E}\left[\int_t^\tau e^{-\rho(s-t)}\pi(s,P(s))\,\mathrm{d}s + e^{-\rho(\tau-t)}\{V_{\mathrm{M}}(\tau,P(\tau))-I_{\mathrm{M}}\}\middle|P(t)=P,n(t)=\mathrm{O}\right]. \qquad (7)$$

最適値関数の定義式 (6) に DP 原理を適用すれば，時刻 t において機能水準 $P(t)=P$ が観測され，施設が運用されているとき（i.e. $n(t)=\mathrm{O}$）の管理主体の最適戦略は，以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：a) 微小時間 $\mathrm{d}t$ だけ運用を継続する；b) 補修を開始する．以下では，それぞれの選択が最適となる場合について，運用モードの価値 $V_{\mathrm{O}}(t,P)$ が満たすべき条件を述べる．

■i) **運用を継続する場合**　運用を継続することが最適となる場合，最適値関数の定義より，以下の不等式が成立する．

$$V_{\mathrm{O}}(t,P)\geq\pi(t,P)+e^{-\rho\,\mathrm{d}t}\mathrm{E}\left[V_{\mathrm{O}}(t,P)+\mathrm{d}V_{\mathrm{O}}(t,P)\middle|P(t)=P\right]$$

右辺第 2 項に Ito の補題を適用して整理すれば，以下の不等式を得る．

$$-\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t,P)-\pi(t,P)\geq 0. \qquad (8)$$

ここで，$\mathcal{L}_{\mathrm{O}}$ は，以下の式で定義される偏微分作用素である．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t,P)\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\mu(t,P)\frac{\partial}{\partial P}+\frac{1}{2}\sigma(t,P)\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right\}V_{\mathrm{O}}(t,P) -(r+\lambda(t))\,V_{\mathrm{O}}(t,P)+\lambda(t)V_{\mathrm{O}}[t,P-\eta(P)].$$

この偏微分作用素は，運用状態において施設の機能水準が従う確率微分方程式から決定される．

*[1] 本稿では，財務的に実現するキャッシュ・フローと，金銭換算された社会経済的な便益フローとを明示的に区別しない．

■ii) **補修を開始する場合**　補修を開始することが最適となる場合，最適値関数の定義より，以下の不等式が成立する．

$$V_{\mathrm{O}}(t,P) \geq V_{\mathrm{M}}(t,P) - I_{\mathrm{M}}. \tag{9}$$

この式の右辺を左辺に移行すれば，

$$V_{\mathrm{O}}(t,P) - V_{\mathrm{M}}(t,P) + I_{\mathrm{M}} \geq 0 \tag{10}$$

を得る．

各状況において，上述の 2 つの選択肢 i), ii) は排他的である．すなわち，式 (8), (10) のいずれかについてのみ等号が成立する．具体的には，

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t,P) - \pi(t,P) = 0 \Rightarrow V_{\mathrm{O}}(t,P) - V_{\mathrm{M}}(t,P) + I_{\mathrm{M}} \geq 0 \\ \hfill \text{（運用を継続する場合）} \\ -\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t,P) - \pi(t,P) > 0 \Rightarrow V_{\mathrm{O}}(t,P) - V_{\mathrm{M}}(t,P) + I_{\mathrm{M}} = 0 \\ \hfill \text{（補修を開始する場合）} \end{cases}$$

が成立する．この条件は，時点 t で成立する以下の変分不等式として表現できる．

$$\min.\left\{-\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t,P) - \pi(t,P), V_{\mathrm{O}}(t,P) - V_{\mathrm{M}}(t,P) + I_{\mathrm{M}}\right\} = 0. \tag{11}$$

同様の議論は，状況 (t,P) において補修が行われている（i.e. $n(t) = \mathrm{M}$）場合についても成立する．すなわち，補修を行ってる状態からの管理者の選択行動は i) 微小時間だけ補修を継続する；ii) 運用を再開するのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する．従って，補修継続／運用再開に関する最適性条件は，以下の変分不等式条件として表現される．

$$\min.\left\{-\mathcal{L}_{\mathrm{M}}V_{\mathrm{M}}(t,P) - c(t,P), V_{\mathrm{M}}(t,P) - V_{\mathrm{O}}(t,P) + I_{\mathrm{O}}\right\} = 0. \tag{12}$$

ここで，$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ は以下のように定義される偏微分作用素である．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} \equiv \mathcal{L}_{\mathrm{O}} + \bar{x}\frac{\partial}{\partial P}. \tag{13}$$

運用継続／補修開始に関する最適性条件式 (11) には，補修を行っている状態での最適値関数 $V_{\mathrm{M}}(t,P)$ が含まれている．同様に，補修継続／運用再開に関する最適性条件式 (12) は運用状態での最適値関数 $V_{\mathrm{O}}(t,P)$ を含んでいる．従って，これらの条件は独立ではない．そのため，最適 PM 問題 [PM] の時点 t における最適性条件は，式 (11), (12) を連立させた以下の変分不等式問題として記述される．

> [VIP(t)]
> Find $\{[V_{\mathrm{O}}(t,P), V_{\mathrm{M}}(t,P)], \forall P \in [0,\bar{P}]\}$ such that
> $$\begin{cases} \min.\left\{-\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t,P) - \pi(t,P), V_{\mathrm{O}}(t,P) - V_{\mathrm{M}}(t,P) + I_{\mathrm{M}}\right\} = 0 \\ \min.\left\{-\mathcal{L}_{\mathrm{M}}V_{\mathrm{M}}(t,P) - c(t,P), V_{\mathrm{M}}(t,P) - V_{\mathrm{O}}(t,P) + I_{\mathrm{O}}\right\} = 0 \end{cases}$$
> $$\forall P \in [0,\bar{P}]$$

ただし，満期 T においては，当該時刻で運用／補修のいずれが行われているとしても，機能水準に応じた事業売却益 $F(P(T))$ のみが得られる．従って，問題 [VIP(t)] の満期での終端条件は，

$$V_{\mathrm{O}}(T,P(T)) = V_{\mathrm{M}}(T,P(T)) = F(P(T)), \forall P(T) \in [0,\bar{P}] \tag{14}$$

で表される．

3　数値計算

ここまでの議論により，最適予防的保全問題 [PM] は，時点ごとに成立する無限次元の変分不等式問題 [VIP(t)] として表現できることが判った．しかし，この問題はそのままでは解を求めることが極めて困難である．そこで，本章では，まず，問題 [VIP(t)] を，数値計算が容易な離散時間-離散状態の枠組下で表現し，各時点で成立する VIP をある手続きに従って順番に解くことで，最終的に元の問題 [PM] 全体の解が得られることを示す．次に，この手続きの各ステップで解くべきサブ問題が，適切な変数変換によって，数理計画分野で良く知られる有限次元の線形相補性問題 (LCP: *Linear Complementarity Problem*) に帰着することを明らかにする．これにより，各時点で成立するサブ問題，ひいては最適予防的保全問題全体に対する効率的解法が開発可能となる．

(1)　問題の離散的表現

管理期間および機能水準領域 $[0,\bar{P}]$ からなる空間 $\mathcal{K} \equiv [0,T] \times [0,\bar{P}]$ を，以下の格子：

$$\gamma \equiv \{(i,j) | i = 0,1,\cdots,\mathrm{I}, j = \min,1,\cdots,\mathrm{J},\max\} \tag{15}$$

を用いて，$(t^i, P^j) \equiv (i\Delta t, j\Delta P)$ と離散表現する．ここで，Δt, ΔP は，それぞれ，時刻および機能水準についての格子間隔をあらわし，$\min \equiv 0, \max \equiv \mathrm{J}+1$ は，機能水準の上下境界インデクスを表す．ここで，任意関数 $f: \mathcal{K} \to \mathcal{R}$ の格子 γ 上の (i,j) 座標上の値を $f^{i,j} \equiv f(t^i, P^j)$ と表現する．また，時点 i における値をベクトル $\boldsymbol{f}^i \equiv [f^{i,1},\cdots,f^{i,\mathrm{J}}]'$ でまとめて記述する．

上述の枠組の下で，[VIP(t)] における偏微分作用素 $\mathcal{L}_{\mathrm{O}}$ は，以下のように離散近時される．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{O}}V_{\mathrm{O}}(t^i,P) \approx \left(\boldsymbol{L}^i_{\mathrm{O}} + \lambda^i \boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{V}^i_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{O}}\boldsymbol{V}^{i+1}_{\mathrm{M}} \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{L}^i_{\mathrm{O}}, \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{O}}$ は，式 (5) に現れる偏微分 $\frac{\partial}{\partial t} - \mu(\cdot)\frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma(\cdot)^2\frac{\partial^2}{\partial P^2} - (r + \lambda(t))$ を適当なスキームで差分近似して得られる $\mathrm{J}\times\mathrm{J}$ の正方行列である．また，$\boldsymbol{D}$ は，$\mathrm{J}\times\mathrm{J}$ 行列であり，その (j,j') 要素 $D^{j,j'}$ が以下の式で定義される：

$$D^{j,j'} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j' \leq \frac{P^j - \eta(P^j)}{\Delta P} < j'+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

このとき，時点 t^i における最適性条件 [VIP(t^i)] は，以下の有限次元 VIP で表現される．

[VIP^i] Find $\boldsymbol{V}^i \equiv \{\boldsymbol{V}^i_{\mathrm{O}}, \boldsymbol{V}^i_{\mathrm{M}}\}$ such that

$$\begin{cases} \min.\left\{-\boldsymbol{L}^i_{\mathrm{O}}\boldsymbol{V}^i_{\mathrm{O}} - \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{O}}\boldsymbol{V}^{i+1}_{\mathrm{O}} - \boldsymbol{\pi}^i, \boldsymbol{V}^i_{\mathrm{O}} - \boldsymbol{V}^i_{\mathrm{M}} + \mathbf{1}I_{\mathrm{M}}\right\} = \mathbf{0} \\ \min.\left\{-\boldsymbol{L}^i_{\mathrm{M}}\boldsymbol{V}^i_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{M}}\boldsymbol{V}^{i+1}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{V}^i_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{V}^i_{\mathrm{O}} + \mathbf{1}I_{\mathrm{O}}\right\} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ただし，満期（時点 I）における終端条件は，式 (14) を離散表現した以下の式で表される．

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{F}. \tag{18}$$

時点 i において成立する問題は，次の時点での最適値関数 $\boldsymbol{V}^{i+1}_{\mathrm{O}}, \boldsymbol{V}^{i+1}_{\mathrm{M}}$ が既知であれば，$\boldsymbol{V}^i$ のみを未知変数とした独立な問題となる．従って，終端条件 I より得られた $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}}$ を用いて [VIP$^{\mathrm{I}-1}$] を解けば，時点 I – 1 での最適値関数 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}-1}$ および最適保全戦略 $n^{\mathrm{I}-1}$ が求められる．こうして得られた $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}-1}$ を与件として [VIP$^{\mathrm{I}-2}$] を解けば時点 I – 2 での最適値関数と最適戦略が求められる．この手続きを繰り返せば，最終的に，全ての時点での最適値関数 $\{V^i\}$ と最適保全戦略 $\{n^i\}$ が求められる．では，次に，この手続きの各ステップで解くべきサブ問題 [VIP^i] の効率的解法を示そう．

(2)　変数変換による標準形相補性問題への帰着

時点 i で成立する問題 [VIP^i] は，そのままの形では数値的にすら解くことが困難である．そこで，本節では，この問題が適当な変数変換によって標準形の LCP に帰着することを明らかにする．まず，時点 $i+1$ での最適値関数 $\boldsymbol{V}^{i+1}$ が与件であるとして，以下の変数変換を考えよう．

$$\boldsymbol{X}^i_n \equiv -\boldsymbol{H}^i_n\boldsymbol{V}^i_n - \boldsymbol{g}^i_n \tag{19}$$

ここで，$\boldsymbol{g}_n \equiv -\boldsymbol{M}^i_n\boldsymbol{V}^{i+1}_n - \boldsymbol{f}^i_n$ は，時点 i において所与の定数ベクトルとして扱われる．また，$\boldsymbol{H}^i_n \equiv \boldsymbol{L}^i_n + \boldsymbol{D}$ である．このとき，$\boldsymbol{H}^i_n$ が非退化行列であれば，$\boldsymbol{H}^i_n$ に逆行列が存在し，

$$\boldsymbol{V}^i_n = -{\boldsymbol{H}^i_n}^{-1}\left[\boldsymbol{X}^i_n + \boldsymbol{g}^i_n\right] \tag{20}$$

と書き直せる．これらの式 (19), (20) を問題 [VIP^i] に代入して整理すれば，時点 i で成立すべき以下の有限次元の標準形 LCP を得る．

[LCP^i] Find $\boldsymbol{X}^i \equiv \{\boldsymbol{X}^i_{\mathrm{O}}, \boldsymbol{X}^i_{\mathrm{M}}\}$ such that

$$\boldsymbol{X}^i \cdot \boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}^i) = 0, \quad \boldsymbol{X}^i \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}^i) \geq \mathbf{0}$$

ここで，$\boldsymbol{G}^i(\cdot)$ は以下の式で定義される $\boldsymbol{X}^i$ についての線形写像である．

$$\boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}) \equiv \begin{bmatrix} -{\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{O}}}^{-1} & {\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{M}}}^{-1} \\ {\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{O}}}^{-1} & -{\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{M}}}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^i_{\mathrm{O}} \\ \boldsymbol{X}^i_{\mathrm{M}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -{\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{O}}}^{-1}\boldsymbol{g}^i_{\mathrm{O}} + {\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{M}}}^{-1}\boldsymbol{g}^i_{\mathrm{M}} \\ {\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{O}}}^{-1}\boldsymbol{g}^i_{\mathrm{O}} - {\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{M}}}^{-1}\boldsymbol{g}^i_{\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

このような LCP に対する効率的解法に関しては，数理計画の分野において近年進歩が著しく，そこで開発された解法を利用することでサブ問題 [LCP^i] を解くことができる．例えば，赤松・長江 [1] らは，このような LCP と偏微分方程式を組み合わせた問題に対し，merit 関数アプローチを用いた解法を適用している．

以上の議論より，時点 i におけるサブ問題 [VIP^i] は，以下の 2 段階の手順により解くことができる：a) 時点 $i+1$ における最適値関数 $\boldsymbol{V}^{i+1}$ を与件として，[LCP^i] を解き，$\boldsymbol{X}^i$ を求める；b) $\boldsymbol{X}^i$ に対して逆変換 (20) を行うことで時点 i における最適値関数 $\boldsymbol{V}^i$ を求める．この手続きを，時点 i = I における終端条件式 (18) から順に，i = 0 まで時点を遡って繰り返せば，最終的に全ての時点における最適値関数（および最適保全戦略）を求めることができる．

4　おわりに

本研究では，自然災害リスクに直面する社会基盤施設に関し，補修に必要な時間，補修の規模の経済性および自然災害リスクの非定常性の全てを同時に考慮した最適予防的保全戦略問題に対する定量的分析手法の枠組を提案した．その具体的な適用例および数値計算結果については，講演会で報告する予定である．

参考文献

1) 赤松隆, 長江剛志：不確実性下での社会基盤投資・運用問題に対する変分不等式アプローチ, 土木学会論文集, 2004, 投稿中.

2) 栗野盛光, 小林潔司, 渡辺晴彦：不確実性下における最適補修ルール, 土木学会論文集, Vol. 50, No. 667, pp. 1–14, 2001.

3) 小林潔司, 上田孝行：インフラストラクチャ・マネジメント研究の課題と展望, 土木学会論文集, No. 744/IV-61, pp. 15–27, 2003.

4) Wang, H.: A survey of maintenance policies of deteriorating systems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 139, pp. 469–489, 2002.

5) Ferris, M. C. and Pang, J.-S. eds.: *Complementarity and Variational Problems: State of the Art*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.