混載輸送ネットワーク設計問題に対するLagrange緩和法

A Lagrange Relaxation Method for the Less-Than-Truckload Network Design Problem

片山　直登*
By Naoto KATAYAMA

1.　はじめに

近年，物流の小口輸送化・多頻度輸送化が進み，小口輸送・多頻度輸送を効率的に処理するための混載・共同化輸送の取り組みが行われている．これらを効率的に実施するためには，混載輸送ネットワークの設計・構築が重要な課題の一つとなっている．

混載輸送ネットワーク設計問題では，対象をどこまでとするかによって様々なモデルを構築することができる．一般的に，混載輸送ネットワーク設計問題[6]は，1) 混載輸送路線設計，2) 貨物輸送経路設計，3) 空トラック回送路線設計などの問題から構成されている．考慮すべき費用としては，1) 混載輸送費用，2) ターミナル費用，3) 空トラック回送費用などが挙げられる．また，制約条件として，1) 混載輸送路線の最低便数制約，2) 同一着地貨物の木制約，3) 積替えターミナルの処理能力制約，4) 発地・着地ターミナル間の積替え回数や輸送時間制約，5) トラックの均衡制約などが挙げられる．

これらの組合せである混載輸送ネットワーク設計問題は大規模で複雑な混合整数計画問題となり，すべての問題や条件を同時に考慮することは困難である．一方，一般的に組合せ最適化問題の最適解を求めるためには分枝限定法などの解法が用いられ，そのために良い下界値が必要となる．また，近似解法を用いる場合には，下界値を用いることによって，近似値と最適値との差の上限を定めることができる．この下界値は，緩和問題を最適に解くことによって求めることができる．一方，Lagrange 緩和解を初期解として実行可能解を探索する Lagrange ヒューリスティック法を用いると，近似解を効率的に探索することが可能となる．

そこで，本研究では混載輸送路線設計と貨物輸送経路設計を扱い，路線の最低便数，木条件および積換え回数を制約とし，混載輸送費用と積替えターミナルにおける費用の和を最小化する混載輸送ネットワークを設計する問題に対する定式化および Lagrange 緩和問題を示し，この緩和問題に対する解法を提案する．

混載輸送ネットワークは問題は，Less-Than- Truckload (LTL) 問題として数多くの研究が行われている．Powell-Sheffi[6]，Powell[4] はアド・ドロップ型のヒューリスティック解法，Crainic–Roy[1] は集合被覆問題を用いた定式化と解法を示している．Roy-Delorme[7] はNETPLAN と事例分析を示し，Powell–Koskosidis[5] は勾配を用いたローカルサーチ法と最低便数制約に対する Lagrange 緩和法を提案している．また，Hoppe–Klample–McZeal–Rich[2] は，ラベリング法とアド・ドロップ解法を組合わせた解法を提案している．

2.　定式化

輸送貨物の発地・着地ターミナルや積替えターミナルを表すターミナル集合を N，ターミナル間の混載輸送路線の候補集合を A，ターミナル i に入る路線候補の終点をもつターミナルの集合を N_i^-，ターミナル i から出る路線候補の始点をもつターミナルの集合を N_i^+ とする．路線 (i,j) の輸送費用を z_{ij}，(i,j) を混載輸送路線とするか否かを表す 0-1 変数を y_{ij}，発地 $o(\in N)$・着地 $d(\in N)$ 間の貨物を路線 (i,j) で輸送するか否かを表す 0-1 変数を x_{ij}^{od} とし，着地 d の貨物に対して路線 (i,j) で輸送するか否かを表す 0-1 変数を y_{ij}^d とする．ターミナル n が発地 o・着地 d 間の貨物の発地 o であれば-1，着地 d であれば 1，それ以外であれば 0 である定数を δ_n^{od} とおく．ターミナル i における発地 o・着地 d 間の貨物の単位当たりの積替え費用を h_i^{od}，路線 (i,j) の輸送車 1 便当りの費用を a_{ij} とする．路線 (i,j) の輸送車 1 便当りの積載量を e_{ij}，単位期間当りの最低便数を f_{ij} とする．また，発地 o・着地 d 間の貨物量を q^{od}，貨物の積換え回数の上限を p^{od} とする．

キーワーズ：物流計画, ターミナル計画, 経路選択
*正員，工修, 流通経済大学流通情報学部
(竜ヶ崎市平畑 120,Tel0297-64-0001,katayama@rku.ac.jp)

このとき，本研究で対象とする混載輸送ネットワーク設計問題 LTL は，次のように表すことができる．

$$(LTL) \quad min \quad \sum_{(i,j)\in A} z_{ij}y_{ij} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N_i^+}\sum_{d\in N}\sum_{o\in N} h_i^{od}q^{od}x_{ij}^{od} \quad (1)$$

$$st \quad \sum_{i\in N_n^-} x_{in}^{od} - \sum_{j\in N_n^+} x_{nj}^{od} = \delta_n^{od} \quad n\in N, o\in N, d\in N \quad (2)$$

$$x_{ij}^{od} \le y_{ij}^d \quad (i,j)\in A, o\in N, d\in N \quad (3)$$

$$y_{ij}^d \le y_{ij} \quad (i,j)\in A, d\in N \quad (4)$$

$$\sum_{j\in N} y_{ij}^d \le 1 \quad i\in N\backslash\{d\}, d\in N \quad (5)$$

$$\sum_{j\in N} y_{dj}^d = 0 \quad d\in N \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}^{od} \le p^{od}-1 \quad o\in N, d\in N \quad (7)$$

$$z_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/e_{ij}\sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x_{ij}^{od} & if \ \sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x_{ij}^{od} \ge f_{ij}e_{ij} \\ a_{ij}f_{ij} & otherwise \end{cases} \quad (i,j)\in A \quad (8)$$

$$x_{ij}^{od}\in\{0,1\} \quad (i,j)\in A, o\in N, d\in N \quad (9)$$

$$y_{ij}^d\in\{0,1\} \quad (i,j)\in A, d\in N \quad (10)$$

$$y_{ij}\in\{0,1\} \quad (i,j)\in A \quad (11)$$

(1) 式の第 1 項は混載輸送便にかかる費用の合計，第 2 項はターミナルにおける積替え費用の合計であり，これらの合計の最小化する．(2) 式はフロー保存条件であり，与えられた貨物を発地・着地間に輸送することを表す．(3) 式は，路線 (i,j) に着地 d 宛ての経路が開設されないと発地 o，着地 d 間の貨物を路線 (i,j) で輸送できないことを表す．(4) 式は，路線 (i,j) が開設されないと着地 d 宛ての経路を路線 (i,j) に開設できないことを表す．(5) 式と (6) 式は木制約であり，着地以外のターミナルでは着地が同一である貨物が同一のターミナル宛てに輸送されることを表す．(7) 式は，積換え回数の制限を表す．(8) 式は最低便数制約であり，路線 (i,j) の輸送量が最低便数の輸送量以上であれば輸送量に比例した便数に設定し，未満であれば最低便数に設定することを表す．(9)，(10) および (11) 式は変数の 0-1 条件を表す．

3. Lagrange 緩和問題

フロー保存式 (2) に対する Lagrange 乗数 $\boldsymbol{v}$，木制約式 (5)，(6) に対する乗数 $\boldsymbol{w}$，積換え回数制約式 (7) に対する乗数 $\boldsymbol{t}$ を用いて，LTL を Lagrange 緩和した問題 LG を作成する．ここで，$w_i^d \ge 0 (i\in N\backslash\{d\}, d\in N)$，$t^{od}\ge 0(o\in N, d\in N)$ である．

$$(LG) \quad min \quad \sum_{(i,j)\in A} z_{ij}y_{ij} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N_i^+}\sum_{d\in N}\sum_{o\in N} h_i^{od}q^{od}x_{ij}^{od} + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{d\in N}\{\sum_{o\in N}(v_i^{od}-v_j^{od}+t^{od})x_{ij}^{od} + w_i^d y_{ij}^d\} + \sum_{d\in N}[\sum_{o\in N}\{v_d^{od}-v_o^{od}-(p^{od}-1)t^{od}\} - \sum_{i\in N\backslash\{d\}} w_i^d] \quad (12)$$

$$st \quad (3)\sim(4), (8)\sim(11)$$

$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{t}$ が与えられたときに目的関数の第 4 項は定数項となるので，LG は路線 (i,j) ごとの独立した問題 LG_{ij} に分割できる．

$$(LG_{ij}) \quad min \quad z_{ij}y_{ij} + \sum_{d\in N}\{\sum_{o\in N}(h_i^{od}q^{od} + v_i^{od}-v_j^{od}+t^{od})x_{ij}^{od} + w_i^d y_{ij}^d\} \quad (13)$$

$$st \quad x_{ij}^{od}\le y_{ij}^d \quad o\in N, d\in N \quad (14)$$

$$y_{ij}^d \le y_{ij} \quad d\in N$$

$$z_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/e_{ij}\sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x_{ij}^{od} & if \ \sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x_{ij}^{od} \ge f_{ij}e_{ij} \\ a_{ij}f_{ij} & otherwise \end{cases} \quad (15)$$

$$x_{ij}^{od}\in\{0,1\} \quad o\in N, d\in N \quad (16)$$

$$y_{ij}^d\in\{0,1\} \quad d\in N \quad (17)$$

$$y_{ij}\in\{0,1\}$$

LG_{ij} は $y_{ij}=0$ と $y_{ij}=1$ の場合の 2 つの問題 LG_{ij}^0 と LG_{ij}^1 に分離でき，最適値は 2 つの問題の最適値の小さい方となる．LG_{ij}^0 では，明らかに $y_{ij}^d=0(d\in N)$，$x_{ij}^{od}=0(o\in N, d\in N)$ が最適となり，最適値は 0 となる．一方，LG_{ij}^1 は次のように表される．

$$(LG_{ij}^1) \quad min \quad z_{ij} + \sum_{d\in N}\{\sum_{o\in N}(h_i^{od}q^{od} + v_i^{od}-v_j^{od}+t^{od})x_{ij}^{od} + w_i^d y_{ij}^d\}$$

$$st \quad (14)\sim(17)$$

(15) 式に注目すると，LG_{ij}^1 は輸送量が最低便数以上と未満の場合の 2 つの問題 LG_{ij}^{1U}，LG_{ij}^{1L} に分離することができ，最適値は 2 つの問題の最適値の小さい方となる．LG_{ij}^{1U} および LG_{ij}^{1L} は，次のように表すことができる．

$$(LG_{ij}^{1U}) \quad min \quad \sum_{d\in N}\{\sum_{o\in N}(a_{ij}q^{od}/e_{ij} + q^{od}h_i^{od} + v_i^{od}-v_j^{od}+t^{od})x_{ij}^{od} + w_i^d y_{ij}^d\}$$

$$st \quad \sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x_{ij}^{od} \ge f_{ij}e_{ij} \quad (18)$$

$$(14), (16), (17)$$

$$(LG^{1L}_{ij}) \quad min \quad a_{ij}f_{ij}+\sum_{d\in N}\{\sum_{o\in N}(q^{od}h^{od}_i +v^{od}_i-v^{od}_j+t^{od})x^{od}_{ij}+w^d_i y^d_{ij}\}$$

$$st \quad \sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x^{od}_{ij} < f_{ij}e_{ij} \tag{19}$$

$(14),(16),(17)$

さらに，LG^{1U}_{ij} において，Lagrange 乗数 $u_{ij}(\geq 0)$ を用いて (18) 式を Lagrange 緩和した問題 LGR^{1U}_{ij} を作成する．ここで，$U^{od}_{ij}=a_{ij}q^{od}/e_{ij}+q^{od}h^{od}_i+v^{od}_i-v^{od}_j+t^{od}-q^{od}u_{ij}$ とおく．

$$(LGR^{1U}_{ij}) \quad min \quad \phi^{1U}_{ij}=\sum_{d\in N}(\sum_{o\in N}U^{od}_{ij}x^{od}_{ij} +w^d_i y^d_{ij})+f_{ij}e_{ij}u_{ij} \tag{20}$$

$st \quad (14),(16),(17)$

同様に，LG^{1L}_{ij} おいて，Lagrange 乗数 $s_{ij}(\geq 0)$ を用いて，(19) 式を Lagrange 緩和した問題 LGR^{1L}_{ij} を作成する．ここで，$L^{od}_{ij}=q^{od}h^{od}_i+v^{od}_i-v^{od}_j+t^{od}+q^{od}s_{ij}$ とおく．

$$(LGR^{1L}_{ij}) \quad min \quad \phi^{1L}_{ij}=a_{ij}f_{ij}+\sum_{d\in N}(\sum_{o\in N}L^{od}_{ij}x^{od}_{ij} +w^d_i y^d_{ij})-f_{ij}e_{ij}s_{ij} \tag{21}$$

$st \quad (14),(16),(17)$

LG_{ij} の下界値は LG^0_{ij}，LGR^{1U}_{ij} および LGR^{1U}_{ij} の最適値の中の最小値となるため，LGR^{1U}_{ij} の最適値を $\hat{\phi}^{1U}_{ij}$，LGR^{1L}_{ij} の最適値を $\hat{\phi}^{1L}_{ij}$ と置けば，LTL の下界値 LB は次のように表すことができる．

$$LB=\sum_{(i,j)\in A}\min(0,\hat{\phi}^{1U}_{ij},\hat{\phi}^{1L}_{ij}) +\sum_{d\in N}[\sum_{o\in N}\{v^{od}_d-v^{od}_o-(p^{od}-1)t^{od}\} -\sum_{i\in N\setminus\{d\}}w^d_i] \tag{22}$$

4. Lagrange 緩和問題の解法

$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{s}$ が与えられたときに，LGR^{1U}_{ij} および LGR^{1L}_{ij} を最適に解くことができれば，LTL の下界値 LB を求めることができる．

u_{ij} が与えられたときに，LGR^{1U}_{ij} の目的関数の第 2 項は定数項となるので，LGR^{1U}_{ij} は着地 d ごとの独立した問題 LGR^{U1d}_{ij} に分割できる．

$$(LGR^{U1d}_{ij}) \quad min \quad \sum_{o\in N}U^{od}_{ij}x^{od}_{ij}+w^d_i y^d_{ij} \tag{23}$$

$st \quad x^{od}_{ij}\leq y^d_{ij} \quad o\in N \qquad x^{od}_{ij}\in\{0,1\} \quad o\in N$

$y^d_{ij}\in\{0,1\}$

$y^d_{ij}=0$ の場合，$x^{od}_{ij}=0(o\in N)$ が最適となり，最適値は 0 になる．$y^d_{ij}=1$ の場合，目的関数の第 2 項は定数項となるため，LGR^{U1d}_{ij} はさらに発地 o ごとの独立した問題に分割できる．

$$min \quad U^{od}_{ij}x^{od}_{ij} \qquad st \quad x^{od}_{ij}\in\{0,1\}$$

この問題は 1 変数 x^{od}_{ij} の最小化問題であるので容易に解くことができ，その最適解は

$$x^{od}_{ij}=\begin{cases}1 & if\ U^{od}_{ij}\leq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

となり，最適値は $\min\{0,U^{od}_{ij}\}$ となる．

この最適値を (23) 式に代入し，かつ $y^d_{ij}=0$ の場合の LGR^{U1d}_{ij} の最適値が 0 であることを考慮すると，次のように LGR^{U1d}_{ij} をまとめることができる．

$$(LGR^{U1d}_{ij}) \quad min \quad \{\sum_{o\in N}\min(0,U^{od}_{ij})+w^d_i\}y^d_{ij}$$

$st \quad y^d_{ij}\in\{0,1\}$

この問題は 1 変数 y^d_{ij} の最小化問題であるので容易に解くことができ，最適解は

$$y^d_{ij}=\begin{cases}1 & if\ \sum_{o\in N}\min\{0,U^{od}_{ij}\}+w^d_i\leq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

となり，LGR^{U1d}_{ij} の最適値は $\min\{0,\sum_{o\in N}\min(0,U^{od}_{ij})+w^d_i\}$ となる．

さらに，この最適値を (20) 式に代入すると，LGR^{1U}_{ij} の最適値 $\hat{\phi}^{1U}_{ij}$ は次のような変数を含まない式として表現することができる．

$$\hat{\phi}^{1U}_{ij}=\sum_{d\in N}\min\{0,\sum_{o\in N}\min(0,U^{od}_{ij})+w^d_i\} +f_{ij}e_{ij}u_{ij}$$

同様に，LGR^{1L}_{ij} の最適値 $\hat{\phi}^{1L}_{ij}$ は次のように表すことができる．

$$\hat{\phi}^{1L}_{ij}=a_{ij}f_{ij}+\sum_{d\in N}\min\{0,\sum_{o\in N}\min(0,L^{od}_{ij}) +w^d_i\}-f_{ij}e_{ij}s_{ij}$$

LTL の下界値 LB は，最適値 $\hat{\phi}^{1U}_{ij}$ および $\hat{\phi}^{1L}_{ij}$ を (22) 式に代入することによって求めることができる．なお，緩和問題の最適解 y_{ij} は次のようになる．

$$y_{ij}=\begin{cases}1 & if\ \hat{\phi}^{1U}_{ij}\leq 0\ or\ \hat{\phi}^{1L}_{ij}\leq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

5. Lagrange 乗数の設定

問題 LTL の良い下界値を求めるためには，緩和問題の目的関数 (12)，(20) および (21) 式の値を最大にするように Lagrange 乗数を設定する必要がある．まず，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{t}$ が与えられたときの $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{s}$ の設定法を示す．ここで，LGR_{ij}^{1U} を u_{ij} に関する問題として整理しておく．

$$max_{u_{ij}\geq 0} \quad (f_{ij}e_{ij} - \sum_{d\in N}\sum_{o\in N} q^{od}x_{ij}^{od})u_{ij}$$
$$+\sum_{d\in N}\{\sum_{o\in N}(a_{ij}q^{od}/e_{ij} + q^{od}h_i^{od}$$
$$+v_i^{od} - v_j^{od} + t^{od})x_{ij}^{od} + w_i^d y_{ij}^d\}$$

この問題は 1 変数 u_{ij} に関する最大化問題であるが，u_{ij} の値によって最適解 $\boldsymbol{y}$ および $\boldsymbol{x}$ が離散的に変化するので，微分不可能な目的関数をもつ問題となる．しかし，u_{ij} に関する凸問題となるため，目的関数値を最大にする u_{ij} は 2 分探索を用いて設定することができる．u_{ij} の探索の範囲は，u_{ij} に関する劣勾配によって限定することができる．s_{ij} の場合も同様である．

一方，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{t}$ を設定する方法として，標準的な劣勾配法[3] を利用する．$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{t}$ に対する劣勾配をそれぞれ次のように定義する．ここで，ノード i が発地 o・着地 d 間の貨物の着地 d であれば 0，それ以外であれば 1 である定数を Δ_i^d とおく．

$$p_n^{od} = \delta_n^{od} - \sum_{i\in N_n^-} x_{in}^{od} + \sum_{j\in N_n^+} x_{nj}^{od}$$
$$n\in N, d\in N, o\in N$$
$$r_i^d = -\Delta_i^d + \sum_{j\in N} y_{ij}^d \quad i\in N, d\in N$$
$$q^{od} = -p^{od} + 1 + \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}^{od} \quad d\in N, o\in N$$

$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{t}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{q}$ が求められたとする．このとき，次の $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{t}$ として，

$$v_n^{od} := v_n^{od} + \theta^k p_n^{od} \quad n\in N, o\in N, d\in N$$
$$w_i^d := \begin{cases} w_i^d + \theta^k r_i^d & if\ i = d, d\in N \\ \max(0, w_i^d + \theta^k r_i^d) & otherwise \end{cases}$$
$$t^{od} := \max(0, t^{od} + \theta^k q^{od}) \quad o\in N, d\in N$$

を採用する．ここで，θ^k は，k 回目の繰り返しにおけるステップサイズであり，次のように定義される．

$$\theta^k := \frac{\rho(\text{上界値} - \text{下界値})}{\sum_{d\in N}\sum_{o\in N}\{\sum_{n\in N}(p_n^{od})^2 + (r_o^d)^2 + (q^{od})^2\}} \quad (24)$$
$$\lim_{k\to\infty}\theta^k \to 0\ and\ \sum_{k=0}^{\infty}\theta^k \to \infty$$

ここで，ρ は $(0,2)$ のパラメータ，下界値は $(k-1)$ 回目の下界値 LB である．ただし，上界値は別途求める必要がある．

以上のように，LG の解から劣勾法によって Lagrange 乗数 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{t}$ を更新し，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{s}$ を求め，LG を解いて $\boldsymbol{y}$ および $\boldsymbol{x}$ を求め直すという手順を繰り返すことによって，LTL の下界値を改善していくことができる．

6. おわりに

本研究では，混載輸送路線設計と貨物輸送経路設計を扱い，路線の最低便数，木条件および積換え回数を制約とし，混載輸送費用と積替え費用の和を最小にする混載輸送ネットワーク設計を対象とした．この問題に対して定式化を行い，フロー保存式，木条件および積換え回数制約を Lagrange 緩和した問題を示した．この Lagrange 緩和問題は路線ごと，着地ごと，発地ごとの問題に分割することができ，分割した問題が 0 と係数値との比較によって容易に解くことができることを示した．また，Lagrange 乗数が 2 分探索法および劣勾配法によって設定できることを示した．

緩和問題の解法を提案したが，最適解や良い近似解を求めることが本来の目的であり，劣勾配法を行うためには良い上界値が必要である．したがって，今後，効率的な Lagrange ヒューリスティック解法やタブーサーチ法などのメタ解法を開発する必要がある．

参考文献

1) Crainic, T. G. and Roy, J.: Design of Regular Intercity Driver Routes for the LTL Motor Carrier Industry, Transportation Science, Vol. 26.pp280–295,1992.
2) Hoppe, B., Klampfl, E. Z., McZeal, C. and Rich, J.: Strategic Load-Planning for Less-Than-Truckload Trucking, Technical Report CRPC-TR99812-S, Center for Research on Parallel Computation, Rice University, 1999.
3) 久保幹雄, 田村明久, 松井知己：応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.
4) Powell, W. B.: A local Improvement Heuristic for the Design of Less-Than-Truckload Motor Carrier Networks, Transportation Science, Vol. 20, pp246–257, 1986.
5) Powell, W. B. and Koskosidis, I. A.: Shipment Routing Algorithms with Tree Constraints, Transportation Science, Vol. 26, pp230–245, 1992.
6) Powell, W. B. and Sheffi, Y.: Design and Implementation of an Interactive Optimization System for Network design in the Motor Carrier industry, Operations Research, Vol. 37, pp12–29, 1989.
7) Roy, J. and Delorme, L.: NETPLAN: A Network Optimization Model for Tactical Planning in the Less-Than-Truckload Motor-Carrier Industry, INFOR, Vol. 27, pp22–35, 1989.