

連鎖的意思決定構造を考慮した不確実性下でのプロジェクト評価手法^{*1}

Evaluation of Infrastructure Projects with Complex Decision Making Structures ^{*1}

長江 剛志^{*2}, 赤松 隆^{*3}

By Takeshi Nagae^{*2}, Takashi Akamatsu^{*3}

1 はじめに

社会基盤整備事業をはじめとする多くのプロジェクトは、複数のリアル・オプションから構成される複合オプションと見なせる。例えば、有料道路の新規建設事業は、用地取得を行う権利、用地取得後に工事を始められる権利、完成後の道路から料金収入を得られる権利などの束と見なせる。一般に、この複合オプションの権利行使（意思決定）は、複雑な相互依存関係を持つ。先の有料道路事業の例では、着工後、景気の変動に応じて、計画を一時凍結したり再開することが（潜在的には）可能である。しかし、これらの意思決定は、用地を取得して初めて可能となり、道路が完成すると同時に意味を成さないものとなる。従って、このような事業の評価および意思決定問題を取り扱うためには、複雑な連鎖的権利行使構造—ある権利の行使によって、新たに他のオプションを獲得したり、既得のオプションを喪失したりする—をもつリアル・オプションを対象とした分析手法の開発が必要不可欠である。

従来、リアル・オプション理論を用いた研究には、Dixit and Pindyck¹⁾をはじめとする膨大な蓄積が存在する。しかし、それらはいずれも、特定の権利行使構造に対する限定的な分析を行うに留まっており、上述のような複雑な連鎖的構造をもつリアル・オプション問題を統一的に扱う枠組みは、未だ確立していない。

このような背景に鑑み、本研究では、任意の権利行使構造をもつリアル・オプション問題をシステムティックに表現・分析するための枠組みを提案し、その最適な権利行使戦略およびオプション価値を計算するための手法を開発する。本稿では、以下の4つの手順に従って議論を展開する。まず、第1に、上述の複雑な連鎖的構造を、有向グラフとして表現する枠組みを提案する。第2に、この有向グラフ構造をもつオプション（以下、グラフ・オプション）の評価および意思決定問題の定式化を行う。第3に、こうして定式化された問題に対して数理解析を行い、この問題が、異なる2つの座標軸に分解できることを明らかにする。第4に、この問題の分解可能性に着目した数値解法を提案する。

2 モデルの枠組みと定式化

(1) 有向グラフとしての意思決定構造の表現

本研究では、オプションが持つ連鎖的意思決定構造を、オプションの“アクティビティ”をノードとし、そのアクティビティ間の推移関係を有向リンクで表した図1のような有向グラフを用いて表現する。ここで、オプションのアクティビティとは、ある特定の経済活動を行っている状況を指す。例えば、有料道路の新規建設事業における用地取得期間、建設期間および供用期間などの各段階は、それぞれ、1つのアクティビティと見なせる。また、明示的な経済活動を行っていない状況もアクティビティと見なすことができる。上述の有料道路事業の例では、計画を開始する前、あるいは計画を一時凍結している状況も、それぞれ、1つのアクティビティと捉えることができる。以下では、このアクティビティの集合を $N \equiv \{1, 2, \dots, N\}$ で表す。ここで、アクティ

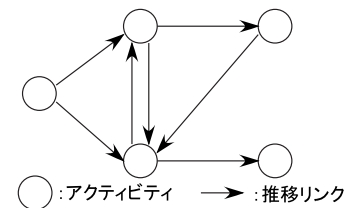


図1: 有向グラフによる権利行使構造の表現

ビティ n から m への変更が行えるとき、このアクティビティの変更を有向リンク (n, m) で表現する。以下では、このリンクを n から m への推移リンクと呼び、その集合を $L \equiv \{(n, m)\}$ で表す。このとき、オプションの意思決定構造は、有向グラフ $G(N, L)$ で表現される。以下では、このような有向グラフで権利行使構造が表現されるオプションを、“グラフ・オプション”と呼ぶ。

この有向グラフ G 上では、投資や計画凍結といった意思決定は、あるアクティビティから他のアクティビティへの変更として表現される。例えば、投資の実行は、投資前アクティビティから投資後アクティビティへの変更で表され、道路の新規建設事業の一時凍結は、建設アクティビティから待機アクティビティへの変更として表現される。ここで、あるアクティビティ n から（他のアクティビティを介さずに）推移可能なアクティビティを n の推移先アクティビティと呼び、 $N(n)$ で表す。また、推移先の存在しないアクティビ

^{*1} keywords: プロジェクト評価, 連鎖的意思決定構造, グラフ・オプション

^{*2} 正会員 博士 (情報科学) 京都大学・防災研究所

^{*3} 正会員 工博 東北大学・大学院情報科学研究科

ティを G の終端アクティビティ, それ以外を中間アクティビティと呼ぶ。

(2) アクティビティから発生するキャッシュ・フロー

対象時間帯を $[0, T]$ とし, 時刻 T での事象集合を Ω とする. Ω に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{P(\omega) | \omega \in \Omega\}$ で表し, Ω のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t) | t \in [0, T]\}$ を定義する. 本稿では, オプションの各アクティビティから発生するキャッシュ・フローを, 以下の伊藤拡散過程に従う“代表的な状態変数” $P(t)$ の関数として表現する:

$$dP(t) = \alpha(t, P) dt + \sigma(t, P) dZ(t), \quad P(0) = P_0. \quad (1)$$

ここで, $\alpha, \sigma: [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ は既知の関数, $dZ(t)$ は, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される 1 次元 Wiener 過程の増分である. この代表的状態変数の例としては, 交通量, 財や資産の価格, 人口などが挙げられる. 本稿では, 状態変数 $P(t)$ および Wiener 過程 $Z(t)$ の次元を, いずれも 1 次元とする. これは, 理論展開を簡潔にするための便宜であり, 本提案手法の本質的な仮定 (あるいは限界) を示すものではない. 事実, 本研究の枠組みは, 理論的には, 任意次元の状態変数および Wiener 過程を扱うことができる. 以下では, 時刻 t において, 状態変数 $P(t) = P$ が観測された状況を, 2 つ組 (t, P) で表現し, その状況下での条件付期待値を, $E_{t,P}[\cdot] \equiv E[\cdot | P(t) = P]$ で表す. また, 状況 (t, P) がとり得る空間全体を, $\mathcal{K} \equiv [0, T] \times \mathcal{R}$ で表す.

オプションの各アクティビティから発生するキャッシュ・フローは, 以下の 3 つに区別される: 第 1 に, $[0, T]$ の間, 毎時刻, 時間について連続的に発生する“利潤フロー”, 第 2 に, 満期 T においてのみ瞬間的に発生する“終端ペイ・オフ”, 第 3 に, アクティビティを変更するときに瞬間的に発生する“推移費用”. 以下では, アクティビティ n から状況 $(t, P(t))$ に発生する単位時間当たりの利潤フロー, および満期での状況 $(T, P(T))$ で発生する終端ペイ・オフを, それぞれ, 既知関数 $\pi_n(t) \equiv \pi_n(t, P(t))$ および $F(T) \equiv F(P(T))$ で表す. アクティビティ n から m への推移費用を所与の定数 $C_{n,m}$ で表す. また, これらのキャッシュ・フローの割引率を, 所与の定数 r で表す.

(3) 定式化

グラフ・オプションの所有者は, 期間 $[0, T]$ 中に発生するキャッシュ・フローの期待現在正味価値 (以下, 期待利潤) を最大化するように, アクティビティ戦略 $\{n(t)\}$ を決定する. ここで, $n(t)$ は, 時刻 t で選択されるアクティビティである. この行動は, 以下のように定式化される:

$$[P] \max_{\{n(t)\}_{t \in [0, T]}} E \left[\int_0^T e^{-rt} \pi_{n(t)}(t) dt + e^{-rT} F_{n(T)}(T) - \sum_k e^{-r\tau_k} C_{n(\tau_k^-), n(\tau_k)} \right]$$

ただし, τ_k, τ_k^- は, それぞれ, k 番目に推移が行われる時刻と, その直前の時刻を表す. また, n_0 は初期時点 $t = 0$ で選択されている (既知の) アクティビティを表す. 問題 [P] の目的関数の内, 第 1 項は, 期間 $[0, T]$ 中に各アクティビティから得られる利潤フロー, 第 2 項は, 満期 T で得られる終端ペイ・オフ, 第 3 項は, 各推移が行われる時点で支払われる推移費用を表す. ここで, 問題 [P] の解として得られる最適戦略 $\{n^*(t)\}$ は, 状態変数 $P(t)$ の適合過程であることに注意しよう.

続く第 3, 4 章では, この問題 [P] が, 図 2 に示すように, 2 つの異なる座標軸—時間およびグラフの構造—ごとに分解できることを明らかにする.

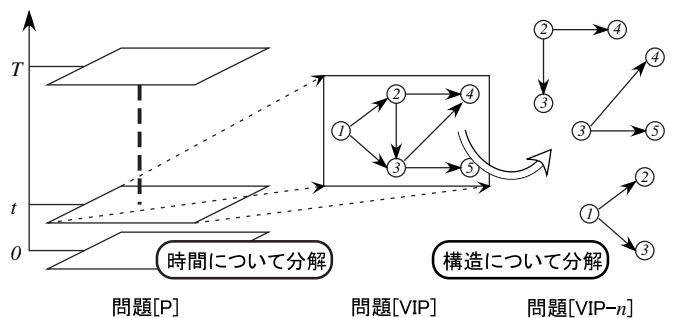


図 2: グラフ・オプション評価問題の分解

3 時間に関する分解

本章では, 問題 [P] に DP 原理を適用する事で, この問題が各瞬間ごとの変分不等式問題 (VIP: Variational Inequality Problem) に帰着することを示す. 具体的には, まず, 問題 [P] の最適値関数が, 各アクティビティの“価値”を用いて表現されることを示す. 換言すれば, 問題 [P] が, 全てのアクティビティの価値を求める問題に帰着することを明らかにする. 次に, こうして導出した問題を DP 分解することで, 各瞬間で成立すべき VIP を導出する.

(1) アクティビティの価値を用いた表現

状況 (t, P) が観測された下での問題 [P] の最適値関数を以下のように定義する:

$$\mathcal{J}(t, P) \equiv \max_{\{n(s) | s \in [t, T], n(t) = n_0\}} E_{t,P} \left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{n(s)}(s) ds + e^{-r(T-t)} F_{n(T)}(T) - \sum_{k \in \{k' | \tau_{k'} > t\}} e^{-r(\tau_k - t)} C_{n(\tau_k^-), n(\tau_k)} \right]. \quad (2)$$

この最適値関数は, 状況 (t, P) が観測された下で, 期間 $[t, T]$ に当該グラフ・オプションから得られる期待最大利潤を意味している.

式 (2) は、期待値演算のネストを用いれば、以下のように書き直せる：

$$\mathcal{J}(t, P) = \max_{(\tau, m(\tau))} \mathbb{E}_{t, P} \left[\int_t^\tau e^{-r(s-t)} \pi_{n_0}(s) ds + e^{-r(\tau-t)} \{V_{m(\tau)}(\tau, P(\tau)) - C_{n_0, m(\tau)}\} \right] \quad (3)$$

ここで、 $(\tau, m(\tau))$ は、それぞれ、時刻 t 以降で最初に行われる推移の時刻およびその推移先を表す。また、 $V_{m(\tau)}(\tau, P(\tau))$ は、以下のように定義される未知関数である：

$$V_{m(\tau)}(\tau, P(\tau)) \equiv \max_{\{n(s) | s \in [t, T], n(\tau) = m(\tau)\}} \mathbb{E}_{\tau, P(\tau)} \left[\int_\tau^T e^{-r(s-\tau)} \pi_{n(s)}(s) ds + e^{-r(T-\tau)} F_{n(T)}(T) - \sum_{k \in \{k' | \tau_{k'} > \tau\}} e^{-r(\tau_k - \tau)} C_{n(\tau_k^-), n(\tau_k)} \right] \quad (4)$$

この式は、状況 $(\tau, P(\tau))$ 下で、アクティビティ $m(\tau)$ が選択されているとしたとき、当該グラフ・オプションから、期間 $[\tau, T]$ に得られる期待最大利潤を表している。本稿では、この $V_{m(\tau)}$ をアクティビティ $m(\tau)$ の“価値”と呼ぶ。ここで、終端アクティビティ \hat{n} の価値は、それ以降の推移戦略 $n(t)$ に拠らないため、

$$V_{\hat{n}}(t, P) \equiv \mathbb{E}_{t, P} \left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{\hat{n}}(s) ds + e^{-r(T-t)} F_{\hat{n}}(T) \right]. \quad (5)$$

となることに注意されたい。状況 (t, P) の下での任意のアクティビティ n の価値 $V_n(t, P)$ は、期待演算のネストと、次の推移先アクティビティの価値を用いることで、式 (3) と同じ構造を持つ表現に書き直せる。また、式 (2) で定義される最適値関数は、初期アクティビティ n_0 の価値と見なせるため、以下では、一般性を損なうことなく、 $V_{n_0}(t, P) \equiv \mathcal{J}(t, P)$ と記述する。以上のことより、グラフ・オプション評価問題 [P] は、各アクティビティの価値 $\mathbf{V}(t, P) \equiv \{V_n(t, P) | n \in N\}$ を求める問題に帰着することが判った。

(2) 最適性条件

本節では、各アクティビティの価値 (4) を時間について DP 分解することで、問題 [P] が、各瞬間ごとの変分不等式問題に帰着することを明らかにする。

式 (4) に DP 原理を適用すれば、各状況 (t, P) の下で、アクティビティ n の価値 $V_n(t, P)$ が従う以下の HJB 方程式を得る：

$$V_n(t, P) = \max. \left\{ \pi_n(t) dt + e^{-r dt} \mathbb{E}_{t, P} [V_n(t, P) + dV_n(t, P)], \max_{m \in N(n)} [V_m(t, P) - C_{n, m}] \right\}, \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (6)$$

この式の 2 行目の項は、状況 (t, P) において、微小時間 dt だけアクティビティ n に留まる (権利行使を待機する) 場合に n から得られる収益 (i.e. インカム・ゲインとキャピタル・ゲインの和) を表す。また、3 行目の項は、状況 (t, P) において権利行使を行う場合に得られる推移価値 (i.e. 推移先の価値と推移費用の差) の最大値を表す。

式 (6) に伊藤の補題を適用して整理すれば、状況 (t, P) で $V_n(t, P)$ が従う以下の変分不等式条件を得る：

$$\min. \left\{ -\mathcal{L}V_n(t, P) - \pi_n(t), V_n(t, P) - \max_{m \in N(n)} [V_m(t, P) - C_{n, m}] \right\} = 0, \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (7)$$

ここで、 \mathcal{L} は以下のように定義される偏微分演算子である：

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial P} \alpha(t, P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \sigma^2(t, P) - r. \quad (8)$$

式 (7) の変分不等式条件は、アクティビティ n についての条件のみを記述したものである。ここで、一般的な有向グラフにおいては、推移先アクティビティ m の価値 V_m もまた未知関数であることに注意されたい。従って、状況 (t, P) で成立すべき問題は、変分不等式条件 (7) を連立させ、全てのアクティビティの価値 $\mathbf{V}(t, P) \equiv \{V_n(t, P) | n \in N\}$ を同時に求める以下の変分不等式問題 (VIP: Variational Inequality Problem) となる：

[VIP] Find $\{\mathbf{V}(t, P) | (t, P) \in \mathcal{K}\}$ such that

$$\min. \{-\mathcal{L}\mathbf{V}(t, P) - \boldsymbol{\pi}(t), \mathcal{A}\mathbf{V}(t, P)\} = \mathbf{0}, \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}.$$

ここで、 $\boldsymbol{\pi}(t) \equiv \{\pi_n(t) | n \in N\}$ 、 \mathcal{L} は、全ての V_n に偏微分作用素 \mathcal{L} を適用させる演算子である。また、 \mathcal{A} は、以下のように定義される演算子である：

$$[\mathcal{A}\mathbf{V}(t, P)]_n \equiv \min_{m \in N(n)} \{V_n(t, P) - V_m(t, P) + C_{n, m}\}. \quad (9)$$

4 グラフ構造に関する分解

問題 [VIP] は、全てのアクティビティの価値 $\{\mathbf{V}(t, P)\}$ を同時に求める問題である。従って、そのままでは、アクティビティの数に応じて、同時に解くべき問題の規模が増大する。そこで、本節では、問題 [VIP] をグラフ構造に関して分解する事で、より小さな規模の問題を逐次的に解く問題へと帰着させる。

問題 [VIP] のグラフ構造に関する分解可能性についての議論は、対象とするオプションの権利行使構造 $\mathcal{G}(N, L)$ がサイクルを含むかどうかで異なる。本稿では、有向グラフ

$\mathcal{G}(N, L)$ がサイクルを含まない場合についてのみ解説する。サイクルを含む場合についての詳細な議論は、紙面の都合上、ここでは省略するが、より規模の小さな問題に分解できることが判っている³⁾。

本節では、問題 [VIP] の分解可能性についての議論を、以下の戦略に基づいて展開する：第1に、あるアクティビティ n が“確定候補アクティビティ”ならば、 n についての VIP だけを独立に解くことで V_n を求められることを示す。第2に、この事実を利用すれば、終端アクティビティから順に、有向リンクを遡りながら各ノードの価値を逐次的に求めていくことで、問題 [VIP] を解けることを明らかにする。

まず、アクティビティ n に着目し、その全ての推移先の価値 $\bar{V}_n(t, P) = \{V_m(t, P) | m \in N(n)\}$ が (t, P) についての既知関数であるとする。以下では、このようなノードを“確定候補アクティビティ”と呼ぶ。このとき、式 (7) の変分不等式条件は、アクティビティ n について“閉じた”条件となる。なぜなら、式 (7) の第2項 $\mathcal{A}V(t, P)$ が、アクティビティ n の価値 $V_n(t, P)$ と、既知関数 $\bar{V}_n(t, P)$ のみを用いて表現できるためである。このとき、価値 $V_n(t)$ は、以下の VIP の解として得られる：

[VIP- n] Find $\{V_n(t, P) | (t, P) \in \mathcal{K}\}$ such that

$$\min. \left\{ -\mathcal{L}V_n(t, P) - \pi_n(t), \right. \\ \left. \min_{m \in N(n)} \{V_n(t, P) - \bar{V}_m(t, P) + C_{n,m}\} \right\}. \quad (10)$$

問題 [VIP- n] は、長江・赤松²⁾における“分岐型”のオプション評価問題と等価であり、その数値解法をそのまま適用できる。

次に、意思決定構造 $\mathcal{G}(N, L)$ がサイクルを含まない場合、問題 [VIP] は、アクティビティごとの問題 [VIP- n] を以下の手順に従って逐次的に解く問題に帰着する：

[Algorithm]

Step-0 $\mathcal{G}(N, L)$ の終端アクティビティの価値を式 (5) より計算する。 $i := 1$ とする。

Step-1 集合 N の内、価値が求められていないアクティビティの集合を $\hat{N}^{(i)}$ とする。

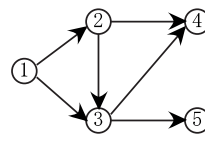
Step-2 $\hat{N}^{(i)}$ の中から確定アクティビティ $m^{(i)}$ を一つ選び、問題 [VIP- $m^{(i)}$] を解いてその価値 $V_{m^{(i)}}(t, P)$ を求める。

Step-3 $\hat{N}^{(i)}$ から $m^{(i)}$ を取り除いたものが空集合ならば終了。そうでなければ $i := i + 1$ として Step-1。

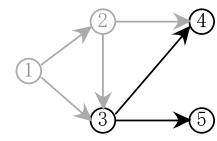
ここで、グラフ $\mathcal{G}(N, L)$ がサイクルを含まないならば、任意のイテレーション i において、 $N_B^{(i)} \subset \hat{N}^{(i+1)}$ となり、有

限のイテレーションで $\hat{N}^{(i)} = \emptyset$ となることに注意しよう。このことは、[Algorithm] によって、全てのアクティビティの価値を求められることを意味している。

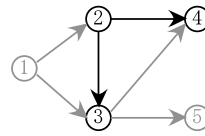
最後に、[Algorithm] の適用例を示そう。その対象とするグラフ・オプションは、図 3 a) で表される構造を持つとする。まず、終端アクティビティ 4, 5 の価値を、式 (5) より求め、 $i := 1$ とする。このとき、価値が決定しているアクティビティの集合は $\{4, 5\}$ であるから、確定候補アクティビティは $m^{(1)} := 3$ となる。この価値を [VIP-3] の解として求め、 $i := 2$ とする (図 3 b))。この手順を、ノード 2, 1 について、この順に繰り返せば (図 3 c), d))、全てのアクティビティの価値が求められる。



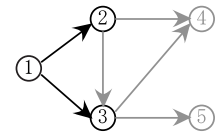
a) 対象とするグラフ構造



b) ノード3の価値を求める



c) ノード2の価値を求める



d) ノード1の価値を求める

図 3: アルゴリズムの適用例

これまでの議論より、問題 [VIP] は、終端アクティビティから順に、有向リンクを遡りながら、確定候補アクティビティの価値を逐次的に求める問題に帰着することが判った。

5 おわりに

本研究では、複雑な連鎖的権利行使構造を持つ複合オプションの評価・意思決定問題を、システムティックに記述・分析するための手法を開発した。より具体的には、オプションのもつ意思決定構造を有向グラフで表現する枠組みを提案し、その価値および最適権利行使戦略を計量化するためのアルゴリズムを開発した。その具体的な適用例と数値計算結果は、講演会にて報告する予定である。

参考文献

- 1) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- 2) 長江剛志, 赤松隆: リアル・オプション価格の統一的計算法: 相補性問題アプローチ, 土木計画学研究・講演集, Vol. 28, 2003.
- 3) 長江剛志: 不完備市場におけるネットワーク構造をもつリアル・オプションの評価, 東北大学大学院情報科学研究科博士論文, 2003.