リアル・オプション価格の統一的計算法：相補性問題アプローチ*1

Complementarity Problem Approach to Pricing of Real Options *1

長江 剛志*2, 赤松 隆*3

By Takeshi Nagae*2, Takashi Akamatsu*3

1 はじめに

不確実なキャッシュ・フローを発生させる不動産やプロジェクトの多くは，複数のリアル・オプションから構成される複合オプションと見なせる．例えば，賃貸住宅や賃貸オフィスなど，様々な用途に利用可能な土地は，各用途に応じた土地の利用権の束と捉えられる．

従来，リアル・オプション理論を用いた研究には，Dixit and Pindyck[2) をはじめとする膨大な蓄積が存在する．しかし，上述の不動産やプロジェクトの評価にこれらの研究をそのまま適用するには，以下の 2 点で疑問が残る．第 1 に，これらの研究は，いずれも，特定の権利行使構造のみを対象としており，異なる構造のリアル・オプション問題をシステマティックに扱うものではない．第 2 に，従来研究の殆どは，特殊な状況を想定した限定的な分析を行うに留まっている．具体的には，無限満期の枠組みの下で，状態変数が幾何 Brown 運動に従うとし，value matching 条件と smooth pasting 条件より解析解が求められるケースだけを分析対象としている．従って，これらの研究は，有限満期の枠組みや，状態変数が任意のプロセスに従う場合といった，より現実的な状況を扱うことができない．

このような背景に鑑み，長江・赤松 [3)] は，複雑な権利行使構造をもつリアル・オプション問題を，統一的に記述・分析するための枠組みを提案した．本研究では，この枠組みの下で，以下の 2 つを行うことを目的とする．第 1 に，有限満期の枠組みと任意の状態変数プロセスを前提とした上で，異なる権利行使構造をもつリアル・オプションの評価問題が，変分不等式問題として統一的に記述・分析できることを明らかにする．ここで対象とするオプション構造は，先行研究 [3)] の枠組み中で基本となる 4 つの構造 (後述) である．第 2 に，この問題を離散化したものが，数理計画分野での理論発展が著しい有限次元の線形相補性問題に帰着することを明らかにし，その最先端の理論を応用した解法を開発する．

本稿の構成は以下の通りである．続く第 2 章でモデルの枠組みを示し，その枠組みの下で，第 3 章でオプション評価問題の定式化および数理的な解析を行う．最後に，第 4 章で，この解析結果を利用したオプション評価問題の数値解法を示す．

*1 keywords:リアル・オプション, 相補性問題, 統一的価格評価

*2 正会員 博士 (情報科学)　京都大学・防災研究所

*3 正会員 工博　東北大学・大学院情報科学研究科

2 モデルの枠組み

(1) 有向グラフとしての権利行使構造の表現

本研究では，オプションが持つ権利行使構造を，オプションの “アクティビティ” をノードとし，そのアクティビティ間の推移関係を有向リンクで表した有向グラフを用いて表現する．ここで，アクティビティとは，ある特定の経済活動状況 (e.g. 土地の賃貸住宅としての運用，有料道路の建設) を行っている状況を指す．このグラフ上では，オプションの権利行使 (意思決定) は，アクティビティの変更として表現される．アクティビティ n から m への変更 (権利行使) が行えるとき，このアクティビティの変更を有向リンク (n, m) で表現する．以下では，このリンクを n から m への推移リンクと呼ぶ．

本稿では，このようなグラフとして表されるオプション構造の内，図 1 に示す 4 つの構造を対象とする．これらの構造を対象とする意義は以下の 2 点である．第 1 に，従来のリアル・オプション分析で対象とされてきた権利行使構造の多くは，この 4 つの構造のいずれかに分類できる．第 2 に，これらの構造は，先行研究 [3)] の枠組み中で基本となる構造であり，本稿での分析結果を用いることで，より複雑な権利行使構造に対する分析および解法の開発が可能となる．

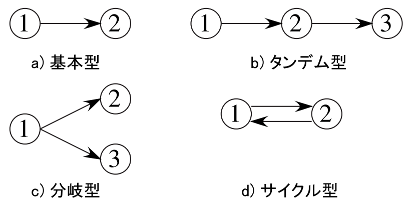

図 1: リアル・オプションの権利行使構造

(2) アクティビティから発生するキャッシュ・フロー

対象時間帯を $[0, T]$ とし，時刻 T での事象集合を Ω とする．Ω に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega) | \omega \in \Omega\}$ で表し，Ω のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t) | t \in [0, T]\}$ を定義する．本稿では，各アクティビティから発生するキャッシュ・フローを，以下の伊藤拡散過程に従う “代表的な状態変数” $P(t)$ の関数として表現する：

$$\mathrm{d}P(t) = \alpha_n(t, P)\,\mathrm{d}t + \sigma_n(t, P)\,\mathrm{d}Z(t),\ P(0) = P_0, \forall n. \quad (1)$$

ここで，$\alpha_n, \sigma_n : [0, T] \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は既知関数，$\mathrm{d}Z(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される 1 次元 Wiener 過程の増分

である．このような状態変数の例としては，景気指数 (e.g. TOPIX)，交通量，人口，財や資産の価格などが挙げられる．本研究の枠組みでは，選択されるアクティビティによって状態変数プロセスが異なっていても良いことに注意されたい．このことは，例えば，地代の成長過程が賃貸住宅や駐車場といった土地の用途に応じてそれぞれ異なるような場合にも，本提案手法が適用可能であることを意味している．以下では，時刻 t において，状態変数 P が観測された状況を，2 つ組 (t, P) で表現し，その状況下での条件付期待値を，$\mathrm{E}_{t,P}[\cdot] \equiv \mathrm{E}[\cdot|P(t)=P]$ で表す．また，状況 (t, P) の空間を，$\mathcal{K} \equiv [0, T] \times \mathcal{R}$ で表す．

本稿では，状態変数 $P(t)$ および Wiener 過程 $Z(t)$ の次元を，いずれも 1 次元と仮定する．これは，理論展開を簡潔にするための便宜であり，本提案手法の本質的な仮定あるいは限界を示すものではない．

対象とするオプションの，各アクティビティから発生するキャッシュ・フローは，以下の 3 つに区別される：第 1 に，$[0, T)$ の間，毎時刻，時間について連続的に発生する "利潤フロー"，第 2 に，満期 T においてのみ瞬間的に発生する "終端ペイ・オフ"，第 3 に，アクティビティを変更するときに瞬間的に発生する "推移費用"．以下では，アクティビティ n から状況 $(t, P(t))$ に発生する単位時間当たりの利潤フロー，および満期での状況 $(T, P(T))$ で発生する終端ペイ・オフを，それぞれ，既知関数 $\pi_n(t) \equiv \pi_n(t, P(t))$ および $F(T) \equiv F(P(T))$ で表す．アクティビティ n から m への推移費用を，所与の定数 $C_{n,m}$ で表す．また，これらのキャッシュ・フローの割引率を，所与の定数 r で表す．

3　定式化

本稿では，図 1 に示した各構造の問題に対して，オプション評価問題を定式化し，DP 分解によって導かれる最適性条件が変分不等式として記述されることを明らかにする．本節では，紙面の都合上，基本型，分岐型，サイクル型構造のみを対象として分析を行う．図 1b) のタンデム型については，ここでは議論を省略するが，各リンクごとの基本型構造の問題に分解できることが判っている．

(1)　基本型構造

本稿では，図 1a) のように，2 つのノードが 1 本の推移リンクで結ばれた構造を，基本型 (部分) 構造と呼ぶ．任意の権利行使構造は，いずれも，この基本型構造の組み合わせで表現される．従来の金融/リアル・オプションの殆どは，このような基本型構造を対象としている．例えば，ファイナンス分野におけるアメリカン・オプションや，Dixit and Pindyck[2)] が扱った一度きりの投資問題は，いずれも，この基本型構造で表現できる．以下では，理論展開を簡潔に示すため，ノード 1 からの利潤フローおよび終端ペイ・オフが発生しない (i.e. $\pi_1(t) = F_1(T) = 0$) とする．

図 1a) の構造を持つオプションの所有者は，期間 $[0, T]$ 内にオプションから得られる期待利潤を最大とするように，ノード 1 から 2 への推移時刻 τ を決定する．この合理的行動は以下の最適停止問題として定式化される：

[P-A]

$$\max_{\tau\in[0,T]} \mathrm{E}\left[\int_{\tau}^{T} e^{-rt}\pi_2(t)\,\mathrm{d}t + e^{-rT}F_2(T) - e^{-r\tau}C_{1,2}\right].$$

DP 原理を用いてこの問題を分解すれば，状況 (t, P) における以下の HJB 方程式を得る：

$$V_1(t,P) = \max.\Big\{e^{-r\,\mathrm{d}t}\mathrm{E}_t\left[V_1(t,P) + \mathrm{d}V_1(t,P)\right], \\ V_2(t,P) - C_{1,2}\Big\}, \quad \forall(t,P) \in \mathcal{K}. \quad (2)$$

ここで，$V_1(t, P)$ は問題 [P-A] の最適値関数，$V_2(t, P)$ はノード 2 の "価値" であり，それぞれ，以下のように定義される：

$$V_1(t,P) \equiv \max_{\tau\in[t,T]} \mathrm{E}_{t,P}\left[e^{-r(\tau-t)}\left\{V_2(\tau,P(\tau)) - C_{1,2}\right\}\right] \quad (3)$$

$$V_2(t,P) \equiv \mathrm{E}_{t,P}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)}\pi_2\,\mathrm{d}s + e^{-r(T-t)}F_2(T)\right]. \quad (4)$$

ただし，$V_1(t, P)$ の終端条件は以下の式で表される：

$$V_1(T,P) = \max.\left\{0, F_2(T) - C_{1,2}\right\}. \quad (5)$$

式 (3), (4) で定義される $V_n(t, P)$ は，状況 (t, P) においてノード n が選択されている条件下で，それ以降の期間 $[t, T]$ に得られる最大期待利潤を表す．本稿では，これをノードの "価値" と呼ぶ．この意味において，問題 [P-A] の最適値関数と，初期ノード $n_0 = 1$ の価値は等価であり，以下では両者を特に区別しないものとする．

式 (2) に伊藤の補題を適用して整理すれば，問題 [P-A] は，以下の無限次元 VIP に帰着する：

[VIP-A] Find $\{V_1(t,P)|(t,P) \in \mathcal{K}\}$ such that

$$\min.\Big\{-\mathcal{L}_1 V_1(t,P), \Phi_1 V_1(t,P)\Big\} = 0, \quad \forall(t,P) \in \mathcal{K}.$$

ただし，終端条件は (5) である．ここで，$\mathcal{L}_n$ は式 (1) のノードごとの状態変数プロセスから決定される偏微分演算子であり，以下のように定義される：

$$\mathcal{L}_n \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial P}\alpha_n(t,P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\sigma_n^2(t,P) - r, \quad \forall n. \quad (6)$$

また，Φ_1 は以下のように定義される演算子である：

$$\Phi_1 V_1(t,P) \equiv V_1(t,P) - V_2(t,P) + C_{1,2}. \quad (7)$$

ここで，ノード 2 の価値 $V_2(t,P)$ は，式 (4) より予め計算可能であるため，問題 [P-A] においては，(t,P) についての既知関数 と見なせることに注意されたい．

(2) 分岐型構造

次に，図 1c) のような分岐型構造を考えよう．このような分岐型構造をもつオプションの例として，背景で述べたような複数の用途をもつ不動産などが挙げられる．本節では前，節と同様，ノード 1 からは利潤が発生せず，ノード 2, 3 からのみ利潤フローおよび終端ペイ・オフが発生すると仮定する．この仮定は，上述の不動産の例では，ノード 1 を更地，ノード 2, 3 を賃貸住宅および賃貸オフィスと見なし，各用途に応じて地代収入が発生する状況に相当する．前節の基本構造と図 1c) の分岐型構造との違いは，オプションの所有者が権利行使時刻 τ だけでなく，推移先 $m(\tau)$ を決定できる点である．このとき，オプションの利潤最大化行動は以下のように定式化される：

[P-B]

$$\max_{(\tau,m(\tau))} \mathrm{E}\left[\int_\tau^T e^{-rt}\pi_{m(\tau)}\,\mathrm{d}t + e^{-rT}F_{m(\tau)} - e^{-r\tau}C_{1,m(\tau)}\right]$$

前節と同様に，各ノードの価値を以下のように定義する：

$$V_1(t,P) \equiv \max_{\tau\in[t,T]} \mathrm{E}_{t,P}\Big[e^{-r(\tau-t)} \max_{m(\tau)\in\{2,3\}}\Big\{V_{m(\tau)}(\tau,P(\tau)) - C_{1,m(\tau)}\Big\}\Big] \quad (8)$$

$$V_m(t,P) \equiv \mathrm{E}_{t,P}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)}\pi_m\,\mathrm{d}s + e^{-r(T-t)}F_m(T)\right] \quad (9)$$

ただし，$m=2,3$．また，$V_1(t,P)$ の終端条件は以下の式：

$$V_1(T,P) = \max.\left\{0, \max_{m\in\{2,3\}}\{F_m(T) - C_{1,m}\}\right\}. \quad (10)$$

で表される．このとき，問題 [P-B] は以下の無限次元 VIP に帰着する：

> [VIP-B] Find $\{V_1(t,P)|(t,P)\in\mathcal{K}\}$ such that
>
> $$\min\Big\{-\mathcal{L}_1V_1(t,P), \Phi_1V_1(t,P)\Big\} = 0, \quad \forall(t,P)\in\mathcal{K}.$$

ただし，終端条件は (10) である．また，Φ_1 は以下のように定義される演算子である：

$$\Phi_1V_1(t,P) \equiv V_1(t,P) - \max_{m\in\{2,3\}}\{V_m(t,P) - C_{1,m}\} \quad (11)$$

ここで $V_2(t,P), V_3(t,P)$ は前節と同様，式 (9) から予め計算できる．すなわち，式 (11) の右辺第 2 項もまた，基本構造問題と同様，(t,P) についての既知関数として扱えることに注意されたい．これより，問題 [VIP-B] は，推移先の純価値の最大値 $\max_{m\in\{2,3\}}\{V_m(t,P) - C_{1,m}\}$ を予め計算することで，基本型構造の問題に帰着することが判った．

(3) サイクル型構造

ここまでの議論は，不可逆な権利行使構造のみを対象とした．しかし，現実のリアル・オプション分析においては，意思決定が可逆的である場合も多い．このような権利行使構造は，図 1d) のようにノード間を相互に推移できるサイクル型構造として表現される．本節では，このサイクル型構造の問題が，それぞれのノードの価値を同時に求める VIP に帰着することを示す．以下では，理論展開を簡潔に示すために，それぞれのノードに終端ペイ・オフが存在せず (i.e. $F_1(T) = F_2(T) = 0$)，利潤フロー $\pi_1(t), \pi_2(t)$ のみが発生すると仮定する．

図 1d) の構造をもつオプションの所有者は，期待利潤の最大化を目的としてノード推移戦略 $\{n(t)\}$ を決定する．ここで $n(t)$ は時刻 t で選択されるノードであり，一般性を損なうことなく，$n(0) = 1$ とする．この行動は以下のように定式化される：

[P-C]

$$\max_{\{n(t)|t\in[0,T]\}} \mathrm{E}\left[\int_0^T e^{-rt}\pi_{n(t)}\,\mathrm{d}t - \sum_k e^{-r\tau_k}C_{n(\tau_k^-),n(\tau_k)}\right]$$

ここで，τ_k は k 番目に行われた推移時刻，$n(\tau_k^-)$ はその直前に選択されていたノードを表す．

ここで，各ノードの価値を以下のように定義する：

$$V_m(t,P) \equiv \max_{\{n(s)|s\in[t,T],n(t)=m\}} \mathrm{E}_{t,P}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)}\pi_{n(s)}\,\mathrm{d}s - \sum_k e^{-r(\tau_k-t)}C_{n(\tau_k^-),n(\tau_k)}\right].$$

ただし，$m=1,2$．このとき，ノード 1 の価値 $V_1(t)$ について以下の変分不等式条件が成立する：

$$\min.\Big\{-\mathcal{L}_1V_1(t,P) - \pi_1(t), V_1(t,P) - V_2(t,P) + C_{1,2}\Big\} = 0. \quad (12)$$

ノード 2 についても，同様の変分不等式条件が成立する．ここで，式 (12) は，未知関数 $V_2(t,P)$ を含むため，それだけで独立した条件ではない．従って，状況 (t,P) で成立すべき問題は，条件 (12) をノード 1,2 について連立させた以下の VIP となる：

> [VIP-C] Find $\{\boldsymbol{V}(t,P)|(t,P)\in\mathcal{K}\}$ such that
>
> $$\min.\{-\boldsymbol{\mathcal{L}}\boldsymbol{V}(t,P) - \boldsymbol{\pi}(t), \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{V}(t,P)\} = \boldsymbol{0}, \forall(t,P)\in\mathcal{K}.$$

ただし，終端条件は $F_1(T) = F_2(T) = 0$ より，$V_m(t,P) = 0, \forall m = 1,2$ である．また，$\boldsymbol{V}(t,P) \equiv \{V_1(t,P), V_2(t,P)\}$，$\boldsymbol{\mathcal{L}}\boldsymbol{V}(t,P) \equiv \{\mathcal{L}_1V_1(t,P), \mathcal{L}_2V_2(t,P)\}$ であり，$\boldsymbol{\Phi} \equiv \{\Phi_1, \Phi_2\}$ は以下のように定義される演算子である：

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{V}(t,P) \equiv \begin{bmatrix}\Phi_1\boldsymbol{V}(t,P)\\ \Phi_2\boldsymbol{V}(t,P)\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}V_1(t,P) - V_2(t,P) + C_{1,2}\\ V_2(t,P) - V_1(t,P) + C_{2,1}\end{bmatrix}.$$

4 数値解法

これまでの議論により，図 1 に示される全ての構造のオプション評価問題が，いずれも無限次元 VIP に帰着することが判った．本章では，これらの問題に対する数値解法を示す．具体的には，まず，無限次元 VIP を数値的に扱うために，時間と状態変数を離散化する．次に，こうして得られた有限次元 VIP に対して，適切な変数変換を適用する．これによって，オプション評価問題が，確率制御やファイナンスとは全く異なる背景をもつ数理計画の分野で盛んに研究されている線形相補性問題 (LCP: Linear Complementarity Problem) に帰着することを明らかにする．

本章で解説する解法は，従来の binomial tree を用いた解法に比べ，以下の 2 点で優れている．第 1 に，本手法は，サイクル型構造のように，複数のノードの価値を同時に求める問題にも適用可能である．このような問題を従来手法で解くことは非常に困難であり，その点でこの優位性は本研究の重要な貢献である．第 2 に，状態変数が任意のプロセス (e.g. 中心回帰過程) に従い，かつ，ノードごとにそのプロセスが異なるような一般的なケースにも，容易に適用可能である．さらに，本提案解法は，より複雑な権利行使構造をもつオプション評価問題 [3] の数値解法において必要不可欠である．以下では，紙面の都合上，前章 (3) 節で述べたサイクル型構造のみを対象として解説を行う．ここでの解法は，当然ながら，他の構造の問題にも適用可能である．

まず，十分に大きな状態変数の領域 $[P_{\min}, P_{\max}]$ をとる．そして，時間と状態変数の空間 $[0,T]\times[P_{\min}, P_{\max}]$ を，格子 $\gamma \equiv \{(i,j)|i=0,1,\cdots,\mathrm{I}, j=1,\cdots,\mathrm{J}\}$ を用いて，$(t^i, P^j)\equiv(i\Delta T, j\Delta P+P_{\min})$ と離散近似する．同様に，ノード n についての任意関数 $f_n(t,P)$ を $f_n^{i,j}\equiv f_n(t^i,P^j)$ で離散近似し，$\boldsymbol{f}_n^i \equiv \left\{f_n^{i,j}|j=1,\cdots,\mathrm{J}\right\}$ とベクトル表現する．このとき，$\mathcal{L}_n V_n(t,P)$ は以下のように離散近似される：

$$\mathcal{L}_n V_n(t,P) \approx \boldsymbol{L}_n \boldsymbol{V}_n^i + \boldsymbol{M}_n \boldsymbol{V}_n^{i+1}, \quad \forall i\in I, \forall n \in 1,2.$$

ここで，$\boldsymbol{L}_n, \boldsymbol{M}_n$ は，それぞれ，ノードごとの状態変数プロセス (1) より決定される $\mathrm{J}\times\mathrm{J}$ の正方行列である．また，$I\equiv\{0,1,\cdots,\mathrm{I}-1\}$ は時刻のインデクス集合を表す．

この枠組みの下で，[VIP-C] は，各時点 $i\in I$ で成立すべき以下の有限次元 VIP として表現される：

> [VIP-i] Find $\{\boldsymbol{V}^i|i\in I\}$ such that
>
> $$\min.\left\{-\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{V}_n^i - \boldsymbol{M}_n\boldsymbol{V}_n^{i+1} - \boldsymbol{\pi}_n^i, \boldsymbol{\Phi}_n\boldsymbol{V}^i\right\} = \boldsymbol{0}, \quad \forall n, i$$

ただし，終端条件は $\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{0}$ である．ここで，$\boldsymbol{V}^i$ は，$\boldsymbol{V}_n^i$ を縦に並べたものであり，$\boldsymbol{\Phi}_n : \mathrm{R}^{2\mathrm{J}}\to\mathrm{R}^{\mathrm{J}}$ は以下の式で定義される演算子である：

$$\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{V}^i \equiv \boldsymbol{V}_1^i - \boldsymbol{V}_2^i + \boldsymbol{1}C_{1,2},\ \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{V}^i \equiv \boldsymbol{V}_2^i - \boldsymbol{V}_1^i + \boldsymbol{1}C_{2,1} \quad (13)$$

問題 [VIP-i] は，適切な変数変換によって，標準形の有限次元 LCP に帰着する．以下ではこれを明らかにしよう．まず，最適値関数 V_n^i に対して以下の変数変換を行う：

$$\boldsymbol{X}_n^i \equiv -\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{V}_n^i - \boldsymbol{M}_n\boldsymbol{V}_n^{i+1} - \boldsymbol{\pi}_n^i, \quad \forall i\in I, \forall n=1,2. \quad (14)$$

このとき，最適値関数は，$\boldsymbol{X}_n^i$ を用いた以下の式で表される：

$$\boldsymbol{V}_n^i(\boldsymbol{X}_n^i) = \boldsymbol{L}_n^{-1}\left\{-\boldsymbol{X}_n^i - \boldsymbol{M}_n\boldsymbol{V}_n^{i+1} - \boldsymbol{\pi}_n^i\right\}, \quad \forall n, i. \quad (15)$$

これを式 (13) に代入すれば，以下の式を得る：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{V}^i = -\boldsymbol{L}_1^{-1}&\left\{\boldsymbol{X}_1^i + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{V}_1^{i+1} + \boldsymbol{\pi}_1^i\right\} \\ &\boldsymbol{L}_2^{-1}\left\{\boldsymbol{X}_2^i + \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{V}_2^{i+1} + \boldsymbol{\pi}_2^i\right\} + \boldsymbol{1}C_{1,2} \quad (16)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{V}^i$ についても同様の式を得る．式 (14), (16) を問題 [VIP-i] に代入して整理すれば，時点 i で成立すべき以下の標準形の有限次元 LCP を得る：

> [LCP-i] Find $\{\boldsymbol{X}^i|i\in I\}$ such that
>
> $$\boldsymbol{X}^i\cdot\boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}^i) = 0,\ \boldsymbol{X}^i \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}^i)\geq\boldsymbol{0}, \quad \forall i\in I.$$

ただし，$\boldsymbol{X}^i \equiv \{\boldsymbol{X}_1^i, \boldsymbol{X}_2^i\}$ であり，$\boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}^i)$ は以下の式で定義される線形写像である：

$$\boldsymbol{G}^i(\boldsymbol{X}^i) \equiv \begin{bmatrix}-\boldsymbol{L}_1^{-1} & \boldsymbol{L}_2^{-1} \\ \boldsymbol{L}_1^{-1} & -\boldsymbol{L}_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1^i \\ \boldsymbol{X}_2^i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2\end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで，$\boldsymbol{K}\equiv\{\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2\}$ は，行列 $\boldsymbol{L}_n^{-1}, \boldsymbol{M}_n$，利潤フロー $\boldsymbol{\pi}_n^i$，推移費用 $C_{1,2}, C_{2,1}$，および，時点 $i+1$ での最適値関数 $\boldsymbol{V}^{i+1}$ より決まる 2J 次元列ベクトルである．

従って，オプション評価問題 [VIP-i] の解 $\{\boldsymbol{V}^i\}$ は，問題 [LCP-i] を以下の手順で解くことで求められる：

> Step-0 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}} := \boldsymbol{0}$, $i := \mathrm{I}-1$ とする．
> Step-1 $\boldsymbol{V}^{i+1}$ を与件として問題 [LCP-i] を解き，$\boldsymbol{X}^i$ を求める．求めた $\boldsymbol{X}^i$ と式 (15) より $\boldsymbol{V}^i$ を計算．
> Step-2 $i=0$ でなければ $i := i-1$ として Step-1.

問題 [LCP-i] のような標準形の有限次元 LCP については，様々な効率的解法 (例えば，Ferris and Pang[1]) が提案されており，これらを利用することで解を効率的に計算できる．本研究では，この数値解法を用いた感度解析によって，オプション価格および最適権利行使戦略に関する新たな知見を得た．その詳細については，講演会で報告する予定である．

参考文献

1) Ferris, M. C. and Pang, J.-S.: Complementarity and variational problems: State of the art, 1997.
2) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
3) 長江剛志, 赤松隆: 連鎖的意思決定構造を考慮した不確実性下でのプロジェクト評価手法, 土木計画学研究・講演集, Vol. 28, 2003.