正規分布に従う交通量を持つ交通ネットワーク均衡モデル

A Stochastic Network Equilibrium Model with Gaussian Flows

中山晶一朗[1], 高山純一[2], 長尾一輝[3]

Shoichiro Nakayama, Jun-ichi Takayama, Kazuki Nagao

1.はじめに

日々の交通行動の中で，通勤や業務など到着制約のあるトリップは多く，また，緊急車両など単に早く目的地に到着できるだけでなく，どれほど「確実」に到着できるのかを求められる場面も多い．また，ITS や VICS の効果を分析する場合，情報提供は不確実な状況下にこそ意味があるため，不確実性を的確に計測・評価することは不可欠である．このように道路ネットワークに関しては，旅行時間（所要時間）の値そのものだけでなく，そのばらつきはどれほどかを把握することは極めて重要なことと言える．しかしながら，従来から知られているワードロップ均衡などは確定値としての OD 交通量を確定的に配分するものであり，旅行時間や交通需要の不確実性を表現できているとは言い難い．

交通量や旅行時間が変動し，ばらつく原因には様々なものが考えられるが，事故や災害などが発生していない通常の交通では，交通需要が不確実である（確率的に変動している）ことが一つの大きな原因であろう．交通量・旅行時間の不確実性を考慮する場合，このような交通需要を確率分布（確率変数）と仮定し，交通量を確率的に配分することが必要になると考えられる．

本研究では，OD 交通量が正規分布に従うと仮定し，正規分布に従う交通量を配分する確率ネットワーク均衡を提案する．そして，提案した均衡モデルを金沢道路ネットワークに適用し，その妥当性，実用性などを確認する．このような均衡モデルは従来までのワードロップ均衡が確定値としての OD 交通量を確定的に配分していた点を大きく拡張し，確率的なOD交通量を確率的な交通量として配分するものである．このような均衡モデルによって，交通ネットワークの旅行時間の不確実性や時間信頼性を評価することが可能となる．

Key Words: 交通ネットワーク均衡，確率的 OD 交通量

1 正会員，博（工），金沢大学工学部
〒920-8667 金沢市小立野 2-40-20
Tel: 076-234-4614, Fax: 076-234-4632
2 正会員，工博，金沢大学工学部
3 学生員，金沢大学大学院

2.基本概念

(1)均衡概念

ワードロップ均衡の基本的な考え方は，利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しいというものである．交通量や旅行時間を確率変数と考え，このワードロップ均衡の考え方を適用すると，利用される経路の「期待旅行時間」は皆等しく，利用されない経路の「期待旅行時間」よりも小さいかせいぜい等しい，という均衡を考えることは極めて自然なことである [1)2)]．これが本均衡モデルの基本的な考え方である．この時，期待旅行時間の代わりに効用の期待値や一般化費用の期待値を用いることも当然可能となる．

(2)交通量の分布

本研究では正規分布の OD 交通量を正規分布の交通量として配分する．このような配分を実際のネットワークに適用する場合，一つの問題が生じる．現在のところ，確定的な OD 交通量のデータは各種調査結果から算出することが可能であり，それをOD交通量の平均に適用することができる．しかし，OD 交通量の分散（標準偏差）に関しては，データを得ることが極めて困難である．そこで，本研究では，OD ペア i ($\in U$)の OD 交通量の標準偏差 σ^i は $\eta\mu^i$ と仮定する．ただし，η は正のパラメータ，μ^i は OD 交通量の平均である．つまり，本研究では，OD 交通量について，平均に比

例して標準偏差が決まると仮定する．なお，標準偏差 σ^i を $\eta(\mu_j^i)^\kappa$ とより複雑な式に仮定することも可能であり，そのように仮定しても以下，同様なモデル化が可能であるが，本稿では単純化のため上のように仮定する．また，経路交通量（ODペア i の経路 j の交通量）についても，その標準偏差 σ^i_j は $\eta\mu_j^i$ と仮定する．このとき，$\mu^i = \sum_j \mu_j^i$，$\sigma^i = \sum_j \sigma_j^i = \eta\sum_j \mu_j^i$ である．

$$F_j^i \sim \mathrm{N}[\mu_j^i, (\eta\mu_j^i)^2] \qquad (1)$$

以上に加えて，各経路交通量は独立と仮定する．このとき，リンク a の交通量 X_a は正規分布に従う（独立な）経路交通量 F_j^i の和 $\sum_i\sum_j \delta_{a\,j}\cdot F_j^i$ であるため，それは以下の正規分布となる．

$$N[\textstyle\sum_i\sum_j \delta_{a\,j}\cdot\mu_j^i, \sum_i\sum_j \delta_{a\,j}\cdot(\eta\cdot\mu_j^i)^2] \qquad (2)$$

なお，経路交通量は独立と仮定したが，リンク間で，特に隣接するリンク間では同一の経路交通量が流れることがあるため，リンク交通量は独立ではない．

3.期待旅行時間の算出

リンク走行時間が BPR 関数に従うと仮定すると，リンクの旅行時間 t_a は $t_{a0}\{1+\alpha(x/C_a)^\beta\}$ で表される．ただし，t_a はリンク a の旅行時間，t_{a0} は自由走行時間，C_a は交通容量，x は交通量である．したがって，期待リンク旅行時間を計算するためには $\mathrm{E}[X^n]$ が計算できれば良い．ここで，X は交通量の確率変数である．$\mathrm{E}[X^n]$ の計算には積率母関数 $M(s)$ を用いることができる．積率母関数の性質から $\mathrm{E}[(X_a)^n]$ は $\left.\frac{d^n M_a(s)}{d\mathrm{s}^n}\right|_{s=0}$ として計算される．ゆえに期待リンク旅行時間は以下の式となる．

$$E[T_a] = \alpha + \beta\cdot\left.\frac{d^n M_a(s)}{ds^n}\right|_{s=0} \qquad (3)$$

ただし，T_a はリンク旅行時間の確率変数である．

前節で述べたように交通量は前節で述べたように交通量は正規分布に従うため，X_a は正規変数であり，その積率母関数 $M_a(\mathrm{s})$ は $\exp(\mu_a s + \sigma_a^2 s^2/2)$ である．ただし，μ_a $(=\sum_i\sum_j \delta_{a\,j}\cdot\mu_j^i)$ は正規分布の平均，σ_a^2 $(=\eta\mu_a)$ はその分散である．ゆえに期待リンク旅行時間関数 g_a は μ_a の式で表される．β=4 のとき，g_a は次式となる．

$$g_a(\mu_a) = t_{a0}[1+\alpha\{3(\eta\cdot\mu_a)^4 + 6\mu_a^2(\eta\cdot\mu_a)^2 + \mu_a^4\}/C_a^4] \qquad (4)$$

経路旅行時間の期待値 $\mathrm{E}[T_j^i]$ は $\sum_a \delta_{a,j}\cdot\mathrm{E}[T_a]$ となる．

リンク旅行時間の分散 $\mathrm{Var}[T_a]$ は $\mathrm{E}[(T_a)^2] - \mathrm{E}[T_a]^2$ であり，$\mathrm{E}[(X_a)^{2n}]$，$\mathrm{E}[(X_a)^n]$ を用いれば計算することができる．

また，経路旅行時間の分散 $\mathrm{Var}[T_k^r]$ も以下の式のように計算できる．

$$\mathrm{Var}[T_k^r] = \textstyle\sum_a \delta_{a,k}\cdot\mathrm{Var}[T_a] + \sum_a\sum_{a',\,a\neq a'} \delta_{a,k}\cdot\delta_{a',k}\cdot\mathrm{Cov}[T_a, T_{a'}] \qquad (5)$$

ここで，$\mathrm{Cov}[\cdot,\cdot]$ は共分散である．

リンク間の交通量の共分散を求めるために，図1のようにリンク a とリンク a' を通る交通量を分解する．リンク a とリンク a' の両方を通る交通量を $X_{a,a'}$ $(=\sum_i\sum_j \delta_{a\,j}\cdot\delta_{a'\,j}\cdot F_j^i)$ とし，リンク a は通るが，リンク a' は通らない交通量を $Y_{a,a'}$ とし，逆にリンク a' は通るが，リンク a は通らない交通量を $Z_{a,a'}$ とする．リンク a とリンク a' の共分散は $(X_{a,a'} + Y_{a,a'})\cdot(X_{a,a'} + Z_{a,a'}) - \mathrm{E}[(X_{a,a'} + Y_{a,a'})\cdot(X_{a,a'} + Z_{a,a'})]$ である．ここで，$\mathrm{E}[\cdot]$ は期待値である．したがって，リンク a とリンク a' の交通量の共分散は $\sum_i\sum_j \delta_{a\,j}\cdot\delta_{a'\,j}\cdot(\sigma_j^i)^2$ となる．

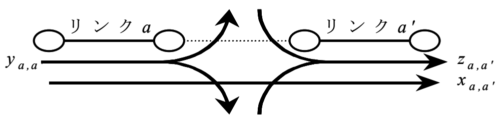

図 1 共分散の説明

この時，リンク a とリンク a' の旅行時間の共分散は以下の式の通りとなる．

$$\mathrm{Cov}[T_a, T_{a'}] = \mathrm{E}[t_a(X_{a,a'} + Y_{a,a'})\cdot t_{a'}(X_{a,a'} + Z_{a,a'})] - \mathrm{E}[T_a]\cdot\mathrm{E}[T_{a'}] \qquad (6)$$

ここで，$t_a(\cdot)$はリンクパフォーマンス関数（BPR 関数）である．

4.定式化

前節までに述べたように，OD 交通量が正規分布に従うとすると，実現される交通ネットワークの状態は以下のように表現できる．

$$\mathrm{E}[T_j^{\,i}] = \lambda^i \quad \text{if } \mu_j^{\,i} > 0 \quad \forall j \in J^i \ \forall i \in U \qquad (7)$$

$$\mathrm{E}[T_j^{\,i}] \geq \lambda^i \quad \text{if } \mu_j^{\,i} = 0 \quad \forall j \in J^i \ \forall i \in U \qquad (8)$$

$T_j^{\,i}$は OD ペア i の経路 j の旅行時間（確率変数），λ^iは OD ペア i の最短の期待旅行時間である．

上式は，Wardrop 均衡と同様に，以下のように定式化できる．

$$\min . Z = \sum_a \int_0^{\mu_a} g_a(w) dw \qquad (9)$$

subject to

$$N^r = \textstyle\sum_j \ \mu_j \qquad \forall j \in J^i \ \forall i \in U \qquad (10)$$

$$\mu_a = \textstyle\sum_j \ \delta_{a,j} \cdot \mu_j \quad \forall j \in J^i \ \forall a \in A \qquad (11)$$

$$\mu_a \geq 0,\ \mu_j \geq 0 \quad \forall j \in J^i \ \forall a \in A \qquad (12)$$

ここで

$g_a(\cdot)$:リンク a の期待リンク旅行時間関数

N^r:OD 交通量

μ_a:リンク交通量の期待値

μ_j:経路交通量の期待値

5.利用者のリスク態度を考慮した実効旅行時間

道路利用者は単に旅行時間のみならず，その不確実性も考慮して経路を選択していると考えられる．例えば，通勤時や予定のあるときはなるべく時間に遅刻しないようにするため，遅刻の可能性の低い経路，つまり旅行時間のばらつきの小さい道路を選択する確率が高くなるはずである．

本研究のモデルは，期待旅行時間の代わりに以下に示す実効旅行時間 V_jを用いることで，このような利用者の旅行時間の不確実性への態度（リスク態度）を考慮したモデルへ容易に拡張できる．

$$V_j = E[T_j] + \gamma \sqrt{Var[T_j]} \qquad (13)$$

V_jは経路 j の実効旅行時間，$\sqrt{Var[T_j]}$は経路 k の旅行時間の標準偏差である．

6.Frank-Wolfe 法を用いた計算アルゴリズム

リンク費用の期待値や分散を求めるには式（9）で示した最適化問題を解く必要がある．本研究では Frank-Wolfe 法を用いて解く．

まず，目的関数を降下することが出来る方向ベクトル $\mathbf{d}$ を決める．n 回目の計算ステップにおけるリンク交通量の期待値のベクトルを $\boldsymbol{\mu}^{(n)}$とすると，$\mathbf{d}$ は以下の式で表される．

$$\mathbf{d} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{(n)} \qquad (14)$$

ここで，$\mathbf{y}$ は以下で述べるベクトルである．配分問題のように変数が多数ある次元の大きな問題では，降下方向も無数に存在するため，より効果的な方向ベクトル $\mathbf{d}$ を選択することが必要になる．また，降下方向の制約が生じる場合もある．そこで，最短経路に全ての OD 交通量を流す all or nothing 配分を $\mathbf{y}$ とし，方向ベクトル $\mathbf{d}$ を決定する．

次にステップサイズ ζ（$\mathbf{d}$に沿って進める大きさ）を求める．下式の $\boldsymbol{\mu}^{(n)} + \zeta \mathbf{d}$ を代入した式(9)の目的関数を最小にするζを黄金分割法を用いて求め，n+1 回目のリンク交通量の期待値 $\boldsymbol{\mu}^{(n+1)}$を決定する．

$$\boldsymbol{\mu}^{(n+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(n)} + \zeta \mathbf{d} \qquad (15)$$

計算のフローチャートを図 2 に示す．

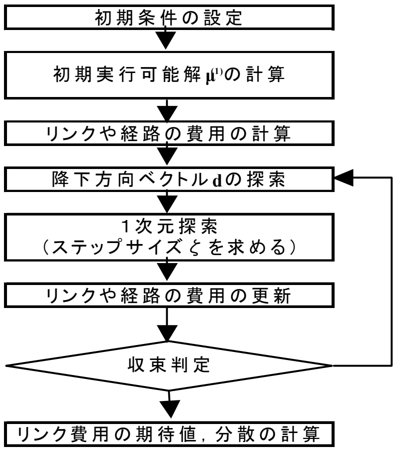

図 2 計算のフローチャート

7.単純なネットワークへの適用

1OD2 リンクの単純なネットワークに，上述の確率ネットワーク均衡を適用した．リンクパフォーマンス関数には BPR 関数（$\alpha = 0.15, \beta = 4$）を用いる．リンク 1 の自由走行時間は 10 分，交通容量は 1000 台，リンク 2 の自由走行時間は 20 分，交通容量は 2000 台とする。OD 交通については，平均を 3500 台とし、標準偏差を 3500 η とする。

図 3 は，OD 交通量の標準偏差の大きさを決める α を変化させた場合のリンク 1 及びリンク 2 の旅行時間の標準偏差である．リンク 1，リンク 2 それぞれ，η の大きさにほぼ比例して旅行時間の標準偏差が大きくなることが分かる．

図 4 は式（13）でのリスク態度 γ を変化させた場合の旅行時間の期待値である．リスク回避の傾向が大きくなるほど，リンク 1 の選択する利用者が減少し，その結果リンク 1 の旅行時間の期待値が小さくなり，リンク 2 の旅行時間の期待値が大きくなることが分かる．

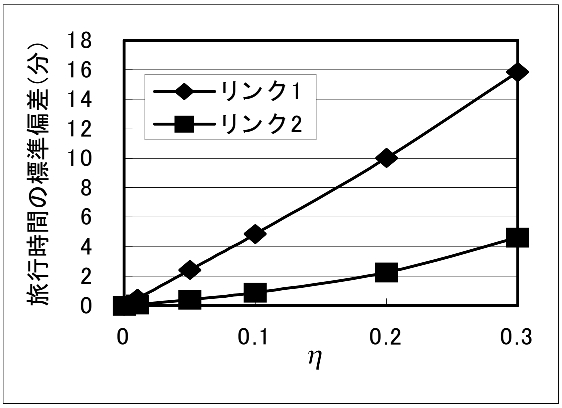

図 3 η と旅行時間の標準偏差の関係

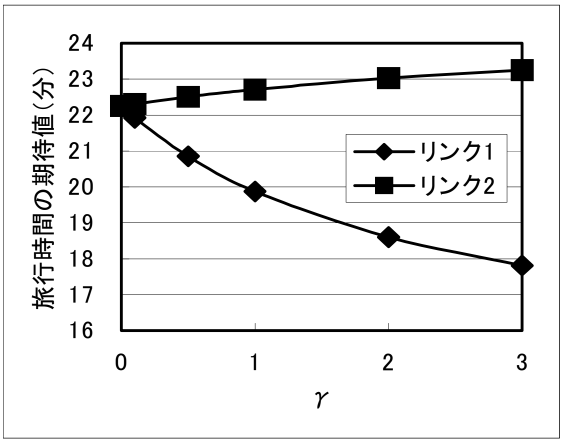

図 4 γ と旅行時間の期待値の関係

8.金沢道路ネットワークへの適用

ここまでで示してきた本研究の均衡モデルを金沢道路ネットワークに適用する．OD 交通量の平均値はパーソントリップ調査で得られた通勤時の OD 交通量とし，標準偏差はリンク交通量の実測値から η を推定することによって設定する．適用するネットワークは以下に示すものである．

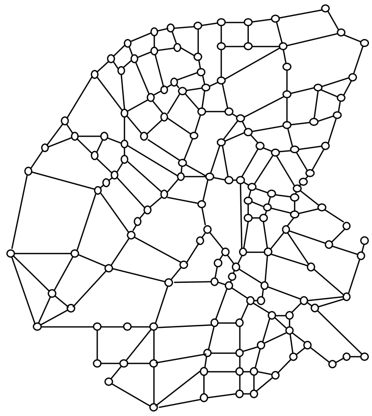

図 5 金沢道路ネットワーク図

8. おわりに

本研究では，OD 交通量が正規分布であり，交通量を正規分布とした，旅行時間の不確実性を考慮する交通ネットワーク均衡を提案し，金沢道路ネットワークに適用した．しかし，適用する OD 交通の確率分布については現実の OD 交通の確率分布との比較を行う必要があり，これは今後の課題である．また，計算結果に関しても，現実のネットワークにおける不確実性と比較する必要がある．なお，金沢道路ネットワークへの適用結果については，講演時に発表する．

参考文献

1）Nakayama, S. and J. Takayama: Traffic Network Equilibrium Model for Uncertain Demands, Presented at the 82th annual meeting of Transportation Research Board, on CD-ROM, 2003.

2）中山晶一朗，高山純一，笠島崇弘：旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡：二項分布とポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡モデル，第 25 回土木計画学研究発表会，on CD-ROM，2002.11