リンク交通量間の相関を考慮した交通ネットワーク分析におけるパラメータ推定法：ポアソン確率ネットワーク均衡を用いて

A Parameter Estimation Method for Traffic Equilibrium Analysis Considering Links' Correlations: Use of Stochastic User Equilibrium with Poisson Flows

中山晶一朗[1]，高山純一[2]
Shoichiro Nakayama, Jun-ichi Takayama

1. はじめに

交通ネットワーク計画・分析の際，均衡モデルが，研究・実用上，極めて重要な役割を果たしている．

交通ネットワーク均衡としては，従来からワードロップ均衡[1)]や確率的利用者均衡[2)3)]が知られている．確率的利用者均衡はランダム効用理論に基づいた経路選択による交通ネットワーク均衡である．ただし，確率的利用者という名称に反し，利用者は確率的に経路を選択してはいない．そこで，本研究では，それをロジット型利用者均衡（Logit User Equilibrium; LUE）と呼ぶことにする．なお，経路選択にロジットモデルではなく，プロビットモデルを用いる場合はプロビット型利用者均衡モデルと呼ぶ（Probit User Equilibrium; PUE）．

ロジット型利用者均衡は，既に述べたようにロジットモデルによる経路選択に基づいた均衡であるが，そのロジットモデルでは，経路効用は $-\alpha \cdot t + \varepsilon$ であることが多く，パラメータ α を推定する必要がある．なお，t は経路の旅行時間であり，ε は確率項である．ロジット型利用者均衡では，このパラメータにどのような値を用いるべきかが問題となることが少なくない．また，$-\alpha \cdot t + \varepsilon$ よりも複雑な効用関数を定義することも可能で，その時は更にパラメータ推定が重要になる．そして，ロジット型利用者均衡に限らず，均衡モデルでは，旅行時間関数のパラメータ推定もたびたび問題となっている．さらに，従来からOD交通量推定などもパラメータ推定と同様の問題を抱えており，交通ネットワークモデルでパラメータを推定することは非常に重要である．

ネットワーク均衡分析の際のパラメータ推定では，従来から均衡モデルが算出する計算交通量と実際のネットワークの交通量である実交通量の二乗誤差が最小となるようにパラメータが推定されることが多かった．しかし，このような最小二乗法では，各リンクの交通量が独立であることが前提とされている．しかし，実際のリンク交通量はリンク間で独立ではなく，近接するリンクでは，その相関はかなり高い．そこで，本研究では，このようなリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワークでのパラメータ推定法を提案する．本研究でのパラメータ推定方法は，著者らが提案したポアソン分布に従う交通量を持つ確率ネットワーク均衡[4)5)]をロジットモデルによる経路選択に基づく均衡に拡張し，その拡張した均衡モデルで算出される交通量の生起確率をもとに最尤法によりパラメータ推定を行うというものである．

2. ポアソン変数としての交通量

観測されたリンク交通量をもとに種々のパラメータを推定する場合，リンク交通量は確率的であることを前提とする．これまで行われてきた最小二乗法による推定では，各リンク交通量は独立で同一な正規分布に従う確率項を持つと仮定している．本研究では，前節で述べたように，リンク間が独

Key Words: 交通ネットワーク均衡，旅行時間の不確実性
1 正会員，博（工），金沢大学工学部
〒920-8667 金沢市小立野 2-40-20
Tel: 076-234-4614, Fax: 076-234-4632
2 正会員，工博，金沢大学工学部

立であることを前提しない，交通量が確率的であるネットワーク均衡を用いる．

本研究では，道路利用者は確率的に経路を選択すると仮定する．この時，N^r 人が存在する OD ペア $r\ (\in U)$の利用者が経路 $k\ (\in K)$を確率 p_k で選択すると，経路 k のその OD ペア r に関する経路交通量は二項分布 Bin(N^r, p_k)に従う（経路全てのうちどの経路を選択するのかで見た場合は多項分布に従う）．このように経路交通量が確率変数であるため，経路旅行時間も当然確率変数となる．ここでは同一 OD ペアの全員が同じ確率で経路を選択すると仮定する．

二項分布は選択確率が小さい場合，ポアソン分布で近似できることが知られており，取り扱いの容易さの観点から，以降，交通量をポアソン変数とする．このように仮定した場合，経路 k の交通量は，平均が $N^r\ p_k$ のポアソン分布と考えることができる．ここで，$N^r p_k$ を μ_k と書き換えると，経路 k の交通量の確率関数は

$$\Pr[F_k^r = f] = \frac{{\mu_k}^f \cdot e^{-\mu_k}}{f!} \tag{1}$$

となる．なお，$\sum_{k \in K^r} \mu_k = N^r$ である．ポアソン分布の平均と分散は同じ値であり，共に，μ_k となる．このことは非常に数学的な取り扱いを容易にするものであり，以降に述べるように交通ネットワーク均衡を最適化問題として定式化することを可能にしている．また，このポアソン分布としての経路交通量は経路間の相関はないことを前提としている．上で述べたような経路交通量が多項分布に従う場合，経路間で交通量の相関があり，その共分散（経路 k と経路 k' の共分散）は $-N^r p_k p_{k'}$ である．一方，ポアソン分布は p_k や $p_{k'}$ が非常に小さい場合を想定しており，その二乗のオーダーで計算される共分散は0と近似する．但し，これは経路間の交通量の相関に関してであり，リンク間の経路交通量の相関はないことを意味しているのではない．リンク交通量はリンク間で共通に走行する経路交通量が存在するため，経路交通量が独立であっても，リンク交通量は独立にはならない．

以上では，二項分布をポアソン分布で近似するとしていた．そのように近似できるのはその選択確率が小さい場合である．交通ネットワークの規模が大きい場合は OD 間の経路数は大きくなり，一つの経路の選択確率は小さくなり，ポアソン分布を適用することが可能となると考えられる．また，前節までに数学的には交通量は二項分布に従うと説明したが，実際には交通量が二項分布に従っているかどうかは詳しく調査する必要があり，実際はポアソン分布に従っている可能性も否定することはできないと考えられる．

上で述べたように経路交通量がポアソン分布に従う場合，ポアソン変数の和であるリンク交通量もポアソン分布に従う．なぜなら，独立なポアソン変数の和はポアソン変数となるためであり，既に述べたように経路交通量は独立なポアソン変数であるからである．リンク a の平均交通量 μ_a は

$$\mu_a = \sum_{k \in K} \delta_{a,k} \cdot \mu_k \tag{2}$$

となる．ここで，$\delta_{a,k}$ はリンク a が経路 k に含まれている場合は 1 をとり，含まれていない場合は 0 になる変数である．

3. 旅行時間の平均と分散の算出

交通ネットワーク均衡では，旅行時間の算出が必要不可欠である．経路交通量が確率分布に従う場合，当然旅行時間も確率的になる．本節では，確率的な旅行時間の平均と分散の算出方法について記述する．

旅行時間の平均は以下のように計算される．

$$E[T_a] = \sum_{x_a=0}^{\infty} t_a(x_a) \cdot \Pr[x_a] \tag{3}$$

ここで，T_a はリンク a のリンク旅行時間（確率変数），$\Pr[x_a] = e^{-\mu_k} \cdot {\mu_a}^{x_a} / x_a!$ はリンク a の交通量が x_a である確率である．

式(3)をそのまま計算すると計算量が膨大になる

が，積率母関数を用いると，計算量が大幅に減少させせることができる．リンク走行時間が BPR 関数とすると，リンクの旅行時間 t は $\alpha + \beta x^n$ で表される．したがって，期待リンク旅行時間を計算するためには $\mathrm{E}[X^n]$ が計算できれば良い．リンク交通量（の確率変数） X_a は経路交通量（の確率変数） F_k^r の和である．つまり，$X_a = \sum_k \delta_{a,k} \cdot F_k^r$ である．F_k^r は既に述べたようにポアソン分布に従う．X_a の積率母関数を $M_a(s) = \exp[-\mu_a(1-e^s)]$ とし，積率母関数の性質を使うと，$\mathrm{E}[(X_a)^n]$ は $d^n M_a(s)/ds^n \big|_{s=0}$ となるため，BPR 関数の場合，リンク旅行時間の期待値は以下の式となる．

$$E[T_a] = \alpha + \beta \cdot \left. \frac{d^n M_a(s)}{ds^n} \right|_{s=0} \tag{4}$$

なお，経路旅行時間の平均 $\mathrm{E}[T_k^r]$は $\sum_a \delta_{a,k} \cdot \mathrm{E}[T_a]$ となる．

旅行時間の分散は $\mathrm{E}[(T_a - \mathrm{E}[T_a])^2]$ であり，$\mathrm{E}[X^n]$，$\mathrm{E}[X^{2n}]$ が計算できれば良く，それらは上で述べた積率母関数により求めることが出来る．

4. 最適化問題としての定式化

ワードロップ均衡の基本的な考え方は，利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しいというものである．交通量や旅行時間を確率変数と考えた時，このワードロップ均衡の基本的な考え方を適用し，利用される経路の「期待旅行時間」は皆等しく，利用されない経路の「期待旅行時間」よりも小さいかせいぜい等しい，という均衡を考えることは極めて自然なことである．これが均衡モデルの基本的な考え方である．この時，期待旅行時間の代わりに効用の期待値や一般化費用の期待値を用いることも当然可能となる．

前節で述べたように，経路交通量がポアソン分布に従うと仮定した場合，リンク a の旅行時間の平均 $\mathrm{E}[T_a]$ は μ_a（のみ）の関数 $g(\mu_a)$となる．よって，ロジット利用者均衡での交通量が平均交通量，旅行時間が平均旅行時間，BPR 関数などのリンクパフォーマンス関数が $g_a(\mu_a)$ に置き換わったものと考えることができる．よって，ポアソン分布を用いたロジット利用者均衡は通常のロジット利用者均衡と類似の形式となり，以下のように定式化できる．

$$\min . Z = \sum_a \int_0^{\mu_a} g_a(w)dw - \frac{1}{\theta} \sum_r N^r H^r(\boldsymbol{\mu}) \tag{5}$$

subject to

$$N^r = \textstyle\sum_k \mu_k \qquad \forall k \in K^r \ \forall r \in U \tag{6}$$

$$\mu_a = \textstyle\sum_k \delta_{a,k} \cdot \mu_k \qquad \forall k \in K^r \ \forall a \in A \tag{7}$$

$$\mu_a \geq 0,\ \mu_k \geq 0 \qquad \forall k \in K^r \ \forall a \in A \tag{8}$$

$$\text{where} \quad H^r(\boldsymbol{\mu}) = -\sum_r \sum_k \frac{\mu_k^r}{N^r} \ln \frac{\mu_k^r}{N^r} \tag{9}$$

ただし，$\boldsymbol{\mu}$は経路交通量の平均値ベクトルである．

Kuhn-Tucker 条件をまとめることにより，上の最適化問題がロジットモデルによる経路選択を行っていることが容易に分かる．このようにポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡は通常のロジット型利用者均衡と同様の最適化問題として定式化することができる．

5. リンク交通量の分散・共分散

これまで経路交通量，リンク交通量はポアソン分布に従っていると仮定していた．しかし，大規模ネットワークでは，リンク交通量は多数の経路交通量の和として構成されている．そこで，中心極限定理により，リンク交通量は正規分布として近似できる．したがって，ネットワークのリンクの交通量は多次元正規分布として記述できる．

経路 k の交通量の分散は平均と同じく μ_k であり，また，それぞれ独立であるため，リンク a の交通量の分散は

$$\sigma_a^2 = \textstyle\sum_k \delta_{a,k} \cdot \mu_k \tag{10}$$

となる．そして，経路 a と経路 a' の共分散は，それぞれが独立であるため，

$$\sigma_{a\,a'} = \Sigma_k\ \delta_{a,k}\cdot\delta_{a',k}\cdot\mu_k \tag{11}$$

となる．

交通量の平均は既に述べた通りであるため，これらを用いると，リンク交通量の確率密度関数 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ は以下のようになる：

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^A|\mathbf{V}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\right] \tag{12}$$

ただし，$\mathbf{m}$ はリンク交通量の平均値ベクトル（$= \boldsymbol{\Gamma\mu}$），$\mathbf{V}$ はリンク交通量の分散共分散行列，$\mathbf{X}$ はリンク交通量の確率変数ベクトル，$\boldsymbol{\Gamma}$はリンク-経路接続行列，T は転置である．

6. パラメータ推定

本研究では，観測された交通量が生起する確率（尤度）が最大となるように，パラメータを推定する．生起確率（尤度）は非常に小さい値になるため，その対数をとり，その対数尤度が最大となるようにパラメータを推定する．つまり，

$$\max_{\mathbf{\Theta}} \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}|\mathbf{\Theta}) \max \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}\mid\mathbf{\Theta}) \tag{13}$$

ただし，$\mathbf{\Theta}$ はパラメータのベクトルである．

観測が複数回行われている場合は以下に示す対数尤度を最大化することにより，パラメータを推定することが出来る．ここで，$\mathbf{X}_i$ は i 回目のリンク交通量のベクトルとすると，対数尤度関数 L^* は

$$L^* = \sum_i \ln f_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{X}_i|\mathbf{\Theta}) \tag{14}$$

この対数尤度関数を2回偏微分することにより，推定パラメータの標準偏差を計算することが出来るため，以下のように算出される t 値により，パラメータの有意性の検討を行うことが出来る．

$$t = \frac{\theta_j}{H \cdot \partial^2 L^* / \partial\theta_j{}^2} \tag{15}$$

ここで，θ_j はパラメータであり，H は観測数である．

以上のようなモデルは通常のロジットモデルと同様に，尤度比やAICによりその妥当性を検討することが可能である．

なお，パラメータ推定の例に関しては，講演時に発表する．

7. おわりに

本研究では，著者らが提案したポアソン分布に従う交通量を持つ確率ネットワーク均衡に，それをロジットモデルによる経路選択を導入した確率的利用者均衡を提案した．そして，その均衡モデルによって算出される交通量の生起確率をもとに最尤法により様々なパラメータを推定する方法を提案した．この方法により，従来までの最小二乗法等のリンク交通量の独立を前提としたパラメータ推定ではなく，リンク交通量の相関を考慮したパラメータ推定が可能となった．このようにリンクの相関を考慮することはより精緻にパラメータ推定を行うことであり，より精度よくパラメータを推定できると期待できる．

今後の課題としては，パラメータの推定のための計算アルゴリズムなどが挙げられる．

参考文献

1) Wardrop J. G. (1952) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *Proceedings the Institution of Civil Engineers Part II*, pp.325-378.
2) Daganzo, C. F. and Y. Sheffi (1977) On Stochastic Model of Traffic Assignment, *Transportation Science*, Vol. 11, pp. 253-274.
3) Fisk, C. (1980) Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment, *Transportation Research*, Vol. 14B, pp.243-255.
4) 中山晶一朗，高山純一，笠島崇弘（2002）旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡：二項分布とポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡モデル，第25回土木計画学研究発表会，on CD-ROM.
5) 中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，笠島崇弘（2003）旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡モデル，土木学会論文集（投稿中）．