ネットワーク均衡モデルに含まれる構成モデルの観測交通量による逆解析 *

Inverse-Estimation Formulation of the Unknown Parameters of a Network Equilibrium Model using Observed Traffic

溝上章志** ・竹隈史明***

Shoshi MIZOKAMI & Fumiaki TAKEKUMA

1．はじめに

本研究の目的は下記の通りである．

1) 幾つかの道路区間における断面交通量の観測値から，ネットワーク均衡モデルに含まれる構成モデルの未知パラメータを推計する逆問題を定式化する．

2) その際に非線形感度分析を適用した解析手法とその計算手順を提案する．また，モデルネットワークに対する数値シミュレーションを用いて，本手法の計算可能性の検証と観測計画の検討を行う．

3) この逆解析の方法をリンクパフォーマンス関数の未知パラメータの推定に適用して，その有用性を検証する．

以下では逆問題について簡単に説明し，本解析手法の位置づけを明らかにする．順問題が，因果律の流れに従って，原因から数理モデルを介して結果を求める問題のことを言うのに対して，逆問題とは，順問題の中の何かが分からなくなったときに，観測可能な実現値を用いてその未知となったものを採用した数理モデルを介して復元することを言う [1)]．交通需要予測に即して例を挙げると，目的地や交通手段，経路選択に関する人の行動原理（原因）が分かっているとき，その集計値としての分布交通量や分担交通量，配分交通量（結果）を，それぞれに適切な数理モデルを介して求める問題が順問題である．一方，分布交通量（実現値）は観測や調査から既知であるとき，人の目的地選択に関する行動原理を表現するモデル（未知となった量），たとえば重力モデルや Logit 型目的地選択モデルの未知パラメータを特定化するのが逆問題であると言える．

しかし，そうであるなら，通常の段階的交通需要予測法ではかねてから逆問題を解いていたことになる．なぜなら，集計化された個人の行動を支配しているであろうモデルの式形やその説明変数をあらかじめ決めておき，パーソントリップ調査など得られる観測値を用いてモデルの未知パラメータを推定するという作業を，我々は常日頃から行っているからである．しかし，我々はこのような交通需要予測の推定作業を逆問題と認識していない．また，人の行動結果データや選好データを用いて個人の行動原理そのものをダイレクトに特定化するのも，行動，または選好結果からその原因を推定するという意味で逆問題と言えないこともないが，この場合は観測される交通現象を支配する個々の主体の行動原理を直接的に見出すと言う意味で，上記のような交通需要予測分析を目的とした逆問題とは，やや意味が異なるかもしれない．

それでは，本研究で取り扱う問題を敢えて逆解析（逆問題を解く方法）と表している理由は，OD 交通量を観測値としてその結果を生じさせる直接的な原因である目的地選択モデルを求めるのではなく，観測値は交通需要予測の最終段階である経路選択行動の結果である断面交通量であり，未知となっているものは目的地選択モデルのようなそれより上位の段階の交通行動モデルとか，リンクパフォーマンス関数などのネットワーク設定条件などだからである．実はこのような問題については伝統的に研究が行われており，たとえば高山 [2)] などによるネットワーク上の観測フローから OD 交通量を推定する問題などが代表的である．しかし，本モデルがこれらと異なるのは以下の点である．

1) 全ての段階において利用者均衡条件を満足するような数理モデルを仮定している．

2) 非適切性を解決するための方法として，観測値と数理モデルから得られる推定値との残差の最小化を目的関数として導入している．

また，本モデルが土木工学の他分野で研究されている逆問題の形式とは異なるのは，

3) 数理モデルそのものが最適化問題であり，非適切性を回避するための残差平方和最小化という最適化問題と共に２段階の最適化問題で定式化されていること，また，

4) 解法として仮定した数理モデルの感度分析結果を残差の改善のために活用する非線形感度分析手法を適用している．

以下ではネットワーク設定の際の重要な条件の一つであるリンクパフォーマンス関数の未知パラメータを推定する逆問題，およびその効率的解法を支援する非線形感度分析について述べる．さらに，モデルネットワークに対する数

---

*keywords：逆解析，非線型感度分析，ネットワーク均衡モデル

**正員　工博　熊本大学工学部環境システム工学科（熊本市黒髪2-39-1，Tel:096-342-3541，E-mail:smizo@gpo.kumamoto-u.ac.jp）

***正員　修(工)　株式会社ケー・シー・エス（〒812-0011 福岡県福岡市博多区博多駅前 1-4-4）

値シミュレーションを用いて本手法の有効性の評価，観測誤差や観測道路区間の配置などの観測計画についての検討を行った．最後に本研究の成果と課題について述べる．

２．逆問題の定式化と非線形感度分析

（１）逆問題の定式化

本研究では，以下に示すように観測可能な断面交通量の観測値（結果）より，ネットワーク均衡モデルに含まれる構成モデルの未知パラメータ（原因）$\boldsymbol{\varepsilon}$ を推計する逆問題を下記のように定式化する．

$$Min: F\left\{\boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{f}^*, \mathbf{q}^*\right\} = \sum_{a \in \bar{A}} \left(\bar{x}_a - x_a\right)^2 \tag{1}$$

$$s.t.\quad \text{各種ネットワーク均衡モデル} \tag{2}$$

ここで，$\bar{A}$ は観測リンク集合，$\bar{x}_a$ は観測リンク交通量，x_a は下位問題から得られる推計リンク交通量である．また，$\mathbf{f}^*$，$\mathbf{q}^*$ は任意の $\boldsymbol{\varepsilon}$ の下でのパスフローとより上位の交通需要を表す．この逆問題は，各種ネットワーク均衡モデルを制約条件とし，それから得られるリンク交通量推計値とリンク交通量観測値との残差平方和を最小にする２段階最適化問題（MPEC: Mathematical Problem with Equilibrium Constraints）[3] として定式化されている．

下位問題である各種ネットワーク均衡モデルの研究は近年，飛躍的な発展を遂げてきた．しかし，実際の配分業務に恒常的に用いるまでには至っていない．その理由は均衡計算法の難解さだけでなく，構成モデルの中に含まれる幾つかの未知パラメータの値をあらかじめ設定しておくことが容易でないためと思われる．

既存の幾つかの研究 [4] では，未知パラメータを微小変動させながら均衡配分を行い，リンク交通量などについての推計値と観測値との適合度を表す幾つかの指標が最良となる値を採用するといった繰り返し計算法を採っている．リンクコスト関数やOD需要関数の未知パラメータを離散的に与えたときのネットワークフローやコストの推定値と観測値との残差平方和を２次関数で近似し，その関数の最小値を最適なパラメータ値とする方法など [5] も提案されている．これらは，指定した適合度評価項目やその指標によっては推定結果が異なる．

（２）非線形感度分析手法とその適用例

ネットワーク均衡問題に対する非線形感度分析は，費用関数やOD需要といった摂動パラメータに対する均衡リンクフローの導関数を厳密に計算する方法として Tobin R.L. and Friesz T.L.[6] によって開発された．この方法は，これらの導関数の情報をもとに，費用関数やOD需要に含まれる未知パラメータが微小に変化した場合の均衡フローの変動を予測するのに適用されている．

その後，Yang H. and Yagar S.[7] は，上位問題を総走行時間最小とする高速道路のオンランプ距離割合を決定する問題，下位問題をオンランプ距離の変化による待ち行列を考慮した利用者均衡モデルとした２段階最適化問題の解法として，この非線形感度分析を利用した．同様に，Yang H.[8], [9] は道路ネットワーク設計問題や最適料金設定問題，OD 交通量推定問題など，下位問題の解である交通需要が変化した時，上位問題の消費者余剰や総走行費用の変化を予測するのに非線形感度分析を用いている．宮城・鈴木 [10] は，上位の問題をラムゼイ価格基準を用いた社会的厚生の最大化，下位の問題を機関分担・配分同時均衡を変分不等式問題として定式化を行い，この２段階最適化問題の効率的計算手法として非線形感度分析を適用した．このように，近年，非線形感度分析は２段階最適化問題の効率的解法として用いられているが，逆解析の解法として位置づけられているものはない．

３．リンクパフォーマンス関数の推定への適用

（１）リンクパフォーマンス関数

リンクパフォーマンス関数はネットワークを構成する個々のリンクの交通量とパフォーマンスとの物理的対応関係を表すものであり，因果律の流れに従ってリンク交通量（結果）を得るために必要な交通量配分モデル（数理モデル）に含まれている重要な外的条件（原因）の一つである．利用者均衡配分モデルには，その取り扱いの良さから，下記のような BPR 関数が用いられる．

αとβがこの関数を特定化するパラメータであり，これらは幾つかの道路区間における交通量 x_a と旅行速度 $t_a(x_a)$ の観測値をデータとして最小二乗法や最尤推定法により直接，推定されてきた [11), 12)]．しかし，要素的には現況再現性の高いリンクパフォーマンス関数を用いてネットワークを構成したとしても，利用者均衡配分配分を行って得られるリンク交通量の予測値は必ずしも観測値に適合するとは限らない．もし，採用した数理モデルが適切であり，かつリンクパフォーマンス関数以外の原因要素が既知であるとしたら，リンク交通量の観測値を用いた逆問題を解いてリンクパフォーマンス関数を逆推定することは，上記の直接推定と同じ意味を持つので合理的である．また，採用した数理モデルやリンクパフォーマンス関数以外の要素に何らかの系統的誤差がある場合には，逆解析によってそれらのバイアスを除去することが可能である．

（２）非線形感度分析手法の適用

以下では，Tobin R.L. and Friesz T.L.の証明と対比しながら，非線形感度分析を適用する方法を箇条書きにして示す．

１）$f^* > 0$ を均衡パスフローの領域 Ω^* における非退化の

端点とする．摂動パラメータ$\varepsilon=0$での摂動変分不等式で表現できる摂動ネットワーク均衡問題の必要条件は，定理1，もしくはKuhn-Tucker条件より，

$$t'(f^*,0)-\pi-\Lambda^T\mu=0$$
$$\pi^T f^*=0$$
$$\Lambda f^*-q(0)=0$$
$$\pi\ge 0$$

とようになる．ここで，πはパスフローの非負条件についての未定乗数，Λは OD-パスインシデンス行列である．

２）$\mathbf{f}^*$の中で正であるパスフローにのみ問題を限定すると，$\varepsilon=0$の近傍で摂動パラメータの摂動に対して変化しないため，

$$t'(f^*,0)-\Lambda^{0T}\cdot\mu=0$$
$$\Lambda^0\cdot f^{0*}-q(0)=0$$

が成立し，定理3である局所最適解の十分条件を満足する．

３）定理4である陰関数定理の条件は満足され，摂動パラメータεについてのf^{0*}の微係数（導関数）は以下のようにして計算できる．

・ $\varepsilon=0$での(f^0,μ)についてのヤコビアン行列は

$$J_{f^0,\mu}=\begin{bmatrix}\nabla_f t'(f^*,0) & -\Lambda^{0T}\\ \Lambda^0 & 0\end{bmatrix}$$

となるから，

$$[J_{f^0,\mu}]^{-1}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

となる．ここで

$$B_{11}=\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}$$
$$[I-\Lambda^{0T}[\Lambda^0\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}\Lambda^{0T}]^{-1}\cdot\Lambda^0\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}]$$
$$B_{12}=\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}\Lambda^{0T}[\Lambda^0\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}\Lambda^{0T}]^{-1}$$
$$B_{21}=-[\Lambda^0\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}\Lambda^{0T}]^{-1}\Lambda^0\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}$$
$$B_{22}=[\Lambda^0\nabla_f t'(f^*,0)^{-1}\Lambda^{0T}]^{-1}$$

である．

・ $\varepsilon=0$でのεについてのヤコビアン行列は

$$J_\varepsilon=\begin{bmatrix}\nabla_\varepsilon t'(f^*,0)\\ -\nabla_\varepsilon q(0)\end{bmatrix}$$

となるから，下位問題の摂動パラメータに関する解ベクトルの勾配は以下で表される．

$$\begin{bmatrix}\nabla_\varepsilon f\\ \nabla_\varepsilon\mu\end{bmatrix}=J_{f^0,\mu}{}^{-1}\cdot J_\varepsilon=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\nabla_\varepsilon t'(f^*,0)\\ \nabla_\varepsilon q(0)\end{bmatrix}$$

４）上位問題の目的関数の摂動パラメータεに対する勾配は以下のようになる．

$$\nabla F(\varepsilon)=\nabla_\varepsilon F(\varepsilon)+[\nabla_f F(\varepsilon),\nabla_\mu F(\varepsilon)]\cdot\begin{bmatrix}\nabla_\varepsilon f\\ \nabla_\varepsilon\mu\end{bmatrix}$$

この関係をリンク交通量を変数として表現すると

$$\nabla_f t'(f^*,0)=\Delta^{0T}\cdot\nabla_x t(x^*,0)\Delta^0$$

であり，$\nabla_\varepsilon f=\Delta^{0T}\cdot\nabla_\varepsilon x$であるから

$$\nabla_\varepsilon t'(f^*,0)=\Delta^{0T}\cdot\nabla_\varepsilon t(x^*,0)$$

が成立する．

逆解析の上位問題は，観測リンクにおける観測交通量と推定交通量との残差平方和最小化であり，その目的関数

$$F(\varepsilon)=\sum_{a\in A}\{\bar{x}_a-x_a\}^2=\sum_{a\in A}\left\{\bar{x}_a-\sum_{k\in K_{rs}}\sum_{rs\in\Omega}\delta^{rs}_{a,k}\cdot f^{rs}_k\right\}^2$$

をパスフロー，および摂動パラメータで微分する．まず，パスフローによる微分は，

$$\nabla_f F(\varepsilon)==2\sum_{a\in A}(x_a-\delta^{rs}_{a,k})$$

となる．一方，リンクパフォーマンス関数を

$$t_a(x_a)=t_{a0}\left\{1.0+\alpha\left(\frac{x_a}{C_a}\right)^\beta\right\}$$

なる BPR 型で定義されているので，

$$x_a=C_a\cdot\left(\frac{t_a(x_a)-t_{a0}}{\alpha\cdot t_{a0}}\right)^{1/\beta}$$

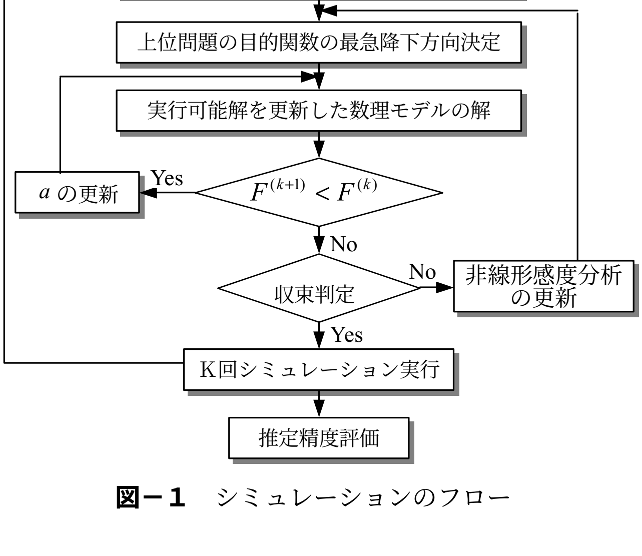
であり，摂動パラメータによる微分は下記のようになる．

$$\nabla_\alpha F(\varepsilon)=\sum_{a\in A}\frac{C_a}{\beta}\cdot\left(\frac{t_a(x_a)-t_{a0}}{t_{a0}}\right)^{1/\beta}$$
$$\cdot\left\{\bar{x}_a\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\beta/\beta}-C_a\cdot\left(\frac{t_a(x_a)-t_{a0}}{t_{a0}}\right)^{1/\beta}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2+\beta/\beta}\right\}$$

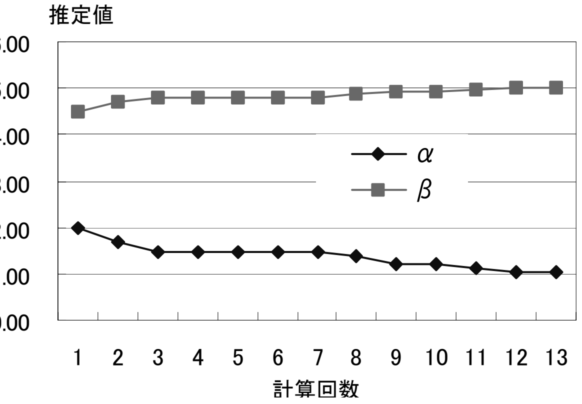
$$\nabla_\beta F(\varepsilon)=\sum_{a\in A}\frac{2C_a}{\beta^2}\cdot\ln\left(\frac{t_a(x_a)-t_{a0}}{\alpha\cdot t_{a0}}\right)\cdot\left(\frac{t_a(x_a)-t_{a0}}{\alpha\cdot t_{a0}}\right)^{1/\beta}$$
$$\cdot\left\{\bar{x}_a-C_a\cdot\left(\frac{t_a(x_a)-t_{a0}}{\alpha\cdot t_{a0}}\right)^{1/\beta}\right\}$$

４．適用可能性の検証

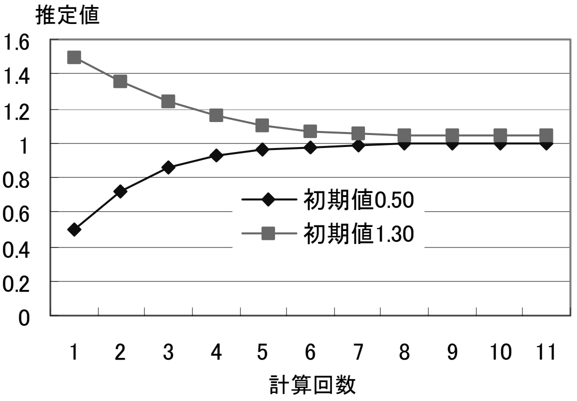
ここでは，パラメータαとβの真値をそれぞれ 1.0 と 5.0 とし，**図－１**に示すシミュレーションに従い，正規乱数によって生成させた100組の観測値集合に対して両者の



図－１　シミュレーションのフロー



図－２　α，βの収束状況



図－３　φの収束状況

推計値の平均値と分散を求めた．その結果，それぞれE[α]=1.42，V[α]=0.045，E[β]=4.80，V[β]= 0.007となった．母分散未知の標本平均値の検定の結果，推定値の期待値は真値に等しいという仮説は統計的には棄却されるものの，いくつかの乱数の組によって設定された観測値集合に対して，**図－２**に示すように10～20回程度の繰り返し計算で真値近傍に収束することが確認される．

近年，その理論と解法の合理性・整合性，モデルの拡張可能性のために，我が国においても交通量配分に利用者均衡配分手法の使用が奨励され，普及しつつある．しかし，リンク交通量やOD間所要時間などの推定結果に実測値との系統的なバイアスが生じている場合がある．この理由は明確には検証されていないが，ゼロフロー時の所要時間 t_{a0} の設定に起因すると考えられる．t_{a0} は区間の自由走行時間であり，通常，区間長をその区間の道路条件による設計速度や指定最高速度で除した値が用いられる．しかし，各種の道路・交通特性に影響を受けることから，実際よりも過小に設定されると考えられる．事実，西遠都市圏を対象とした利用者均衡配分によるOD間所要時間はある一定の比率で過小推計になったことが報告されている．

そこで，分析対象地域に固有の地域特性パラメータφを導入して t_{a0} の過小設定に対処する方法が推奨されている．ここでは，αとβは交通量と旅行速度の観測データにより，別途，要素的に1.0と5.0と直接推定されているものとし，前述したシミュレーション方法を用いて真値1.00に設定された地域特性パラメータφをリンク交通量の観測値を用いた逆問題により推定した．その収束計算の例を**図－３**に示す．いずれの初期値からも10～20回程度の繰り返しで真値にほぼ収束することが確認される．したがって，αとβについては従来通り交通量と旅行速度の観測データにより推定しておき，幾つかの観測可能なリンク交通量に適合するように逆解析を用いて推定した地域特性パラメータφによりリンクコスト関数を修正するのが，実務上は有効であると考えられる．

５．おわりに

ネットワーク均衡モデルに含まれる構成モデルの未知パラメータを観測交通量を用いて逆推計する本モデルは，実務への適用可能性の面からも有用である．

参考文献

1) 土木工学における逆問題入門，土木学会，2000.
2) 高山純一：リンクフロー観測値に基づいた道路網交通需要分析モデルに関する方法論的研究，京都大学学位論文，1988.
3) MPECに基づく交通・地域政策分析，中京大学経済学部付属経済研究所，MPEC研究会編，2003.
4) 桑原雅夫：交通量配分手法の実証的検討，交通工学，Vol.23，No.2，pp.17-25，1988.
5) 宮下　等・朝倉康夫・柏谷増男：利用者均衡モデルのパラメータ推定法とその検証，土木計画学研究・講演集，No.21(2)，pp.753-756，1998.
6) Tobin,R..L.and Friesz,T.L.: Sensitivity Analysis for Equilibrium Network Flow, Transpn.Sci. 22, pp.242-250, 1988.
7) Yang,H.and Yagar,S.: Traffic Assignment and Traffic Control in General Freeway-Arterial Corridor Systems, Transpn..Res.-B, Vol.28B, No.6, pp.463-486, 1994.
8) Yang,H.: Heuristic Algorithms for The Bilevel Origin-Destination Matrix Estimation Problem, Transpn.Res.-B,. Vol.29B, No.4, pp.231-242, 1995.
9) Yang,H: Sensitivity Analysis for The Elastic-Demand Network Equilibrium Problem with Applications, Transpn.Res.-B, Vol.31, No.1, pp.55-70, 1997.
10) 宮城俊彦・鈴木崇児：非線形感度分析を用いたラムゼイ価格均衡モデルの計算手法，土木計画学研究・論文集，No.15，pp.527-534，1998.
11) 溝上章志・松井　寛・可知　寛：日交通量配分に用いるリンクコスト関数の開発，土木学会論文集，No.401/IV-10，pp.99-107, 1989.
12) 松井　寛・山田周治：道路交通センサスに基づくBPR関数の設定，Vol.33，No.16，pp.9-16，1998.