評価値一斉法の提案[1]

A Proposal of Concurrent Convergence Method of Evaluation Value[1]

杉浦伸[2]・木下栄蔵[3]

By ShinSUGIURA[2]・EizoKINOSHITA[3]

1．はじめに

従来の Saaty 型 AHP は総合目的から代替案まで一方向的に流れで決定がなされる。また、評価値を正規化することにより全体として 1 にしていることも大きな特徴であり、またそれは代替案全体を均等に見渡す民主主義的な意思決定法である。

それに対し、木下・中西によって提案された支配代替案法はベンチマークという視点によって各代替案の差別的個性を明確にしている。支配代替案法では、演算の中で新たなベンチマークによる新しい評価値を導出するが、複数出現する評価値は評価単価比一定の法則に従い、正規化すると同一のものとなり理想的な互換性が成り立っているのである。

また、木下・中西は評価規準のベンチマークを変えることや何らかの追加情報によって、それが意思決定者に影響を与えその評価基準のウェイトが異なる場合にウェイトを収束させるもとして一斉法を提案している。ところで、この場合の支配代替案法や従来の一斉法では出現する評価マトリックスは一種のみであり、不安定であるのはベンチマークごとの評価基準のウェイトだけである。そのためこの従来の一斉法は「重み一斉法」と言うことが出来る。

一対比較や個々の大小関係によって得られた評価マトリックスが一種類の時はこの重み一斉法で良いが、現実の問題として、評価基準のみが不安定である以前に複数の意思決定者やあいまいさなどの要因によって評価マトリックスそのものにずれが生じ評価マトリックスが複数出現した場合、重み一斉法が適用できないため、複数の評価マトリックスを一つに統一する必要がでてくる。重み一斉法とは別に、ずれによって出現した複数の評価マトリックスを補正し一つに収束させる一斉法を「評価値一斉法」として提案する。さらに、この評価値一斉法によって、従来の重み一斉法の演算も行えることを本稿で示す。

2．評価値一斉法の方略

複数の選定者やあるいは一人の選定者のあいまいさなどによって評価マトリックスが複数出現した場合（評価基準 2 つ、代替案 3 つ）についての一般式を記述する。異なる三種類の評価値を

$$U(i)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ U_{21}(i) & U_{22}(i)\\ U_{31}(i) & U_{32}(i)\end{bmatrix}\quad U(j)=\begin{bmatrix}U_{11}(j) & U_{12}(j)\\ 1 & 1\\ U_{31}(j) & U_{32}(j)\end{bmatrix}\quad U(k)=\begin{bmatrix}U_{11}(k) & U_{12}(k)\\ U_{21}(k) & U_{22}(k)\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

とする。

次にベンチマークにしたい行の値の逆数を対角要素とし、逆対角要素を 0 にした行列をかける事によって評価マトリックスのベンチマークの変更をする演算を行うことが出来る。

$$U(i)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{21}(i) & 0\\ 0 & 1/U_{22}(i)\end{bmatrix}=U'(i)\quad U(i)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{31}(i) & 0\\ 0 & 1/U_{32}(i)\end{bmatrix}=U''(i)$$

$$U(j)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{11}(j) & 0\\ 0 & 1/U_{12}(j)\end{bmatrix}=U'(j)\quad U(j)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{31}(j) & 0\\ 0 & 1/U_{32}(j)\end{bmatrix}=U''(j)$$

$$U(k)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{11}(k) & 0\\ 0 & 1/U_{12}(k)\end{bmatrix}=U'(k)\quad U(k)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{21}(k) & 0\\ 0 & 1/U_{22}(k)\end{bmatrix}=U''(k)$$

こうして従来の重み一斉法と同様の導出を行う、

---

[1] キーワーズ；計画手法論
[2] 学生会員、名城大学都市情報学部 4 年
（E-mail:a7001085@urban.meijo-u.ac.jp）
[3] 正会員、工博、名城大学都市情報学部教授
（E-mail:kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）

$U(i)$	$U(j)$	$U(k)$
	$U'(i)$	$U''(i)$
$U'(j)$		$U''(j)$
$U'(k)$	$U''(k)$	

step ↓

$$\frac{U(i)+U'(j)+U'(k)}{3}=U(i+1)$$
$$\frac{U(j)+U'(i)+U''(k)}{3}=U(j+1)$$
$$\frac{U(k)+U''(i)+U''(j)}{3}=U(k+1)$$

このステップを数回繰り返し、評価マトリックスが収束すると、

$$U(i)=U(i+1),U(j)=U(j+1),U(k)=U(k+1)$$

となり、これら$U(i+1),U(j+1),U(k+1)$ はすべて

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \frac{1}{1+U_{22}(i+1)+U_{32}(i+1)} \\ \frac{U_{21}(i+1)}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \frac{U_{22}(i+1)}{1+U_{22}(i+1)+U_{32}(i+1)} \\ \frac{U_{31}(i+1)}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \frac{U_{32}(i+1)}{1+U_{32}(i+1)+U_{32}(i+1)} \end{bmatrix}$$

＝

$$\begin{bmatrix} \frac{U_{11}(j+1)}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \frac{U_{12}(j+1)}{U_{12}(j+1)1+U_{32}(j+1)} \\ \frac{1}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \frac{1}{U_{12}(j+1)+1+U_{32}(j+1)} \\ \frac{U_{31}(j+1)}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \frac{U_{32}(j+1)}{U_{12}(j+1)+1+U_{32}(j+1)} \end{bmatrix}$$

＝

$$\begin{bmatrix} \frac{U_{11}(k+1)}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \frac{U_{12}(k+1)}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \\ \frac{U_{21}(k+1)}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \frac{U_{22}(k+1)}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \\ \frac{1}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \frac{1}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \end{bmatrix}$$

となり、評価単価比一定を満たし正規化すると同一の値となる。

３．評価値一斉法の例

Step1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 0.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 1.5 \\ 1 & 1 \\ 1.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 4 \\ 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 0.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.333 & 5.88 \\ 0.667 & 2.94 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.333 & 0.667 \\ 6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.167 & 2.5 \\ 0.556 & 1.667 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0.5 \\ 10 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Step2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.443 & 0.556 \\ 6.333 & 0.273 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.333 & 1.833 \\ 1 & 1 \\ 1.767 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 4.127 \\ 0.574 & 2.202 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.29 & 1.799 \\ 1 & 1 \\ 1.839 & 0.491 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.158 & 3.663 \\ 0.544 & 2.037 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0.546 \\ 5.3 & 0.262 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.188 & 3.819 \\ 0.566 & 2.083 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.87 & 0.534 \\ 5 & 0.242 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.348 & 1.874 \\ 1 & 1 \\ 1.742 & 1.454 \end{bmatrix}$$

Step3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.1 & 0.545 \\ 5.544 & 0.259 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.324 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.783 & 0.475 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.182 & 3.87 \\ 0.561 & 2.107 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.323 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.788 & 0.475 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.180 & 3.861 \\ 0.559 & 2.104 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.086 & 0.545 \\ 5.503 & 0.259 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.182 & 3.861 \\ 0.559 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.082 & 0.544 \\ 5.495 & 0.258 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.324 & 1.837 \\ 1 & 1 \\ 1.782 & 0.475 \end{bmatrix}$$

Step4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.089 & 0.545 \\ 5.514 & 0.259 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.324 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.784 & 0.475 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.181 & 3.865 \\ 0.560 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.324 & 1.835\\1 & 1\\1.785 & 0.475\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.181 & 3.861\\0.560 & 2.104\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\3.086 & 0.545\\5.506 & 0.259\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0.182 & 3.865\\0.561 & 2.105\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\3.094 & 0.545\\5.525 & 0.259\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.323 & 1.836\\1 & 1\\1.786 & 0.475\end{bmatrix}$$

Step5

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\3.090 & 0.545\\5.515 & 0.259\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.324 & 1.836\\1 & 1\\1.785 & 0.475\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.181 & 3.865\\0.560 & 2.105\\1 & 1\end{bmatrix}$$

評価値一斉法は上の計算にあるように、最初の異なる評価マトリックスの数だけステップに評価マトリックスが出現するがこれらはいずれも正規化すると同一の値となっていることがわかる。

4. 重み一斉法と評価値一斉法の合成

このように一斉法は、評価マトリックスにずれがある場合、まず評価値一斉法を用い評価値を一つに統一する。そして、さらにそれでも評価基準のウェイトが不安定であるなら、その後さらに重み一斉法を用いることで完全な体系となる。ベンチマークという視点や評価単価比という概念は従来の Saaty 型 AHP や ANP には存在しないものである。

そのため従来のAHPとは別の体系として一斉法が精緻に構築されている最大の理由であると言える。

5. 一斉法の体系

さきにも述べたとおり、木下・中西によって提案された従来の一斉法・重み一斉法は一種類の評価値からなり、評価基準のウェイトのみが不安定である。それを代替案ごとのベンチマーク、つまり各代替案の評価値を 1 にするような評価値を代替案の数だけ用意し、それを基準に異なる代替案への評価基準のウェイトを導出しウェイトを収束させている。そして、重み一斉法では収束した各代替案のベンチマークのウェイトとベンチマークの評価値の積をとる。その値はベンチマークの数だけ存在するが、それらは正規化するとどれも同一の値となる。

そのため、重み一斉法では計算の手続きで出現するのはウェイトのみであり、最終的な全体のウェイトである総合評価値は最後にしか得られない。また、計算が多少複雑であり、また収束したウェイトが最初に下した配分比率と異なって出現するといった問題がある。

6. 重み一斉法から評価値一斉法へ

ここでは評価値一斉法を用い、重み一斉法を総合評価値の評価値一斉法として導出する方法を紹介する。

評価基準 2 つ、代替案 3 つの重み一斉法、

$$U=\begin{bmatrix}1/6 & 0.6\\1/3 & 0.3\\1/2 & 0.1\end{bmatrix} \quad W=\begin{bmatrix}0.4 & 0.7 & 0.2\\0.6 & 0.3 & 0.8\end{bmatrix}$$ において、不安定な評価基準のウェイトは、それぞれ

$$\overline{W}=\begin{bmatrix}0.178 & 0.465 & 0.796\\0.822 & 0.535 & 0.204\end{bmatrix}$$ と収束し、各ウェイトとベンチマークごとの評価値の積は、

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0.5\\3 & 0.167\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.178\\0.822\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.767\\0.671\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.5 & 2\\1 & 1\\1.5 & 0.333\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.465\\0.535\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.303\\1\\0.876\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.333 & 6\\0.667 & 3\\1 & 01\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.796\\0.204\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.489\\1.143\\1\end{bmatrix}$$ となり、これらは

正規化すると $$\begin{bmatrix}0.41\\0.315\\0.275\end{bmatrix}$$ となり、唯一の総合評価値として得られる。

ここで、初めからベンチマークごとの評価値と、個々の不安定な評価基準の重みの積による不安定な評価基準のままの総合評価値を出す。

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0.5\\3 & 0.167\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1.1\\1.3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0.5 & 2\\1 & 1\\1.5 & 0.334\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.95\\1\\1.15\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.333 & 5.988\\0.667 & 2.994\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.857\\2.529\\1\end{bmatrix}$$

そして、得られた総合評価値の評価値一斉法を行う。

Step1

$$\begin{bmatrix}1\\1.1\\1.3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0.95\\1\\1.15\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}4.875\\2.529\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.909\\1\\1.182\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0.769\\0.846\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1.053\\1.211\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0.826\\0.87\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0.521\\0.206\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.921\\1\\0.395\end{bmatrix}$$

Step2

$$\begin{bmatrix}1\\0.891\\0.906\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.26\\1\\0.909\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2.151\\1.415\\1\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Step4

$$\begin{bmatrix}1\\0.768\\0.673\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.303\\1\\0.876\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.488\\1.142\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1.302\\1\\0.876\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.486\\1.141\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0.767\\0.672\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.487\\1.142\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0.767\\0.672\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.303\\1\\0.876\end{bmatrix}$$

Step5

$$\begin{bmatrix}1\\0.767\\0.672\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.303\\1\\0.876\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1.487\\1.142\\1\end{bmatrix}$$

となりこれらを正規化すると、最初の重み一斉法の最終的な総合評価値と同じ値、$\begin{bmatrix}0.41\\0.315\\0.275\end{bmatrix}$が得られる。

7. おわりに

本稿では、従来の一斉法である重み一斉法のように単一の評価マトリックスによって評価基準のウェイトを収束させる一斉法に加え、新たに評価値そのものが不安定である場合それを補正する一斉法・評価値一斉を提案した。さらに重み一斉法の演算を評価値一斉法として導く方法として、代替案ごとの異なる総合評価値を出し、その評価値一斉法を行えば、従来の重み一斉法と同じ導出が行える。評価値一斉法を用いた場合では、評価者の目に見えないため、評価基準の重み配分逆転の問題を考慮する必要はなく、また各代替案をベンチマークとした評価値が直接得られる点で、重み一斉法に比べ総合評価値の導出もスムーズである。こうしたことから評価値一斉法による導出のほうが有効であると言える。つまり、従来の重み一斉法も総合評価値の評価値一斉法として捉えるならば、重み一斉法は評価値一斉法の一部であり評価値一斉法に内包されているのである。

参考文献

1) 木下栄蔵：AHP の理論と実際、日科技連 pp47-76、2000.

2) 杉浦・木下：『評価値一斉法』、OR 学会 2003 年度春季研究発表会、pp222-223、2003.

3) 高橋磐郎：『Saaty型Supermatrix法と木下・中西型一斉法の比較』、第40回日本OR学会シンポジウム、pp5-8、1998.