価格変更ゲームにおけるオプション行使戦略*

The Strategic Exercise of Options in Dynamic Bertrand Game *

棟方 章晴†, 赤松 隆‡

By Akiharu MUNEKATA†, Takashi AKAMATSU‡

1 はじめに

近年, 動学的不確実性下における投資, 意志決定のための理論として, リアル・オプション理論[1)]が発達してきた. しかし, このリアル・オプション理論は, 複数の経済主体間での戦略的意思決定を全く考慮せず, 他の経済主体による投資戦略の影響を受けない状況での投資意思決定問題についてのみ議論している. そのため, この理論は, 競争状況にある経済主体の, 相互干渉を考慮した戦略的行動を適切に表現できない. このようなリアル・オプション理論を, 例えば, 寡占産業に対する政府介入の必要性の議論に素朴に適用することは, 誤った結果を導き得る.

不確実性に曝された経済主体が, 相互干渉を考慮して戦略的に意思決定を行なう例は, 現実の経済システムに散見される. 例えば, 交通市場における航空•鉄道企業間の競争や, 不動産市場における立地/開発競争などが挙げられる. この重要性にもかかわらず, 動学的不確実性下における複数の経済主体間の相互干渉を考慮した戦略的意思決定問題を扱う研究蓄積は乏しい (完全競争の場合に Leahy(1993)[2)], 寡占競争では Grenadier(1996)[3)]).

本研究の目的は次の 2 つである. 第 1 に, 動学的不確実性下での 2 企業の寡占価格競争 (i.e. 複占) を対象とし, 戦略的な投資意思決定の結果として成立する動学的な均衡状態を解明する. 第 2 に, その均衡状態と社会的最適状態を比較し, 両状態での企業戦略の差異や, 厚生分配の差異を明らかにする.

本稿の構成は以下の通りである: まず, 第 2 節で複占価格競争をリアル・オプション・ゲームとして定式化する. 続く第 3 節で, サブゲーム完全な均衡の枠組を用いてその問題を解析し, 均衡状態での企業の合理的戦略, すなわち, 均衡オプション行使戦略を明らかにする. 第 4 節では, 第 2 節と同様の状況において社会的最適状態を求め, 均衡状態との比較を行なう. 最後に, 第 5 節で, モデルおよび解法の拡張を議論する.

2 価格変更ゲームの定式化

(1) 状況設定

まず, 1 つの財を生産する 2 つの企業 (i, j) を考える. 両企業は既に市場に参入済みであり, 企業の参入, 退出はないとする. この 2 つの企業は, 先導者–追従者型の価格競争を行なうものとする. 当該財への消費者の確定的需要量は, 両企業の設定した価格に依存して決定される. その確定的需要量は, 市場に共通なリスクの影響を受ける. 以降, この共通なリスクを単にリスク要因と呼ぶ. つまり, 企業の生産量は, 価格により決定される確定的需要量と, それに影響を与えるリスク要因により決定される. 各企業は対象期間 $[0, \infty]$(無限満期) を通じ, 期待利潤最大化を行なう. ここでの戦略変数は, 価格変更時刻と変更後の価格である.

企業 i は当初, 与件である価格 P_i^0 で操業しており, その後価格を P_i^1 に 1 回だけ変更可能であるものとする. 企業 i の価格変更時刻を T^i と表す. つまり, $P_i(t) = \{P_i^0 | t \in [0, T^i) \text{ or } P_i^1 | t \in [T^i, \infty)\}$ である. 価格変更の際に, 固定費用として K_i を要する.

(2) モデルの定式化

企業 i に対する確定的需要は両企業の設定する価格に依存する. この企業 i の確定的需要関数を $D_i(P_i(t), P_j(t))$ と表記する. リスク要因 $X(t)$ は, 以下の確率微分方程式:

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz \tag{1}$$

で与えられる. ここで μ はドリフト, σ はボラティリティ(いずれも定数), dz は標準 Wiener 過程の増分を表す. このリスク要因は, 需要関数に対し乗数的に影響を与えるものとする. すなわち, 企業 i が実際に直面する需要は, $X(t)D_i(P_i(t), P_j(t))$ となる. 本研究における解析は, 需要関数として $\partial D_i/\partial P_i < 0$ なる任意の既知関数を対象とする.

各企業は, 価格変更時刻 T^i 及び変更後価格 P_i^1 を戦略変数とし, 式 (1) を制約条件として, 自企業の期待利潤最大化を行なうものとする. 企業 i の価格変

---

*キーワーズ：オプション行使ゲーム, 価格寡占競争, リアル・オプション理論

†学生員, 東北大学大学院情報科学研究科

‡正会員, 工博, 東北大学大学院情報科学研究科

更時刻を T^i とすると, 企業 i が先導者になる場合の時点 $0 \leq T^i$ での期待利潤 Z_i は,

$$Z_i \equiv E_0\left[\int_0^{T^i} \pi_1 X(s) e^{-rs} ds + \int_{T^i}^{\infty} \pi_2 X(s) e^{-rs} ds - K_i e^{-rT^i}\right]$$

と表される. ここで π_1, π_2 は各々価格変更前・変更後の確定的利潤フローを表す. よって, 企業 i の期待利潤最大化行動は, $\max_{T^i, P_i^1} Z_i$, s.t.(1) と定式化される.

(3) 均衡の定義 – サブゲーム完全な均衡

本研究で扱う先導者–追従者型の価格変更ゲームは, ゲーム理論では「完備動学ゲーム」に分類される. この分類における均衡概念は「サブゲーム完全な均衡」である. 本研究における価格変更ゲームは, 以下の 2 つのサブゲームから成る: サブゲーム 1) 追従者のオプション行使戦略ゲーム, サブゲーム 2) サブゲーム 1 の結果を所与とした, 先導者のオプション行使戦略ゲーム. いま, 企業 i が先導者になる時, その戦略を $s_l = (P_i^1, T_L^i)$ と置く. 同様に企業 j が追従者になる時, その戦略を $s_f = (P_j^1, T_F^j)$ と置く. この時, サブゲーム完全な均衡は $(s_l^*, s_f^*(s_l))$ と書ける. ここで上付き添字 $*$ は, その戦略が最適である事を示す. 追従者である企業 j の戦略 s_f は, サブゲーム完全な均衡では, 先導者である企業 i が採る戦略 s_l に対する最適な反応を記述した, 完全な行動計画となっている. 戦略 s_f を考える事は, サブゲーム 1 を解く事に相当し, 戦略 s_l を考える事はサブゲーム 2 を解く事に対応する. よって, サブゲーム完全な均衡を求めるためには, まずサブゲーム 1 を解き, その後サブゲーム 2 を解けばよい.

3 価格変更時刻決定問題の解析

(1) モデルの解析手順

前章で構築したモデルは, 価格変更時刻 T^i 及び設定価格 P_i の 2 種類の内生変数を同時に決定する問題である. 本研究では, 各々の戦略変数についてより詳しく解析するために, モデルを戦略変数毎に 2 段階に分けて解析する: Step 1) 価格 P_i^0, P_i^1 を所与とする「価格変更時刻決定問題」, Step 2) Step 1 の結果から導き出される「均衡オプション行使戦略」を所与とする「価格決定問題」. 価格変更時刻決定問題を解く事により, 企業 i, j のうち, どちらが先導者/追従者であるかが決定され, その結果, 均衡オプション行使戦略が求まる. また, 価格決定問題を解く事により, 各企業が設定する価格が求まる. 本稿では, このうち Step1「価格変更時刻 (タイミング) 決定問題」についての解析を述べる.

(2) 追従者のオプション価値

本節では, サブゲーム 1 である追従者のオプション行使戦略ゲームを解く. いま, 企業 j を追従者, 企業 i を先導者とする. サブゲーム 1 では, 企業 i が既にオプションを行使している (価格を $P_i^0 \to P_i^1$ と変更している). 先導者のオプション行使時刻を 0 とし, 追従者の期待利潤 $F_j(X)$ は, オプション行使時刻 T_F^j を制御変数とする以下の最適制御問題:

$$\max_{T_F^j} E_0\left[\int_0^{T_F^j} X(s) D_{1F}^j e^{-rs} ds + \int_{T_F^j}^{\infty} X(s) D_2^j e^{-rs} ds - K_j e^{-rT_F^j}\right]$$

の解である. ここで, $D_{1F}^j \equiv P_j^0 D_j(P_j^0, P_i^1)$, すなわち, 企業 i のみが価格を変更している状態での企業 j の利潤を表す. また, $D_2^j \equiv P_j^1 D_j(P_j^1, P_i^1)$, すなわち, 両企業ともにオプション行使を行なった状態での企業 j の利潤である.

このタイミングを決定する最適制御問題は, リアル・オプション分析において, 状態変数がその値を超えると, 企業が投資を行なうような閾値を決定する問題に帰着する事が知られている. 結果として, 企業 j が追従者となった場合の先導者のオプション行使時刻 $(t = 0)$ での価値 $F_j(X)$, 及び T_F^j に対応するリスク要因についての閾値 X_F^j が求まる.

$$F_j(X) = \begin{cases} \left[\dfrac{D_2^j - D_{1F}^j}{r-\mu} X_F^j - K_j\right]\left(\dfrac{X}{X_F^j}\right)^{\beta_+} \\ \quad + X D_{1F}^j/(r-\mu) & \text{if } X < X_F^j \\ X D_2^j/(r-\mu) - K_j & \text{if } X \geq X_F^j \end{cases}$$

$$X_F^j = \frac{\beta_+}{\beta_+ - 1} \frac{(r-\mu)K}{D_2^j - D_{1F}^j}$$

$$\beta_+ = \hat{\mu} + \sqrt{\hat{\mu}^2 + (2r/\sigma^2)}, \hat{\mu} \equiv \mu - (\sigma^2/2)$$

(3) 先導者のオプション価値

次に, 前節でのサブゲーム 1 の結果を所与として, サブゲーム 2 である先導者のオプション行使ゲームを解く. いま, どちらの企業もオプション行使を行なっておらず, 企業 i が先導者になるとする. 企業 i が先導者としてオプションを行使する時刻を 0 とすると, 企業 j の期待利潤 $L_i(X)$ は,

$$E_0\left[\int_0^{T_F^j} X(s) D_{1L}^i e^{-rs} ds + \int_{T_F^j}^{\infty} X(s) D_2^i e^{-rs} ds - K_i\right]$$

と表される．ここで, $D^i_{1L} \equiv P^1_i D_i(P^0_j, P^1_i)$, すなわち, 企業 i のみが価格を変更している状態での企業 i の利潤である．この問題では, サブゲーム 1 の結果により与えられる追従者のオプション行使時刻 T^j_F において, 先導者の得る利潤フローが変化する．この期待値計算を行なえば, 企業 i が先導者となった場合の価値 $L_i(X)$ が求まる．

$$L_i(X) = \begin{cases} \left[\dfrac{D^i_2 - D^i_{1L}}{r-\mu} X^j_F\right]\left(\dfrac{X}{X^j_F}\right)^{\beta_+} \\ \quad + XD^i_{1L}/(r-\mu) - K_i \quad \text{if } X < X^j_F \\ XD^i_2/(r-\mu) - K_i \qquad\quad \text{if } X \geq X^j_F \end{cases}$$

(4)　均衡オプション行使戦略

前節までで得た結果を用いれば, 企業 i, j について, それぞれ先導者になる場合の価値 $L_i(X), L_j(X)$, 追従者になる場合の価値 $F_i(X), F_j(X)$ が求まる．本研究では, 企業 i, j 間に異質性がある場合の解析を行なった．本稿では紙面の都合上, 企業 i, j の固定費用に差があり, 企業 i に優位性がある (i.e. $K_i < K_j$) ケースのみを論じる．企業 i, j の各々の価値曲線は図 1 の様に示される．ここで, 図中の X^i_L は, $L_i(X)$ と $F_i(X)$ が交差する点である (企業 j についても同様)．$X < X^i_L$ である場合, 企業 i は先導者となる価値が追従者となる価値よりも低いので, 相手企業 j がオプションを行使していない場合は, オプションを行使せずに, 待つことが最適となる．一方, $X > X^i_L$ となったとき, 企業 i の先導者としての価値が追従者としての価値を上回る．よって, 相手企業 j がオプションを行使していない場合, 企業 i は即座にオプションを行使して先導者となる．つまり, X_L は, 両企業ともにオプションを行使していない状態で, オプションを行使して先導者となるべき閾値を表す．また, 企業 j には,$L_j(X)$ と $F_j(X)$ が交差する点が 2 つ存在し, 大きい方の X を X' とおく．X' を超えると, $L_j(X) < F_j(X)$ となる．

企業 i が企業 j に対して固定費用に関する優位性を持つ場合, 閾値は常に $X^i_L < X^j_L < X^i_F < X^j_F$ の関係を満たす．このことは, 優位な企業 i は企業 j に比べ, 常に早いタイミングでのオプション行使が可能である事を意味する．この場合, 均衡オプション行使戦略 (均衡状態) は, リスク要因の初期値 $X(0)$ に依存して, 次の様になる: 区間 A では $L_i < F_i, L_j < F_j$ であり, 両企業にとって追従者となる方が価値が高いので, オプションを行使せずに, 待つ事が最適である．区間 B, D では $L_i > F_i, L_j < F_j$ であり, 企業 i にとっては先導者に, 企業 j にとっては追従者になる方が価値が高い．よって, 企業 i は即座にオプションを行使して先導者となり, 企業 j は待って追従者となる．区間 C では $L_i > F_i, L_j > F_j$ であり, 両企業にとって先導者となる方が価値が高いので, 両企業とも即座にオプションを行使しようとする．実際に先導者になれる企業はどちらか一方なので, 行使に成功した企業は先導者となり, 失敗した企業は, 追従者としてのオプション行使が最適である X_F まで行使を待つ．区間 E では $L_i = F_i, L_j = F_j$ であり, 先導者, 追従者となる価値が無差別であるため, 両企業ともに即座に行使を行なう．

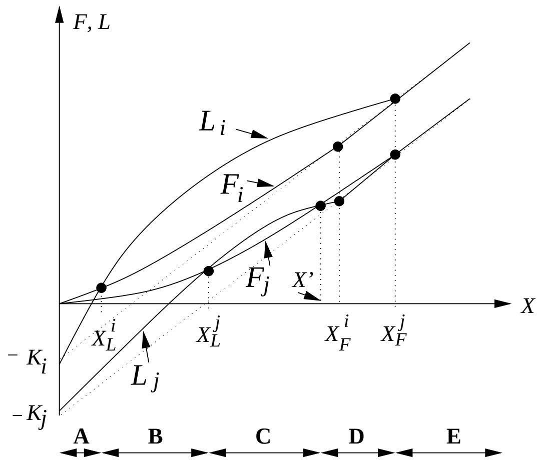

図 1: オプション行使戦略 ($K_i < K_j$)

このことから, 動学的均衡では, リスク要因の初期値 $X(0)$ に依存して, 生起する均衡が異なることが解った．また, 図 1 の区間 A のように, ゲーム開始時には両企業が待つという行動を採り, 先導者・追従者が確定しない場合, 生起する均衡は, リスク要因の初期値だけではなく, その後のリスク要因の推移にも依存して異なることが解った．更に, 区間 B, D のように, 企業 i が先導者・企業 j が追従者とゲーム開始直後に確定する $X(0)$ についての領域が存在することが解った．解析の結果, このような, 先導者に「確実になれる」という領域は, 企業間の固定費用の差が大きければ大きい程広がる傾向にあることが解った．これは, 固定費用に関する (固定費用が小さいほうの) 企業 i の優位性を表わすものと解釈できる．これらの事柄は, 静学的な枠組では得られなかった, より本質的な知見である．

4　社会的最適状態と均衡オプション行使戦略との比較

(1)　社会的最適状態の定式化・理論解析

社会計画者は, 企業 i, j の価格 P^1_i, P^1_j 及び価格変更時刻 T^i, T^j を制御し, 社会的余剰を最大化する．前

節での価格変更時刻決定問題と比較するため, ここでも価格を所与とした, 価格変更時刻決定問題を解析する. いま, 企業 $i \to j$ の順番で価格変更を行なう (i.e. 企業 i が先導者, 企業 j が追従者) とすると, 社会的余剰 SS は, 以下の最適制御問題:

$$\max_{T_i,T_j} E_0\Bigg[\int_0^{T_i} X(s)S_0e^{-rs}ds+\int_{T_i}^{T_j} X(s)S_1e^{-rs}ds + \int_{T_j}^{\infty} X(s)S_2e^{-rs}ds - K_ie^{-rT_i} - K_je^{-rT_j}\Bigg]$$

の解である. ここで S_0, S_1, S_2 は各々, 両企業がオプション行使をしていない時, 企業 i のみがオプションを行使している時, 両企業がオプションを行使済みの時の社会的余剰フローである.

この最適制御問題は, 典型的なリアル・オプション分析において用いられるのと同様の手法で解く事ができる. 結果として, 企業 $i \to j$ の順番で価格変更を行なう際の社会的余剰 $SS(X)$ 及び, 各企業の価格変更時刻 T_i, T_j に対応するリスク要因についての閾値 X_i, X_j が求まる.

$$SS(X) = \frac{XS_0}{r-\mu} + \Bigg[\frac{S_1-S_0}{r-\mu}X_i - K_i + \left[\frac{S_2-S_1}{r-\mu}X_j - K_j\right]\left(\frac{X_i}{X_j}\right)^{\beta_+}\Bigg]\left(\frac{X}{X_i}\right)^{\beta_+}$$

$$X_i = \frac{\beta_+}{\beta_+-1}\frac{(r-\mu)K_i}{S_1-S_0}, X_j = \frac{\beta_+}{\beta_+-1}\frac{(r-\mu)K_j}{S_2-S_1}$$

(2) 社会的最適状態と均衡状態との比較

ここでは, 3 節・4 節で求めた均衡状態と社会的最適状態の比較を行なう. 本稿では, 4 節と同様, 企業 i に固定費用の優位性があり (i.e. $K_i < K_j$), 値下げ競争を行なう場合 ($P^0 > P^1$) について, 均衡状態と社会的最適状態について, リスク要因についての閾値, 消費者余剰, 生産者余剰の観点から比較を行なう.

均衡状態の閾値 $X_L^i, X_F^i, X_L^j, X_F^j$ と社会的最適状態の閾値 X_L^s, X_F^s の関係は, $X_L^i < X_L^j < X_L^s, X_F^i < X_F^j < X_F^s$ となる. これは, 社会的最適状態では, オプション行使時刻を先延しする事で, 固定費用の期待現在価値を均衡状態よりも小さくして, 社会的余剰の最大化を達成しているためである.

消費者余剰は, 社会的最適状態の方が, 均衡状態でのそれを下回る. これは, 値下げが先延ばしになることで, 消費者が変更前の高い価格により長く直面するためである.

生産者余剰は, 社会的最適状態の方が, 均衡状態でのそれを上回る. 競争状態においては, もし他企業が先に行使を行なえば, 自企業は更に低い利潤しか得られず, 固定費用を回収できない恐れがある. よって, 他企業に先導者となられるのを防ぐために, 可能な限り早く, 具体的には先導者としての価値が追従者としての価値を上回った瞬間 (i.e. X_L^i を超えたら) に価格を変更する. 結果としてこの行動が, 固定費用の期待現在価値を大きくしてしまう方向に作用する.

5 価格決定問題への拡張

本節では, ここまでで議論した問題の拡張として, 前節までで与件としてきた価格そのものを決定する, 価格決定問題について考察する. これまでに明らかにした価格変更タイミングについての結果を用いれば, リスク要因の初期値に依存して生起する均衡状態が解る. このタイミングを与件とすれば, 生起しうる各均衡状態について, その領域での自企業の価値 (i.e. 最適値関数 $F(P_i^1, P_j^1), L(P_i^1, P_j^1)$) を最大化するように, P_i^1, P_j^1 を決定すればよい.

特に, 図 1 の区間 B, D のように, どちらの企業が先導者/追従者になるのかが確定する場合, この区間における価格決定は, 以下のように行なわれる: 先導者となる企業 i は, 相手企業 j がこの区間ではオプション行使を行なわないことを知っているため, 先導者としての価値 $L_i(P_i^1, P_j^{1*}(P_i^1))$ を最大化するように P_i^1 を決定する. ここで $P_j^{1*}(P_i^1)$ は, 追従者である企業 j の, 先導者の価格 P_i^1 に対する最適反応であり, 追従者としての企業 j の価値 $F_j(P_i, P_j)$ を最大化するものである. 両企業の価格は, 第 2 節の議論と同様, まず追従者の問題, 次に先導者の問題と, 後ろ向きに解くことによって求められる. 具体的には, まず企業 i の価格 P_i^1 を所与としたうえで追従者である企業 j の最適反応 $P_j^{1*}(P_i^1)$ を求め, それを用いて先導者である企業 i の価値を最大化するような P_i^1 を求めればよい.

参考文献

[1] A.K.Dixit and R.S.Pindyck, "Investment under Uncertainty," Princeton University Press, 1994.

[2] J.V.Leahy, "Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behavior," The Quaterly Journal of Economics, pp.1105-1133, 1993.

[3] S.R.Grenadier, "The Strategic Exercise of Options: Development Cascades and Overbuilding in Real Estate Markets," The Journal of Finance, Vol. LI, No. 5, pp.1653-1679, 1996.