

経済成長モデルと動的最適化 *

Economic Growth Model and Dynamic Optimization *

横松宗太**

by Muneta YOKOMATSU**

1. はじめに

インフラストラクチャー(以下インフラと記す)は民間企業の投資行動を促し、一国の経済成長に大きな影響を与える。企業の生産性を向上させるインフラには、輸送施設やエネルギー供給施設等の物的インフラがある。また市場の安定化を目的とする法制度や事業免許取得の許認可制度、警察、裁判等の制度インフラも含まれる。政府によるインフラ整備は多国籍企業の子会社の設立等、国際的な資本の流入を誘発する。国際的な資本の集積は外国からの技術移転をもたらす、さらに国内の生産性を向上させる。

本研究では、社会のインフラストックの価値や政府によるインフラ投資の経済効果を評価するための開放経済モデルを定式化する。そして、インフラのshadow priceの構造を明らかにする。また時々刻々のshadow priceの値からインフラ投資の決定を導くための投資関数を導出することを目的とする。さらに経済が定常状態に収束する場合や内生的成長を続ける場合の条件について分析する。さらに、インフラストックに依存して国際的に資本が流出入する開放経済モデルを採用することによって得られる著しい結果について取りまとめる。

2. 動学的インフラ投資モデル

本研究では、インフラのストック状況を「量」と「質」という2つの指標により表現した、動学的インフラ投資モデルを定式化する。政府は道路、港湾、空港、橋梁等のインフラを整備する。インフラの整備は、企業が保有する民間資本の生産性を向上させる。いま、新規整備時のインフラのサービス水準が技術

基準として規定されていると考える。さらに、既存のインフラストックのサービスが適切な維持補修により技術基準の水準に維持されていると仮定しよう。その上で、時刻 t におけるインフラのストック量を $m(t)$ と表す。 $m(t)$ は、技術基準として決められたサービス水準のインフラを新規取得する際に必要となる取得価額(再調達価額)で評価されている。一方、インフラの質的水準を価格指標 q で表す。インフラのサービス水準 q をそれを調達する時の所得価額(あるいは、再調達価額)と技術基準と対応したサービス水準を持つインフラの取得価額との価額比で表現する。したがって、サービス水準 q を持つインフラストックの資産価値は $qm(t)$ と表される。いま、インフラの新規整備時のサービス水準が q に設定されていると考えよう。インフラのサービス水準は時間とともに劣化するが、サービス水準を常に q に維持するために期間 Δt に対して維持補修費 $R(q)\Delta t$ が支出される。また、インフラの新規投資量を変数 $j(t)$ で表す。サービス水準が q に設定されている場合、インフラの新規投資額は $qj(t)$ となる。

本研究では、無限視野をもつ社会計画者が民間資本とインフラ資本の投資量を集権的に決定するfirst bestの問題を定式化する。また、開放経済を対象とし世界利子率は時間を通じて一定と仮定する。国内の家計数は一定とし、社会計画者は代表的家計の生涯効用水準を最大化する。家計の無限の将来に亘る生涯効用水準は、瞬間的効用水準の加法和で与えられる。時刻 t における瞬間的効用 $u(c(t), q)$ は消費 $c(t)$ とインフラのサービス水準 q によって定義される。インフラのサービス水準は時間を通じて一定であると仮定する。効用関数 $u(c(t), q)$ は性質

$$u_c > 0, u_{cc} < 0, u_q > 0, u_{qq} < 0, u_{cq} = 0 \quad (1)$$

を満足すると仮定する。以後、下付き文字は当該変

*キーワード: インフラストラクチャー, 経済成長モデル, 開放経済モデル

**正員 鳥取大学工学部社会開発システム工学科

(〒680-8552 鳥取市湖山町南 4-101 TEL 0857-31-5311 FAX 0857-31-0882

数による偏微分を表す．対象国が時間を通じて small であることを保証するために，代表的家計の時間選好率は世界利子率 r に一致すると仮定する．生産は労働，民間資本，インフラ資本の投入によって行われる．家計数は時間を通じて一定とし，また一家計の労働供給水準を一定と仮定する．生産関数を単位労働に関する集約形を用いて $f(k(t), m(t))$ と表す．ここに， $k(t), m(t)$ はそれぞれ民間の生産資本，インフラ資本のストック量を表す．

$$f_k > 0, f_{kk} < 0, \lim_{k \rightarrow 0} f_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0 \quad (2a)$$

$$f_m > 0, f_{mm} \leq 0, \lim_{m \rightarrow 0} f_m = \infty \quad (2b)$$

$$f_{km} > 0 \quad (2c)$$

対象国の生産に投入される民間の生産資本 $k(t)$ は每期 η の率で減耗すると仮定する．インフラが除却されるまでの耐用年数と比較して，民間資本の耐用年数は非常に短い．よって民間資本の投資には調整費用が存在せず，瞬時に望ましい民間資本ストックが実現すると考える．民間資本の最適ストックに関する最適化条件は次式で与えられる．

$$f_k(k, m) - \eta = r \quad (3)$$

対象国の民間資本ストックの均衡水準は上式の逆関数で表される．

$$k = \tilde{k}(r + \eta, m) \quad (4a)$$

$$\tilde{k}_r < 0, \tilde{k}_\eta < 0, \tilde{k}_m > 0 \quad (4b)$$

世界利子率が上昇すると海外貯蓄の効率が向上するため，対象国への投資は減少する．また，減耗率が上昇すると，企業はより高い限界生産性を確保する必要があるため，投資水準を減少させることになる．また，インフラストックが増大すると，より多くの民間資本が国内外から流入する．

質的水準 q のインフラ資本の量 $m(t)$ の形成過程は次式により与えられる．

$$q\dot{m}(t) = qj(t) - l(t) \quad (5)$$

以後，記号「 $\dot{\cdot}$ 」は時刻 t による微分を表す．インフラ資本の量 $m(t)$ の形成過程 (5) において， $j(t)$ は新設投資量， $l(t)$ は除却スケジュールを表す．本研究ではインフラの除却スケジュールは外生的に与えられ，

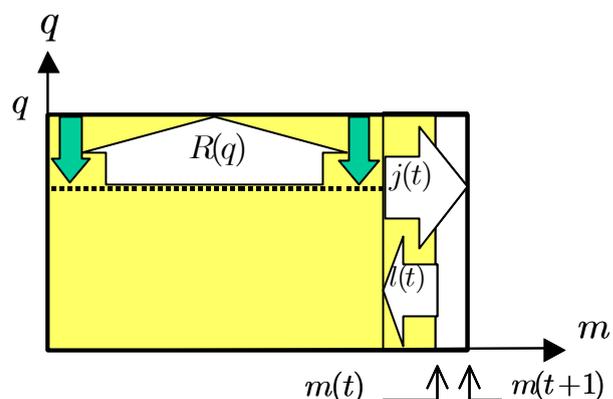


図 - 1 インフラの形成過程と資産価値

每期 $l(t) = \gamma qm(t)$ のインフラが除却されると仮定する．よって，

$$\dot{m}(t) = j(t) - \gamma m(t) \quad (6)$$

インフラの新設投資には調整費用が生じる．本研究では Hayashi 型調整費用 $\Theta(q, j, m)$ を仮定する³⁾．

$$\Theta(q, j, m) = qj \cdot Z\left(\frac{j}{m}\right) \quad (7a)$$

$$Z(0) = 0, Z' > 0, Z'' > 0 \quad (7b)$$

またインフラのサービス水準 q に応じて維持補修費用 $R(q)$ が発生する．

$$R(0) = 0, R'(q) > 0 \quad (8)$$

図 - 1 はインフラの形成過程を模式的に表している．陰のついた長方形の部分が t 期のインフラ総資産価値 $qm(t)$ を，一番外側の長方形が $(t+dt)$ 期の総資産価値 $qm(t+dt)$ を表している．インフラの新規投資 $j(t)$ によりインフラの資産価値は $qj(t)$ 増加し，除却 $l(t)$ により資産価値は $ql(t)$ 減少する．時期にも引き続き供用するインフラストックが $\{m(t) - l(t)\}$ だけ存在すれば，維持補修費用 $\{m(t) - l(t)\}R(q)$ が発生する．以上の仮定のもとで，政府による最適インフラ投資問題は以下のように表される．

$$\max_{a(t) \ (0 \leq t < \infty)} \int_0^\infty u(c, q) \exp(-rt) dt \quad (9a)$$

subject to

$$\dot{a} = ra + f(\tilde{k}, m) - (r + \eta)\tilde{k} - c - (m - \gamma m)R(q) - qj \left\{ 1 + Z\left(\frac{j}{m}\right) \right\} \quad (9b)$$

$$\dot{m} = j - \gamma m \quad (9c)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \exp(-rt) \geq 0 \quad (9d)$$

ただし $u(t) = \{c(t), j(t)\}$ は制御変数ベクトルである。 $a(t)$ は対象国の海外への貸付の水準を表す。 $\dot{a}(t)$ は当該期の経常黒字を表している。式(9b)に示すように、経常黒字は貸付による利子所得と生産から、民間資本の利払いと減耗に対する維持費用、消費、インフラ資本の投資費用を差し引いた残額と等価である。インフラ資本の投資費用は式(9b)の右辺2行目により示されている。右辺2行目第1項は除却せずに継続して供用する資本に関する維持補修費用を表す。右辺2行目第2項は新設するインフラに関する投資費用であり、中括弧の第1項は投資財、第2項は調整費用を表す。式(9d)はNo-Ponzi-Game条件を表す。

3. 最適投資行動

当該期価値ハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H(t) = u(c) + \lambda \dot{a} + q\mu\lambda \dot{m} \quad (10)$$

ただし、 $\lambda(t)$ は消費財の当該期価値の shadow price を表す。また、 $\mu(t)$ は消費財の shadow price で基準化した単位サービス水準当たりのインフラ拡充投資の shadow price を表す。1階の最適化条件より、 $\lambda(t)$ は一定値を示すことがわかる。さらに $\lambda(t)$ は消費の限界効用に等しい。それによって消費水準は時間を通じて一定となる。

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \bar{c} \\ &= r \left\{ a_0 + \int_0^\infty \left[f(\tilde{k}^*, m^*) - (r + \eta)\tilde{k}^* - (m^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma m^*)R(q) - qj \left\{ 1 + Z\left(\frac{j^*}{m^*}\right) \right\} \right] \exp(-r\tau) d\tau \right\} \\ &= rv_0 \end{aligned} \quad (11)$$

以後、上付きの「*」は当該変数が最適経路であることを示す。 v_0 は代表的家計が獲得できる生涯資産の現在価値を表す。毎期の消費水準は v_0 の利子に一致する。開放経済では最適消費水準は効用関数形に依存しない。

各期における最適インフラ投資率 $\sigma(t) \equiv j(t)/m(t)$ を定義しよう。以下のように最適インフラ投資率 $\sigma^*(t)$ は shadow price $\mu(t)$ のみの関数となる。

$$\sigma^*(t) \equiv \zeta(\mu(t)) \quad (12a)$$

$$\zeta(1) = 0, \quad \zeta'(\mu) > 0 \quad (12b)$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial \mu} = \zeta'(\mu) = \frac{1}{2Z'(\sigma) + \sigma Z''(\sigma)} > 0 \quad (12c)$$

これより以下のインフラ投資ルール \mathcal{I} を得る。

$$\mathcal{I} = \begin{cases} \text{新規整備が正当化される} & \mu(t) > 1 \\ \text{新規整備は正当化されない} & \mu(t) \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

shadow price $\mu(t)$ は動学的世界における資本投資基準を表す。企業投資理論における「Tobinの限界 q 」(Tobin's marginal q) に相当する。

インフラ投資ルール \mathcal{I} は shadow price $\mu(t)$ を与えられたもとでの最適投資行動について指示するものである。一方、1階の条件より $\mu(t)$ の動学は以下の運動方程式に従う。

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= (r + \gamma)\mu - \frac{f_m(\tilde{k}, m)}{q} \\ &\quad + (1 - \gamma)\frac{R(q)}{q} - \left(\frac{j}{m}\right)^2 Z'\left(\frac{j}{m}\right) \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \lambda \exp(-rt) m = 0 \quad (14b)$$

いま、境界条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) \exp\{-(r + \gamma)t\} = 0 \quad (15)$$

が成立すると仮定すると、 $\mu(t)$ について以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \mu^*(t) &= \int_t^\infty \left\{ \frac{f_m(\tilde{k}^*, m^*)}{q} - (1 - \gamma)\frac{R(q)}{q} \right. \\ &\quad \left. + \sigma^{*2} Z'(\sigma^*) \right\} \exp\{-(r + \gamma)(\tau - t)\} d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

被積分関数の第1項はインフラ投資による瞬間的限界生産性を意味する。また、第2項はインフラ投資によって生じる限界的維持補修費用を、第3項はインフラ資本の増加に伴って生じる調整費用の限界的減少効果を示す。すなわち、今期にインフラを増やすことによって、将来の各時点におけるインフラ投資による調整費用が

$$\frac{d}{dm} \left\{ j Z\left(\frac{j}{m}\right) \right\} = -\sigma^2 Z'(\sigma) \quad (17)$$

だけ削減される便益を意味する。インフラ資本の量的拡充投資に関する基準化された shadow price $\mu(t)$ は、以上の効果を現在時点から無限の将来に亘って集計した値に決められる。その際、世界利子率とインフラ除却率の和として定義される一般化割引率が採用される。

shadow price は終端時刻を境界条件とした微分方程式(14a)の解として与えられる。すなわち、状態変数である資本ストックの最適経路は現在の状態を

境界条件として決まるのに対して、随伴変数である shadow price の最適経路は横断性条件によって与えられる終端時刻の状態を境界条件として後ろ向きに決定される。すなわち、無限の将来から遡って現在の値を求めなくてはならない。過去から現在までに至るインフラ管理実績を記述する会計情報のみを用いて shadow price を計算することはできない。その一方で、開放経済においては、式(16)に示すように、インフラの shadow price は個人の効用関数や海外貸付の水準とは独立に決定されることになる。すなわち、インフラの shadow price を算定する上で、将来の消費や金融資産のストック水準に関する情報は必要でない。従って、現時点で現在から将来にわたる最適インフラ投資戦略に関する情報があれば、インフラの shadow price を計算することが可能となる。

4. 動学的投資過程

インフラ蓄積過程が、次式で定義される長期定常状態に収束する場合について考えよう。

$$\dot{m}(t) = 0, \quad \dot{\mu}(t) = 0 \quad (18)$$

定常状態の投資水準 j^s 、投資率 σ^s 、インフラ資本の量 m^s 、shadow price μ^s は次式を満足する。

$$j^s = \gamma m^s, \quad \sigma^s = \gamma \quad (19a)$$

$$f_k(\tilde{k}^s, m^s) = r + n \quad (19b)$$

$$\mu^s = 1 + Z(\gamma) + \gamma Z'(\gamma) \quad (19c)$$

$$f_m(\tilde{k}^s, m^s) = \{1 + Z(\gamma) + \gamma Z'(\gamma)\}qr + \{1 + Z(\gamma)\}q\gamma + (1 - \gamma)R(q) \quad (19d)$$

以下の関係が成立するときに、上記の定常状態に至る鞍点経路が存在する。

$$f_{mk}^s \tilde{k}_m^s + f_{mm}^s < 0 \quad (20)$$

図 - 2 に (m, μ) 平面上の動学過程について示す。条件(20)の第1項は、インフラの総資産価値の増加が民間資本の限界生産性を増加させることによって、民間資本の追加的投入を招く効果を示す。第1項はインフラ投資による正の間接効果に相当する。一方、第2項はインフラの蓄積により、その直接的な

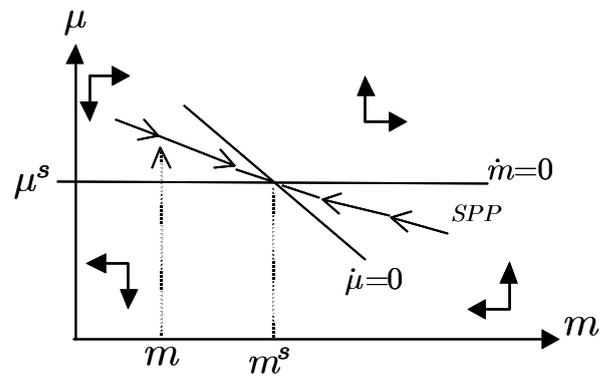


図 - 2 鞍点経路と定常状態

限界生産性が逡減する効果を意味している。定常状態 (m^s, μ^s) の近傍において、第2項の負の効果が第1項の正の効果を上回るとき、図 - 2 に示すように (m, μ) 平面上に鞍点経路 SPP(Saddle Point Path) と定常状態が存在することになる。任意の時点において、インフラ資本のストック水準 m に応じて鞍点経路上の shadow price μ が決定される。例えば、ある時点におけるインフラ資本 m が m^s よりも小さいときには、 $\mu > \mu^s (> 1)$ となる。そして最適投資ルール I に従ってインフラ投資が実施される。それによってインフラストックは増加し shadow price は減少し、経済は定常状態 (m^s, μ^s) へと収束する。

5. おわりに

本稿では、開放経済における動学的インフラ投資モデルを定式化し、最適インフラ投資行動と shadow price の関係について導出した。また定常状態に収束するインフラ蓄積過程について紹介した。紙面の制約上、比較動学分析の結果や最適サービス水準に関する考察は講演時に発表することとする。また講演時に経済が内生的成長を続けるケースについて紹介する。さらにインフラの経済価値を計測する会計指標や、開放経済モデルの特徴について取りまとめる。

参考文献

- 1) Aronsson, T., P.-O. Johansson, and K.-G. Löfgren: *Welfare Measurement, Sustainability and Green National Accounting*, Edward Elgar, 1997.
- 2) Blanchard, O.-J. and Fischer, S.: *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, 1989, 高田聖治訳: マクロ経済学講義, 多賀出版, 1999.
- 3) Hayashi, F.: Tobin's marginal q and average q; A neoclassical interpretation, *Econometrica*, Vol.50, pp.213-224, 1982.
- 4) 朱保華: 投資関数の理論, 九州大学出版会, 1995.