

ロジットモデルを前提とする場合における交通プロジェクトの利用者便益計測手法の再検討*

*On the Measurement of User's Benefit When Using the MNL Model in The Transport Projects**

加藤浩徳**・家田 仁***

By Hironori KATO** and Hitoshi IEDA***

1. はじめに

近年、鉄道や航空等の交通サービスの需要分析に非集計ロジットモデルが使用されることが多い。そして、鉄道や空港プロジェクトの費用対効果分析マニュアル^{1),2)}においては、ロジットモデルを需要分析手法として用いたときの利用者便益計測手法として、OD ベースで定義される最大効用の期待値(ログサム)が用いられるべきことが示されている。

$$UB_{ij} = -\frac{1}{\lambda\theta_C} \left\{ \ln \left(\sum_{r \in R_{ij}} \exp(\lambda V_{r,ij}^w) \right) - \ln \left(\sum_{r \in R_{ij}} \exp(\lambda V_{r,ij}^o) \right) \right\} \quad (1)$$

ここで、 UB_{ij} : $i \rightarrow j$ を移動する人の利用者便益、 $\lambda\theta_C$: 経路の効用関数中の交通費用にかかるパラメータの推定値、 $V_{r,ij}$: $i \rightarrow j$ の経路 r ($\in R_{ij,n}$) の効用関数の確定項であり、右肩の記号は、「w」はプロジェクト有りを、「o」は無しをそれぞれ意味する。また、式(1)では、効用関数が少なくとも交通費用に関して線型であることを仮定している。

だが、マニュアルにおいて利用者便益計測の背景となる考え方が十分に示されていないため、「ロジットモデルを用いる場合、経路ベースで計算される利用者便益とODベースで計算される利用者便益は一致するのか」といった疑問や、「ログサム値によって求められた利用者便益値を、各経路に分解できないか」、あるいは「ログサム値によって求められた利用者便益値を構成要素(例えば、時間短縮便益、費用節減便益等)に分解できないか」という実務的要請が寄せられることがあるが、それらについて明快な回答がなされていない。

そこで、本稿では、交通プロジェクト評価にロジットモデルが用いられることを前提とするとき、経路ベースの利用者

便益とODベースの利用者便益との関係、利用者便益の経路への分解可能性、利用者便益の構成要素への分解可能性について検討することを目的とする。

なお、本稿では、プロジェクトによる所得効果はゼロと仮定とし、MD型消費者余剰を用いた利用者便益を原則とする。所得効果がゼロの場合には、Varian³⁾でも示される通り、等価的偏差(EV)、補償的偏差(CV)、MD型消費者余剰のいずれを用いても利用者便益は一致する。

2. 経路ベースとODベースの利用者便益計測について

一般的には、城所⁴⁾が示すように、いかなる需要関数の場合でも、経路別に利用者便益を求めて合算すると、当該ODの利用者便益が計算できる。したがって、ロジットモデルを用いた場合であっても、経路別の利用者便益を求めてODで合算すれば、ODベースで定義される式(1)と同一の結果が得られるはずである。以下では、これが成立することを示す。

(1)ロジットモデルと線積分の経路依存性について

需要関数にロジットモデルが用いられる場合、交通プロジェクトによる特定のODペアにおける利用者便益は、MD型消費者余剰を用いて、以下の式によって定義される⁵⁾。

$$UB = \frac{1}{\theta_C} \sum_r \int_{V_r^o}^{V_r^w} x_r dV_r \\ = -\frac{N}{\theta_C} \sum_r \int_{V_r^o}^{V_r^w} P_r dV_r \quad (2)$$

ここで、 x_r : 当該OD間の経路 r の交通需要、 V_r : 効用関数の確定項、 P_r : 経路 r の選択確率、 N : 当該ODペア間の全移動者数、 θ_C : 効用関数中の交通費用にかかるパラメータである。そして、選択確率は、良く知られた以下のロジット式によって計算されるものとする。

$$P_r = \frac{\exp(\lambda V_r)}{\sum_t \exp(\lambda V_t)} \quad (3)$$

式(2)の利用者便益計測式の積分の部分は、いわゆる線

*キーワード: プロジェクト評価

**正員, 博(工), 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻(東京都文京区本郷7-3-1, TEL03-5841-7451, FAX03-5841-8506)

***正員, 工博, 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻

積分であり、一般には積分経路に依存して積分値が変化してしまう。これが、一般に、MD 型消費者余剰を用いる場合の欠点の1つといわれてきた。ところが、ロジットモデルを用いる場合には、この問題が発生しないことが知られている。

上の線積分が、積分経路から独立した一意の解を持つための必要十分条件は、すべての r と s について、

$$\frac{\partial P_r}{\partial V_s} = \frac{\partial P_s}{\partial V_r} \quad (4)$$

が成立することである(グリーンの定理)⁶⁾。

ここで、ロジットモデルの選択確率式は、上記の条件を満たすことが簡単に確認できる。

$$\frac{\partial P_r}{\partial V_s} = -\frac{e^{V_r} \cdot e^{V_s}}{\left(\sum_t e^{V_t}\right)^2} = \frac{\partial P_s}{\partial V_r} \quad (5)$$

したがって、需要関数にロジットモデルが用いられる場合には、積分経路の問題は発生しないことになる。これは、ロジットモデルの持つ重要な特性の1つである。

(2)経路ベースでの利用者便益値の集計

経路ベースで求めた利用者便益値を集計する作業に向けて、まずログサム関数を以下のように定義しておく。

$$v(V_1, \dots, V_R) = \frac{1}{\lambda} \ln \sum_r \exp(\lambda V_r) \quad (6)$$

すると、

$$\frac{\partial v(\mathbf{V})}{\partial V_r} = \frac{\partial}{\partial V_r} \left(\frac{1}{\lambda} \ln \sum_r \exp(\lambda V_r) \right) = P_r \quad (7)$$

が成立する。

このとき、MD 型消費者余剰による利用者便益は、

$$\begin{aligned} UB &= -\frac{N}{\theta_C} \cdot \sum_r \int_{V_r^o}^{V_r^w} \frac{\partial v(\mathbf{V})}{\partial V_r} dV_r \\ &= -\frac{N}{\theta_C} \cdot \sum_r (v(\mathbf{V}^w) - v(\mathbf{V}^o)) \\ &= -\frac{N}{\lambda \theta_C} \cdot \sum_r \left[\ln \{ \exp(\lambda V_1) + \dots + \exp(\lambda V_r^w) + \dots + \exp(\lambda V_R) \} \right. \\ &\quad \left. - \ln \{ \exp(\lambda V_1) + \dots + \exp(\lambda V_r^o) + \dots + \exp(\lambda V_R) \} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

となる。したがって、各経路毎にログサム値を計算し、その差を足し合わせれば、当該 OD の利用者便益が得られることが分かる。

ところが、この積分の実行には一つ留意すべき問題が存在する。それは、各経路の積分を実行するときに、当該経路については $V_r^o \rightarrow V_r^w$ を使えばよいが、それ以外の経路

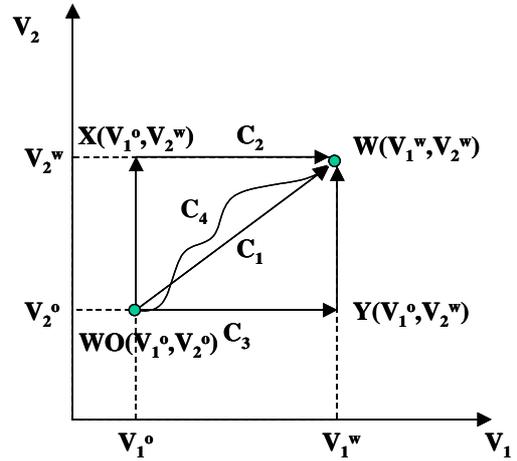


図-1 2経路のケースにおける積分経路

について、いかなる数値を使うべきかということが明確でない、という問題である。

この問題を解決するためには、線積分をどのような経路で実行するかについて、具体的に検討する必要がある。そこで、経路が2つの場合を事例に、具体的検討を行う。

(3)経路が2本の場合の線積分

上で示した通り、ロジットモデルを用いる場合には、式(2)の線積分は経路から独立となるので、いかなる経路を想定しても同一の結果が得られるはずである。

そこで、例として経路が2本しかない場合を想定してみる。(なお、以下の議論は、経路が何本になっても同様に成立する。)このとき、経路が2本の場合における、プロジェクト実行による利用者便益計測時の積分経路は、図-1における Without ケースの点 WO と With ケースの点 W とを結ぶ曲線として表現可能となる。

ここで、良く用いられる線積分の経路は、各経路の効用が同一比率で変化することを仮定するものである。これは、図-1の経路 C_1 を意味する。

例えば、すべての経路について

$$V_r = V_r^o + \alpha(V_r^w - V_r^o) \quad (9)$$

となる変数 $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ を導入してみる^{7),8)}。このとき、すべての経路 r について、 $V_r^o \rightarrow V_r^w$ は、 $\alpha=0 \rightarrow \alpha=1$ という置換が可能となる。また、このとき、 $dV_r = (V_r^w - V_r^o) d\alpha$ となる。

すると、経路 C_1 に沿った線積分は次のように計算できる。

$$UB = -\frac{N}{\theta_C} \sum_{r=1}^R \int_{V_r^o}^{V_r^w} P_r(\mathbf{V}) dV_r$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N}{\theta_C} \sum \int_0^1 \frac{\exp[\lambda V_r^o + \alpha \lambda (V_r^w - V_r^o)]}{\sum \exp[\lambda V_s^o + \alpha \lambda (V_s^w - V_s^o)]} (V_r^w - V_r^o) d\alpha \\
&= -\frac{N}{\theta_C} \int_0^1 \frac{\sum (V_r^w - V_r^o) \cdot \exp(\lambda V_r^o) \exp(\alpha \lambda (V_r^w - V_r^o))}{\sum \exp(\lambda V_s^o) \exp(\alpha \lambda (V_s^w - V_s^o))} d\alpha \\
&= -\frac{N}{\theta_C} \left[\frac{1}{\lambda} \ln \left[\sum \exp(\lambda V_r^o) \exp(\alpha \lambda (V_r^w - V_r^o)) \right] \right]_0^1 \\
&= -\frac{N}{\theta_C} \left[\frac{1}{\lambda} \ln \left(\sum \exp(\lambda V_r) \right) \right]_{V^o}^{V^w} \\
&= -\frac{N}{\lambda \theta_C} \left[\ln \left(\sum \exp(\lambda V_r^w) \right) - \ln \left(\sum \exp(\lambda V_r^o) \right) \right] \quad (10)
\end{aligned}$$

これは、式(1)と同一である。以上より、利用者便益を経路毎に求めて全経路について合算しても、やはり総利用者便益はログサム値の差によって求められることがわかる。

ここで重要な点は、経路 C_1 を用いると、積分の実行を α という1変数で実行しているために、各経路の積分を個別に実行せずに、単純な積分になる点である。これにより、先に述べた、ある経路の積分を実行するときに他の経路の効用をどう定義すべきかという問題を回避することができる。

3. 利用者便益の経路ならびに構成要素への分解可能性

(1) 利用者便益の経路への分解可能性

経路 C_1 では、結局、個別の経路の積分を行わなかった。そこで、個別の経路毎に利用者便益値を求められないかという点について検討してみよう。例えば、図-1において、経路 C_2 や C_3 という可能性を考えてみる。

経路 C_2 は、経路1の効用を V_1^o に固定したときの $V_2^o \rightarrow V_2^w$ の積分結果と、経路2の効用を V_2^w に固定したときの $V_1^o \rightarrow V_1^w$ の積分結果を合算するという方法である。一方で、経路 C_3 は、経路1の効用を V_1^w に固定したときの $V_2^o \rightarrow V_2^w$ の積分結果と、経路2の効用を V_2^o に固定したときの $V_1^o \rightarrow V_1^w$ の積分結果を合算するという方法である。

それぞれの経路による利用者便益は、以下の式によって表される。

$$\begin{aligned}
UB_{C_2} &= -\frac{N}{\theta_C} \int_{V_1^o}^{V_1^w} P_1(V_1, V_2^w) dV_1 - \frac{N}{\theta_C} \int_{V_2^o}^{V_2^w} P_2(V_1^o, V_2) dV_2 \\
&= -\frac{N}{\lambda \theta_C} \left(\ln[\exp(\lambda V_1^w) + \exp(\lambda V_2^w)] - \ln[\exp(\lambda V_1^o) + \exp(\lambda V_2^w)] \right) \\
&\quad - \frac{N}{\lambda \theta_C} \left(\ln[\exp(\lambda V_1^o) + \exp(\lambda V_2^w)] - \ln[\exp(\lambda V_1^o) + \exp(\lambda V_2^o)] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
UB_{C_3} &= -\frac{N}{\theta_C} \int_{V_1^o}^{V_1^w} v(V_1, V_2^o) dV_1 - \frac{N}{\theta_C} \int_{V_2^o}^{V_2^w} v(V_1^w, V_2) dV_2 \\
&= -\frac{N}{\lambda \theta_C} \left(\ln[\exp(\lambda V_1^w) + \exp(\lambda V_2^o)] - \ln[\exp(\lambda V_1^o) + \exp(\lambda V_2^o)] \right) \\
&\quad - \frac{N}{\lambda \theta_C} \left(\ln[\exp(\lambda V_1^w) + \exp(\lambda V_2^w)] - \ln[\exp(\lambda V_1^w) + \exp(\lambda V_2^o)] \right) \quad (12)
\end{aligned}$$

まず、式(11)と(12)をみると、最後の式ではそれぞれ2つの項が相殺されて、いずれも結局式(1)が得られることが簡単に確認できる。したがって、やはり経路によらず総利用者便益は一致する。(ちなみに、多経路の場合でも同様の結論は得られる。付録を参照のこと。)

また、式(11)と(12)の最後の式の1番目の括弧、2番目の括弧はそれぞれ経路1の利用者便益、経路2の利用者便益を表すが、これらの結果は、積分経路によって異なることに気づく。これは、利用者便益計算の対象経路以外の経路の効用が、2つの式では、どの水準で固定されているかが異なるためである。つまり、各経路の積分値は積分経路に依存して変化し、一意に定まらないことがわかる。また、一般的には経路はいかようにも設定可能である。例えば、図-1の C_4 のような経路も考えられるが、経路毎の積分値は、その経路の特性によって自由に变化する。

以上の検討から、ロジットモデルにおける積分値の一意性は、Without ケースの点 WO と With ケースの点 W との間では成立するが、それを経路別に分解したときには成立しないことがわかる。したがって、ロジットモデルによって得られた利用者便益を経路別に分解することは原理的に不可能である、と結論づけられる。

(2) 利用者便益の構成要素への分解可能性

次に、利用者便益の構成要素への分解可能性について検討する。ここで、利用者便益の構成要素とは、各経路の効用関数が、交通時間や費用等を変数とする場合に、プロジェクト有無によるそれらの個別変数の変化分によって発生する利用者便益を指す。したがって、構成要素別の利用者便益を全て合算すると全利用者便益となっている必要がある。

先と同様に経路が2本のケースについて検討して見よう。例えば、経路の効用関数が、交通時間と交通費用の2つからのみ構成されていると仮定する。このとき、交通時間の变化による各経路の効用の变化が $wo(V_1^o, V_2^o) \rightarrow z_1(V_1^{z_1}, V_2^{z_1})$ で、残りの交通費用による各経

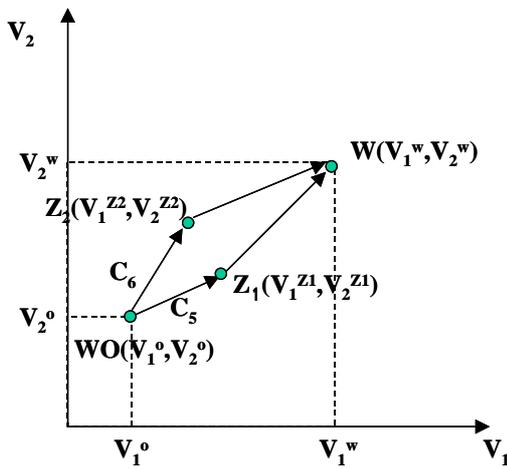


図-2 便益の構成要素への分解可能性

路の効用の変化が、 $Z_1(V_1^{Z_1}, V_2^{Z_1}) \rightarrow W(V_1^w, V_2^w)$ によって表されるとする。これは、図-2の経路 C_5 に沿って積分することを意味する。すると、少なくとも2点間の変化に関しては経路から独立に積分が実行できるので、それぞれの利用者便益を求めることはできる。また、当然それらを合算すると、全利用者便益はやはり式(1)と同一になる。

しかし、ここでも経路の問題が発生することに気づく。なぜなら、経路 C_5 では、先に交通時間が変化し、後から交通費用が変化すると仮定したが、逆に先に交通費用が変化し、後から交通時間が変化すると仮定すると(例えば、経路 C_6 に沿って積分すると)、当然だが各構成要素の積分値が異なるからである。

したがって、ロジットモデルを前提とする場合には、利用者便益を構成要素に分解することも、原理的には不可能であることがわかる。

4. おわりに

本稿では、ロジットモデルを前提として交通プロジェクトによる利用者便益を計算する場合において、経路別の利用者便益の和はODベースの利用者便益と一致すること、利用者便益を経路別ならびに構成要素別に分解することはともに原理的に不可能であることを示した。

付録 ログサム値を用いる場合の経路別逐次合算法

Neuberger⁷⁾は、MNLモデルを用いる場合の利用者便益計測手法として、以下のような計算による経路別利用者便益の合算方法を示している。ここでは、いかなる順序で経路の利用者便益を合算しても同一値が得られる。

$$UB = -\frac{N}{\theta_C} \sum_r \int_{V_r^o}^{V_r^w} P_r dV_r$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{N}{\theta_C} \sum_r \int_{V_r^o}^{V_r^w} \frac{\exp(\lambda V_r)}{\sum_{s<r} \exp(\lambda V_s^w) + \sum_{s>r} \exp(\lambda V_s^o) + \exp(\lambda V_r)} dV_r \\ &= -\frac{N}{\lambda \theta_C} \sum_r \left[\ln \left\{ \sum_{s<r} \exp(\lambda V_s^w) + \sum_{s>r} \exp(\lambda V_s^o) + \exp(\lambda V_r) \right\} \right] \\ &= -\frac{N}{\lambda \theta_C} \left[\ln \left(\sum_{s=1} e^{\lambda V_s^o} + e^{\lambda V_1^w} \right) - \ln \left(\sum_{s=1} e^{\lambda V_s^o} + e^{\lambda V_1^o} \right) \right] \\ &\quad + \left\{ \ln \left(e^{\lambda V_1^w} + \sum_{s>2} e^{\lambda V_s^o} + e^{\lambda V_2^w} \right) - \ln \left(e^{\lambda V_1^w} + \sum_{s>2} e^{\lambda V_s^o} + e^{\lambda V_2^o} \right) \right\} \\ &\dots \\ &\quad + \left\{ \ln \left(\sum_{s=R} e^{\lambda V_s^w} + e^{\lambda V_R^w} \right) - \ln \left(\sum_{s=R} e^{\lambda V_s^w} + e^{\lambda V_R^o} \right) \right\} \end{aligned}$$

このとき、最後の式の2番目の項と最後から2番目の項以外はすべてキャンセルアウトするので、最終的に以下のようにになる。

$$UB = -\frac{N}{\lambda \theta_C} \left\{ \ln \left(\sum_{r=1}^R e^{\lambda V_r^w} \right) - \ln \left(\sum_{r=1}^R e^{\lambda V_r^o} \right) \right\} \quad (13)$$

これは、式(1)と同一であることが分かる。

【参考文献】

- 1) 運輸省鉄道局 (1999) 鉄道プロジェクトの費用対効果分析マニュアル'99, (財)運輸政策研究機構。
- 2) 運輸省航空局 (1999) 空港整備事業の費用対効果分析マニュアル1999, (財)運輸政策研究機構。
- 3) Varian, H. L. (1978) Microeconomics Analysis, Third Edition, W. W. Norton & Company.
- 4) 城所幸弘 (2002) 交通プロジェクトの便益評価 - 体系と課題, 応用地域学会ディスカッションペーパー, pp.1-46.
- 5) Small, K. A. and Rosen, H. S. (1981) Applied Welfare Economics with Discrete Choice Models, *Econometrica*, Vol.49, Issue 1, pp.105-130.
- 6) Jara-Diaz, S. R. and Friesz, T. L (1982) Measuring the Benefit Derived from Transportation Investment, *Transportation Research B*, Vol.16B, No.1, pp.57-77.
- 7) Neuberger, H. (1971) User Benefit In the Evaluation of Transport and Land Use Plans, *Journal of Transport and Economics*, Vol.5, pp.52-75.
- 8) Jara-Diaz, S. R. (1990) Consumer's Surplus and the Value of Travel Time Savings, *Transportation Research B*, Vol.24, No.1, pp.73-77.
- 9) Williams, H.C.W.L. (1977) On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user's benefit, *Environment and Planning A*, Vol.9, pp.285-344.
- 10) Williams, H. C. W. L. (1976) Travel Demand Models, Duality Relations and User Benefit Analysis, *Journal of Regional Science*, Vol.16, No.2, pp.147-166.