市場の不完備性を考慮した経済リスクの動的評価[*1]

The Dynamic Pricing of Projects with Stochastic Cash Flow Stream in Incomplete Markets [*1]

長江 剛志[*2]
By Takeshi Nagae[*2],

1 はじめに

(1) 背景と目的

近年，不確実なキャッシュ・フローを発生させる不動産や事業の経済的価値の評価に対して，リアル・オプション理論を用いた研究が盛んに行われている．このアプローチでは，対象とする不動産や事業を市場取引が行われていない資産 (オプション) と見なし，その価値評価に従来の金融オプション理論をそのまま適用する．この評価方法は，完備市場，すなわち，当該オプションの取引がもたらすリスクが証券あるいは資産運用によって完全にヘッジできる (i.e. 市場で取引される証券・資産を組み合わせることで，キャッシュ・フローを完全に replicate できる) 場合には適切である．しかし，リアル・オプションを対象とする場合，この完備市場の仮定は不自然であることが多い．例えば，不動産から得られる地代収入は，市場で取引される証券・資産価格とある程度の相関を持つが，それだけで完全に説明できるわけではない．このような不動産の評価に従来手法を適用することは，資産取引によってヘッジできないリスク (およびその価値) を完全に無視するという，非常に大胆な (“危険な”) 仮定をおいていることに等しい．

これに対し，長江・赤松 [1)] は，市場の不完備性を明示的に考慮した上で，これらのリアル・オプションの価格を計量化するための枠組みを提案した．しかし，ここでの分析対象は，権利を行使する時刻があらかじめ与件としたヨーロピアン・オプションのみに限定されている．一般に，多くのリアル・オプション分析において重要となるのは，オプションの所有者が権利を “行使するかしないか” だけでなく，“いつ行使するか” も選択できる点である．例えば，土地 (あるいは不動産開発権) は，契約として認められていればいつでも開発を開始できるアメリカン・オプションであるのが一般的である．

このような背景に鑑み，本研究では，市場の不完備性と，タイミング選択行動の両方を同時に考慮した上で，リアル・オプションの価値を計量化するための手法を開発する．具体的には，赤松・長江 [1)] の提案した枠組みの下で，分析対象を，権利行使時刻も選択可能なオプションへと拡張する．本稿は以下のように構成される：第 2 章で基本的な枠組みと従来の金融オプション理論を概説する．続く第 3 章では，この枠組みの下で，分析対象を権利行使時刻の選択を導入したモデルへと拡張し，モデル特性の分析を行う．最後に，第 4 章では，この問題に対するアルゴリズムを開発する．

2 基本的枠組みと無裁定原理

本章では，まず，本研究が対象とするモデルの基本的枠組みを示す．そして，その枠組み下で，無裁定原理のみに基づいた従来の金融オプション評価手法を概説する．

(1) モデルの枠組み

対象期間 $[0,T]$，および時点 T における事象集合 Ω を考える．Ω に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega)|\omega \in \Omega\}$ とし，Ω のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t)|t \in [0,T]\}$ を定義する．これらの 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ で定義される確率空間上で，K 次元 $\mathcal{P}$-Wiener 過程 $\boldsymbol{Z}(t) \equiv [Z_1(t) \cdots Z_{\mathrm{K}}(t)]'$ を仮定し，その増分 $\mathrm{d}Z_k(t)$ が互いに独立であるとする．以下では，この $\boldsymbol{Z}$ を “リスク要因” と呼ぶ．また，確率測度 $\mathcal{P}$ の下での期待演算であることを明示するために，$\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\cdot]$ なる記号を用いる．さらに，条件付期待値を $\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}[\cdot] \equiv \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\cdot|\mathcal{F}(t)]$ と定義する．

確定的な利子率 $r(t)$ で成長する 1 種類の安全資産と，N 種類の危険資産が取引される資産取引市場を考える．時刻 t での安全資産価格，および n 番目の危険資産の価格を $B(t), \hat{S}_n(t)$ で表し，それぞれ，以下の確率微分方程式に従うと仮定する：

$$\mathrm{d}B(t)/B(t) = r(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\hat{S}_n(t)/\hat{S}_n(t) = \hat{\alpha}_n(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}_n(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t), \tag{2}$$

$$= \hat{\alpha}_n(t)\,\mathrm{d}t + \textstyle\sum_k \sigma_{n,k}(t)\,\mathrm{d}Z_k(t). \tag{3}$$

以降では，表記の簡便化，および概念の理解を容易にするため，安全資産をニューメレール資産とし，任意の資産価格 ($\hat{X}(t)$ と表記) を安全資産の価格で基準化した “割引価格”($X(t) \equiv \hat{X}(t)/B(t)$ と表記) を適宜用いる．また，割引済み危険資産価格を $\boldsymbol{S}(t) \equiv [S_1(t) \cdots S_{\mathrm{N}}(t)]'$ とベクトル表記し，以下の確率過程で表す：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)/\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t) \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t). \tag{4}$$

ここで，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)}{\boldsymbol{S}(t)} \equiv \left[\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)} \cdots \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{N}}(t)}{S_{\mathrm{N}}(t)}\right]'$ とし，$\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)$ を以下のように定義する：

[*1] keywords:プロジェクト評価, 逆問題, オプション理論, 不完備市場
[*2] 正会員 博士 (情報科学)　京都大学防災研究所 総合防災研究部門

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1(t) - r(t) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{\mathrm{N}}(t) - r(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \dots & \sigma_{1,\mathrm{K}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\mathrm{N},1}(t) & \dots & \sigma_{\mathrm{N},\mathrm{K}}(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

以下では，市場で取引されている安全資産，危険資産を総じて “市場資産” と呼ぶ．これに対し，確率動学的に変動するキャッシュ・フローを発生する不動産や事業など，市場で取引されていない資産と見なせるものを “非市場資産 (あるいはオプション)” と呼ぶ．

本稿で議論するオプションのキャッシュ・フローは，その満期 (事業の場合，契約の終了時点) $t = T$ に発生する終端ペイ・オフ $F(T) \equiv F(T, \boldsymbol{Z}(T))$ のみとする．これは，単に理論展開を簡潔に示すための便宜であり，本手法の本質的な仮定 (あるいは限界) を意味するものではない．例えば，期間 $[0, T]$ 中に毎時刻 (連続的に) キャッシュ・フロー (“配当”) が発生する場合は，本モデルの分析に僅かな修正を加えるだけで容易に対応できる．また，期間 $[0, T]$ 中の適当な離散的時点に確率的キャッシュ・フローが発生する場合については，(終端ペイ・オフのみを持つ) 満期の異なった複数のオプションのポートフォリオとみなせば良い．

(2) 無裁定原理のみに基づいたオプション評価問題 [2)]

上述の枠組みにおいて，裁定機会が存在しないとは，“N 個の市場資産をどのように組み合わせても，元手 0 で正の期待利潤を得ることができない” ことと定義する．従来，市場においてこの無裁定条件が成立することと，$\mathcal{P}$ に対する等価 martingale 測度 (EMM: Equivalent Martingale Measure) $\mathcal{Q}$ が存在することが等価であることが知られている [3)]．ここで，EMM とは，任意の資産価格を martingale にするような，$\mathcal{P}$ と等価な確率測度である．すなわち，前節で定義した市場資産価格について，以下の無裁定条件が成立する：

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[\boldsymbol{S}(s)\right] = \boldsymbol{S}(t), \forall (t, s) \in \{t, s \in [0, T]; t < s\}. \tag{7}$$

従来の金融オプション理論は，非市場資産 (オプション) が市場で取引された場合に，上述の市場資産と，当該オプションとの売買に裁定が存在しないための価格 (以下，無裁定価格) を求めるものである．このとき，当該オプションの無裁定価格 $\mathcal{C}(t)$ は，$\mathcal{Q}$ の下での終端ペイ・オフ $F(T)$ の期待現在価値 $\mathcal{C}(t) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[F(T)\right]$ で表される．すなわち，オプション評価問題は，無裁定条件式 (7) から，EMM $\mathcal{Q}$ を推定する逆問題の一つと見なせる．

本研究が対象とする不完備市場とは，Arrow-Debreu の不確実性下での一般均衡理論の枠組みにおいて，起こり得る全ての状態に対する条件付請求権 (contingent claim) が市場で取引されていない状況を指す．これは，本研究の枠組みにおいては，各状態でのみ発生するキャッシュ・フローを市場資産の取引で replicate できないことを意味する．すなわち，市場が不完備であるとは，独立な市場資産の数 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\sigma})$ が，キャッシュ・フローの変動をもたらすリスク要因の数 K よりも少ない場合として表現される．

この不完備市場においては，市場で取引されている資産価格情報と，無裁定条件を与えるのみでは EMM $\mathcal{Q}$，ひいてはオプション価格が不定となる．すなわち，オプションの取引を行う投資家は，無裁定条件 (12) を満たす中で任意のオプション価格を主張できる．このような状況下では，オプション価格の最小/最大値 (i.e. bid/ask 価格) を議論することに十分な意義がある．無裁定条件下でオプション価格の上下限を求める問題は，以下の EMM 推定問題として定式化される (例えば，Luenberger [4)])：

$$[\text{PB-NA}] \quad C_{\mathrm{B}}(0) \equiv \min_{\mathcal{Q}}.\, \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}\left[F(T)\right], \text{ s.t. (7)}.$$

$$[\text{PS-NA}] \quad C_{\mathrm{S}}(0) \equiv \max_{\mathcal{Q}}.\, \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}\left[F(T)\right], \text{ s.t. (7)}.$$

3 提案手法

無裁定原理のみに基づいたオプション評価問題 [PB-NA], [PS-NA] は，不完備市場においては，その解 (i.e. オプション価格) が発散し得ることが知られている．これは，問題 [PB-NA], [PS-NA] が線形逆問題であり，その最適性条件が特異となるためである．この発散問題を回避するため，赤松・長江 [1)] は，無裁定条件に加えて，以下に示す確率測度 $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ の KL (Kullback-Leibler) 情報量 (相対エントロピーの符号を反転したもの) の下限

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \equiv -\int \mathcal{Q}(\omega) \ln \frac{\mathcal{Q}(\omega)}{\mathcal{P}(\omega)}\, \mathrm{d}\omega \geq \bar{H} \tag{8}$$

を設けた手法を提案した．この KL 情報量は，2 つの確率測度の相対的な乖離を計る一般的な指標であり，これに制約を設けることは，確率測度の推定問題として自然なアプローチである．さらに，赤松・長江 [1)] では，この手法が，オプションの取引を行う主体 (i.e. オプションの買手，売手) の効用最大化行動に帰着することを明らかにした．本章では，この提案手法を，権利行使時刻を選択できるアメリカン・オプションへと拡張する．ここで対象とするオプションのキャッシュ・フローは，権利行使時刻 τ に発生するペイ・オフ $F(\tau) \equiv F(\tau, \boldsymbol{Z}(\tau))$ のみとする．この仮定は議論を簡潔にするための便宜であり，本手法の限界を示すものではない．以下では，まず，第 2 章で示した枠組みの下で，オプション価格の上限 (下限) を，それぞれ，オプションの買手 (売手) がつける価格と見なして求める問題を定式化する．次に，それぞれの問題に対する数理解析を行い，モデルの性質およびメカニズムを明らかにする．

(1) 定式化

確率測度推定問題 [PB-NA], [PS-NA] は，明示的な未知変数を，以下に定義される確率的割引ファクタ (SDF: Stochastic Discount Factor) $\Lambda(T)$ とした問題に帰着する：

$$\Lambda(T)/\Lambda(t) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\,\mathrm{d}Q/\,\mathrm{d}P\right]. \tag{9}$$

この SDF はそれ自身確率過程であり，Arrow-Debreu 状態価格を連続時間-連続状態の枠組みに拡張したものと見なせる．この SDF を用いれば，当該オプションの権利行使時刻 τ がオプションの所有者 (i.e. 買手) によって決定された時，対象とするオプションの，時刻 t での無裁定価格 $\mathcal{C}$ および KL 情報量 $\mathcal{H}$ は，それぞれ，以下の式で表される：

$$\mathcal{C}(t,\tau,\Lambda(T)) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[(\Lambda(T)/\Lambda(t))\,F(\tau)\right] \tag{10}$$

$$\mathcal{H}(t,\Lambda(T)) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[(\Lambda(T)/\Lambda(t))\ln\left(\Lambda(T)/\Lambda(t)\right)\right] \tag{11}$$

同様に，無裁定条件式 (7) 以下のように書き直される：

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[(\Lambda(s)/\Lambda(t))\,S(s)\right] = S(t), \quad \forall t < s. \tag{12}$$

オプションの買手は，オプションを取得する前に SDF $\Lambda(T)$ (i.e. オプション価格) を選択し，オプションを取得した後に権利行使時刻 τ を選択する．この合理的選択行動は，後ろ向き帰納法 (backward-induction) により，以下の 2 段階行動として表現される：① ある SDF $\Lambda(T)$ の下でオプションを取得した後は, オプション価格 $\mathcal{C}(t,\tau,\Lambda(T))$ を最大にする権利行使時刻 $\tau^*(\Lambda(T))$ を決定する；② オプション取得前は，任意の SDF に対する最適権利行使時刻 $\tau^*(\Lambda(T))$ を与件として，オプションの購入価格 $\mathcal{C}(t,\tau^*(\Lambda(T)),\Lambda(T))$ を最小にする SDF $\Lambda_{\mathrm{B}}^*(T)$ を選択する．従って，オプション買手の行動は，最適 SDF $\Lambda_{\mathrm{B}}^*(T)$ と最適権利行使時刻 τ^* を同時に決定する以下の問題として定式化される：

$$\text{[PB-A]} \quad \max_{\tau\in[0,T]}.\min_{\Lambda(T)}.\,C(0,\tau,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(0,\Lambda(T)), \quad \text{s.t. (12)}.$$

ここで，γ は，KL 情報量制約に対応する Lagrange 乗数であり，その下限値 $\bar{H}$ について単調な所与の定数である．

一方，オプションの売手は，買手が決定した権利行使時刻 τ^* においてペイ・オフを支払うことを与件とし，オプション価格を最大化する SDF $\Lambda_{\mathrm{S}}^*(T)$ を選択する．この行動は以下のように定式化される：

$$\text{[PS-A]} \quad \max_{\Lambda(T)}.\,C(0,\tau^*,\Lambda(T)) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(\Lambda(T)), \ \text{ s.t. (12)}.$$

こうして定式化された問題 [PB-A], [PS-A] は，いずれも，絶対危険回避度一定型の効用関数をもったオプション取引主体のリスク・ヘッジ行動に帰着することが明らかにされている [1)]．以下では，これらの問題 [PB-A], [PS-A] に対して数理的解析を行い，その最適性条件を導出する．

(2) 最適性条件

(a) 買手問題

本節では，買手問題 [PB-A] に DP 原理を適用することで，この問題が状態空間 $\{(t,\boldsymbol{Z})\}$ を "権利を行使する領域" と，"権利を行使しない領域" とに分割する問題に帰着することを示す．まず，買手問題 [PB-A] の最適値関数を以下のように定義しよう：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\tau\in[t,T]}.\min_{\Lambda(T)}.\,\mathcal{C}(t,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad \text{s.t. (16)}. \tag{13}$$

DP 原理を適用すれば，この問題は，各状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ において，以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：1) 微小時間 $\mathrm{d}t$ だけ権利行使を待機する；2) 権利行使を行い，オプションのペイ・オフを獲得する．以下では，それぞれが "仮に" 選ばれたとした時の最適値関数について議論する．

■権利行使が待機される場合　状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ において，1) が "仮に選択された" ときの最適値関数は，以下の式に従う：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\tau\in[t+\,\mathrm{d}t,T]}.\min_{\Lambda(T)}.\,\mathcal{C}(t,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad \text{s.t. (12)}. \tag{14}$$

DP 原理を適用して整理すれば, 以下の HJB 方程式を得る：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z}) = \min_{\mathrm{d}\eta(t)}.\,\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\,\mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t)\right\}\right], \tag{15}$$

$$\text{s.t. } \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\,\mathrm{d}\eta(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right] = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

ここで，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t) \equiv \mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t) + \,\mathrm{d}\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)$ である．また，$\mathrm{d}\eta(t)$ は，以下の式で定義される SDF の変化率である：

$$\mathrm{d}\eta(t) \equiv \left(\Lambda(t) + \,\mathrm{d}\Lambda(t)\right)/\Lambda(t). \tag{17}$$

時刻 t での無裁定条件式 (16) は，無裁定条件式 (12) を DP 分解することによって得られる．

無裁定条件式 (16) に対する Lagrange 乗数を $\boldsymbol{\beta}(t) \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}$ とすれば，HJB 方程式 (15) の最適性条件より，最適 SDF 変化率 $\mathrm{d}\eta^*(t)$ についての以下の Logit 式を得る：

$$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*(t) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]\right]}. \tag{18}$$

ここで，Lagrange 乗数の最適値 $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^*(t)$ は以下の方程式の解として得られる：

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t) - \boldsymbol{\beta}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]\right] = \boldsymbol{0}. \tag{19}$$

式 (18), (19) は，次章におけるオプション価格導出法において重要な役割を果たす．

■権利が行使される場合　状態 $(t, \boldsymbol{Z})$ において，2) が "仮に選択された" 時の最適値関数は，以下の式に従う：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv F(t, \boldsymbol{Z}) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^{*}(t, \boldsymbol{Z}). \tag{20}$$

ここで，$\mathcal{H}^{*}(t) \equiv \mathcal{H}^{*}(t, \boldsymbol{Z})$ は無裁定条件 (12) の下で最大化された KL 情報量であり，以下の式で定義される：

$$\mathcal{H}^{*}(t) \equiv \max_{\Lambda(T)}.\mathcal{H}(t, \Lambda(T)), \text{ s.t. } (12) \tag{21}$$

この $\mathcal{H}^{*}$ は，予め計算しておくことが可能であり，問題 [PB-A] においては，所与の定数として扱える．紙面の都合上，その計算の詳細については，ここでは省略する．

■変分不等式問題としての表現　ここまでで定義した $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}, \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}$ は，それぞれ，権利が行使された場合，権利行使が待機される場合に対する "仮の" 最適値関数である．以下では，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}, \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}$ を用いて，"真の" 最適値関数が従う条件について議論しよう．最適値関数の性質より，$(t, \boldsymbol{Z})$ において，1) が選択される場合，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z}), \quad \text{and} \quad \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z}) > \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t, \boldsymbol{Z}) \tag{22}$$

となる．逆に，2) が選択される場合，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t, \boldsymbol{Z}), \quad \text{and} \quad \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t, \boldsymbol{Z}) > \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z}) \tag{23}$$

となる．これらは，以下の VIP (Variational Inequality Problem: 変分不等式問題) として表現できる：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \max.\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z}), \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t, \boldsymbol{Z})\right\}. \tag{24}$$

このように VIP として表現される問題は，対象とする状態空間 $(t, \boldsymbol{Z})$ を，以下の 2 つの領域に分割する自由境界問題に帰着することが知られている：

$$\mathcal{D}^{1} \equiv \{(t, \boldsymbol{Z}) | \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z}) > \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t, \boldsymbol{Z})\}, \tag{25}$$

$$\mathcal{D}^{0} \equiv \{(t, \boldsymbol{Z}) | (t, \boldsymbol{Z}) \notin \mathcal{D}^{1}\}. \tag{26}$$

ここで，$\mathcal{D}^{1}$ を権利行使領域，$\mathcal{D}^{0}$ を待機領域と呼ぶ．

(b)　売手問題

売手問題 [PS-A] の最適値関数を以下のように定義する：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{S}}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\Lambda(T)}.\mathcal{C}(t, \tau^{*}, \Lambda(T)) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t, \Lambda(T)), \quad \text{s.t. } (16). \tag{27}$$

DP 原理を適用すれば，買手によって決定された領域 $\mathcal{D}^{1}, \mathcal{D}^{0}$ を所与とした，以下の HJB 方程式を得る：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{S}}(t, \boldsymbol{Z}) = \begin{cases} F(t, \boldsymbol{Z}) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^{*}(t, \boldsymbol{Z}) & \text{if} \quad (t, \boldsymbol{Z}) \in \mathcal{D}^{1} \\ \mathcal{I}_{\mathrm{S}}^{0}(t, \boldsymbol{Z}) & \text{if} \quad (t, \boldsymbol{Z}) \in \mathcal{D}^{0} \end{cases}.$$

ここで，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{S}}^{0}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \min_{\mathrm{d}\eta(t)}.\mathrm{E}_{t}^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{-\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{S}}^{+}(t)\right\}\right], \quad \text{s.t. } (16). \tag{28}$$

4　アルゴリズム

本章では，買手問題/売手問題を解き，その解を用いてオプション価格を導出する方法を解説する．ただし，ここでは，紙面の都合上，買手の主問題を用いた解法についてのみ議論する．売手問題については，買手の問題を解いて得られた権利行使領域 $\mathcal{D}^{1}$ を用いれば容易に解くことができる．

対象とするオプションの買手価格は，以下の 2 段階の手順によって求められる：まず，問題 [PB-A] を解く．次に，そこで得られる最適 SDF 変化率 $\{\mathrm{d}_{\mathrm{B}}^{*}(t)\}$ および権利行使領域 $\mathcal{D}^{1}$ を用いてオプション価格を計算する．これらは，時間分解可能性に着目することで，逐次的に解くことができる．

まず，[PB-A] の解法を示す．各状態 $(t, \boldsymbol{Z})$ について，次の瞬間の最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t)$ を所与として，式 (20) および式 (15) から，権利行使が行われる場合と，行使が待たれる場合の最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t), \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t)$ をそれぞれ求める．$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t)$ の計算には最適条件式 (18), (19) を用いる．こうして求めた最適値関数の間の条件式 (22) から，状態 $(t, \boldsymbol{Z})$ が権利行使領域に含まれるかどうかを決定し，最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)$ を求める．

次に，オプション価格 $C_{\mathrm{B}}(t)$ は，DP 分解された以下の式から計算できる：

$$C_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \begin{cases} F(t, \boldsymbol{Z}) & \text{if} \quad (t, \boldsymbol{Z}) \in \mathcal{D}^{1} \\ \mathrm{E}_{t}^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t) C_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right] & \text{if} \quad (t, \boldsymbol{Z}) \in \mathcal{D}^{0} \end{cases}. \tag{29}$$

ここで，$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t), \mathcal{D}^{1}$ は，それぞれ，最適 SDF 変化率，および権利行使領域であり，いずれも問題 [PB-A] の解として求められる．また，$C_{\mathrm{B}}^{+}(t) \equiv C_{\mathrm{B}}(t) + \mathrm{d}C_{\mathrm{B}}(t)$ である．これより，終端条件 $C_{\mathrm{B}}(T, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z})$ から逐次的に式 (29) を計算すれば，オプション価格 $\{C_{\mathrm{B}}(t)\}$ が得られる．

5　おわりに

本研究では，市場の不完備性と権利行使のタイミング選択を明示的に考慮したリアル・オプション評価の計量化手法を提案した．その具体的な適用例および数値計算結果については，講演会で報告する予定である．

参考文献

1) 赤松隆, 長江剛志: 経済リスクを考慮した社会基盤投資プロジェクトの動学的財務評価, 土木学会論文集, (投稿中), 2002.
2) El Karoui, N. and Quenez, M. C.: Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incompletej market, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 33, No. 1, pp. 29–66, 1995.
3) Harrison, J. M. and Pliska, S. R.: Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stochastic Process and Their Applications, Vol. 11, pp. 215–260, 1981.
4) Luenberger, D. G.: Arbitrage and universal pricing, Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 26, pp. 1613–1628, 2002.