

部分的観測可能性を考慮した最適プロジェクト評価ルール *

The Optimal Evaluation Rules of Projects with Partial Observability*

織田澤利守**・小林潔司***

by Toshimori OTAZAWA** and Kiyoshi KOBAYASHI***

1. はじめに

公共プロジェクトのプロジェクト価値は時間と共に不確実に変動するため、確定的なスケジュールに沿ってプロジェクトを執行することにより多大な非効率が生じる危険性がある。むしろ、時間軸上で変動するプロジェクト価値に関する情報を用いながら、プロジェクトに対する投資判断が行えるような意思決定ルールを設計することが重要である。

リアルオプション理論¹⁾や伝統的な動学的投資モデル²⁾では、時間軸に沿ってプロジェクト価値が常に観測できることを想定している。しかし、プロジェクト価値に関する情報は常に入手できるわけではなく、プロジェクト評価を実施した時点においてのみ観察可能である。すなわち、プロジェクト価値の変化過程は部分的に観測可能である。また、プロジェクト評価を実施するためには費用を要する。そのため、どのようなタイミングでプロジェクト評価を実施すれば、評価費用も含めて最適な意思決定を実施できるかを決定する必要がある。

本研究では、プロジェクト価値の部分的観測可能性を考慮した上で、プロジェクトの経済価値が最大となるようなプロジェクト実施タイミングおよび評価タイミングを決定する動学的な最適投資モデルを定式化し、プロジェクト評価を通じて獲得されるプロジェクト価値の情報に基づいた状況依存的なプロジェクト評価・実施ルールを提案する。さらに、本研究で提案するプロジェクト評価・実施ルールが積分

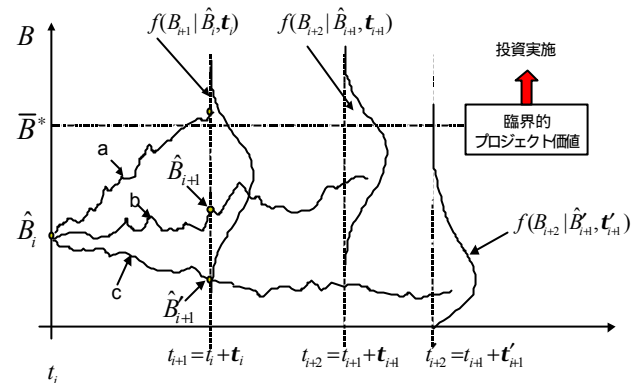


図 - 1 プロジェクト価値と最適プロジェクト戦略

方程式を反復的に解く問題に帰着することを示す。

2. 本研究の基本的な考え方

図 - 1 は、プロジェクト価値の変動過程と最適なプロジェクト評価・実施タイミングの関係を示した概略図である。いま、プロジェクトが完成する以前の任意の時刻 t_i において、プロジェクト評価によりプロジェクト価値 \hat{B}_i を観測した場合を想定しよう。このとき、意思決定者は、1) 即座にプロジェクトを実施するか、プロジェクトの実施を延期するかについての選択し(最適実施戦略問題)、2) 延期した場合に、次回の評価を実施するタイミングを決定する(最適評価時刻問題)。プロジェクト価値には不確実性が介在するため、将来時点におけるプロジェクト価値を確定的には把握することができない。ただし、その確率分布のみを知り得るものとする。

図 - 1 では、確率的に発生するパスの内、3つのサンプルパス a, b, c を抽出している。いま、意思決定者が時刻 t_i でプロジェクトの実施を留保し、時刻 t_{i+1} に再度プロジェクト評価を実施するという戦略を選択したとする。サンプルパス a が実現した場合、

*キーワード: プロジェクト評価, リアルオプション, 積分方程式

**学生員 工博 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073)

***フェロー 工博 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5071)

時刻 t_{i+1} において即座にプロジェクトが実施される。プロジェクトの実施戦略に関しては、プロジェクト価値に対してある閾値 \bar{B}^* (以下、臨界的プロジェクト価値と呼ぶ) が存在し、観測値が閾値を上回った時にプロジェクトの実施が正当化され、逆に下回ればプロジェクトの延期が正当化されるというルールを考える。サンプルパス a 上では、時刻 t_{i+1} において実現するプロジェクト価値の観測値が臨界的プロジェクト価値 \bar{B}^* を上回るため、当該時刻においてプロジェクトを実施する戦略が最適となる。一方、サンプルパス b, c では、時刻 t_{i+1} においてプロジェクトを延期することが最適となる。このとき、意思決定者は、プロジェクト評価によって獲得した観測値の情報から推定される将来時点のプロジェクト価値の確率分布 $f(B_{i+2}|\hat{B}_{i+1}, \tau_{i+1})$ に基づいて、次回のプロジェクト評価のタイミングを決定する。次回のプロジェクト評価のタイミングは時刻 t_{i+1} で観測されたプロジェクト価値に依存する。いま、サンプルパス b に従ってプロジェクト価値が推移し、時刻 t_{i+1} で観測されたプロジェクト価値が \hat{B}_{i+1} である場合を考える。その場合、次回の評価タイミングは時刻 $t_{i+2} = t_{i+1} + \tau_{i+1}$ に実施される。しかし、サンプルパス c に従った場合は、サンプルパス b よりも評価タイミングを遅らせて時刻 $t'_{i+2} = t_{i+1} + \tau'_{i+1}$ に実施することが望ましいだろう。本研究で提案する最適評価・実施モデルは、1) プロジェクトを実施すべきかどうかを判断する臨界的プロジェクト価値と 2) 評価時点においてプロジェクトを延期した場合に、その時に観測されたプロジェクト価値 \hat{B} に基づいて次回に実施するプロジェクト評価までの時間間隔 $\tau(\hat{B})$ という意思決定ルールを求める構造となっている。

3. モデル

(1) モデル化の前提条件

初期時刻 $t_0 = 0$ を起点として無限遠まで続く時間軸を想定する。ある時点から将来にわたってプロジェクトよりもたらされる期待便益の当該期価値の総和をプロジェクト価値と呼ぶ。プロジェクト価値は時間軸に沿って不確実に変動し、直接的に観測することはできないが、プロジェクト評価を行った時点においてのみ確定的な値を知ることができる。すなわち、

プロジェクト価値は部分的に観測可能である。また、将来時点のプロジェクト価値は確定的に把握することはできず、その確率分布のみを知り得るとする。

このような状況の中で、意思決定者がプロジェクトの評価タイミングと実施タイミングを決定する問題を定式化する。プロジェクト評価には評価費用 I_E を要する。簡単のため、プロジェクト評価ならびに建設は瞬時に終了すると仮定する。図 - 1 において、時刻 t でプロジェクト価値 \hat{B} を観測した場合、意思決定者は「即座にプロジェクトを実施するか」、「プロジェクトの実施を留保するか」を決定する。プロジェクトを実施した場合、投資費用 I_C が支払われ、プロジェクトの完成後、每期便益が発生する。プロジェクトの実施を延期した場合、意思決定者はプロジェクト評価によって獲得した情報に基づいて、次回にプロジェクト評価を実施するタイミングを決定する。すなわち、本研究では、プロジェクト評価問題を 1) 最適なプロジェクトの実施戦略 (実施, 延期) を決定する問題 (最適実施戦略問題) と、2) 延期した場合に、次回の評価を実施するタイミングを決定する問題 (最適評価時刻問題) という 2 つの部分問題で構成される最適評価・実施モデルを定式化する。

(2) プロジェクト価値のモデル化

時刻 t において、プロジェクトが完成した場合に獲得できる価値を $B(t)$ と表す。投資が実施される前の時点では、プロジェクトが完成していないため、プロジェクトの価値は発生し得ない。この場合、その時刻における経済環境の下で、仮想的にプロジェクトが完成したとするとときに獲得される (潜在的な) プロジェクト価値を表すとする。プロジェクト価値にはリスクが存在し、時間を通じて潜在的なプロジェクト価値は変動する。プロジェクト価値は、部分的に観測可能であり、プロジェクト評価を実施した時点においてのみ確定的な値を把握することができる。いま、時刻 t において、将来時刻 t' に実現するプロジェクト価値を確定的に把握できないが、時刻 t' で観測されるプロジェクト価値の確率分布は既知であると仮定する。時点 t においてプロジェクト価値 \hat{B} が観測されたとしよう (記号「 $\hat{\cdot}$ 」は確定値であることを表す)。このとき、時刻 $t + \tau$ で観測されるプロジェクト価値 B は、区間 $[0, \infty)$ 上で定義される条件付き確率

密度関数 $f(B|\hat{B}, \tau)$ に従って分布する。

$$= \max_{\tau \geq 0} \{Q(\hat{B}, \tau) - I_E\} \exp(-\rho\tau) \quad (3)$$

(3) モデルの定式化

プロジェクトの期待純価値の現在価値が最大となるようなプロジェクトの最適な評価・実施タイミングを決定するモデルを定式化する。いま、ある時点 t までプロジェクトの実施が留保され、当該時刻にプロジェクト評価が行われるとする。プロジェクト評価により確定的に把握されるプロジェクト価値 \hat{B} のもとで、意思決定者が「即座にプロジェクトを実施するか」、「プロジェクトの実施を留保し、任意の期間が経過した後に再度評価を実施するか」を決定する局面を考えよう。以下では、上記の問題を a) 最適実施戦略問題と b) 最適評価時刻問題の 2 つの部分問題として定式化する。

と表される。このとき、最適評価間隔 $\tau^*(\hat{B})$ は、

$$\tau^*(\hat{B}) = \arg \max_{\tau \geq 0} [\Psi(\hat{B}, \tau)] \quad (4)$$

と表される。式 (4) で求まる最適評価間隔は、プロジェクト価値の観測値 \hat{B} に応じて異なる値をとる。したがって、最適評価間隔 τ^* は \hat{B} の関数として表現される。以下、関数 $\tau^*(B)$ を最適評価間隔関数と呼ぶ。

b) 最適実施戦略問題

時点 t においてプロジェクト評価によりプロジェクト価値 \hat{B} を観測したとする。プロジェクトの実施が決定されれば、投資費用 I_C が投下される。プロジェクトは瞬時に完成し、当該時点より将来にわたって、プロジェクト便益が発生するとする。このとき、プロジェクト完成により獲得できるプロジェクトの期待総純価値の当該期価値（以下、期待純価値と呼ぶ）は、

$$P(\hat{B}) = \hat{B} - I_C \quad (5)$$

と表される。一方、プロジェクトを留保する場合に獲得される期待純価値は、最適評価時刻問題の解 (3) として求まる。したがって、時点 t でプロジェクト価値 \hat{B} を観測した時に、それ以降最適にプロジェクト選択を実施したことにより得られる経済価値 $\Phi(\hat{B})$ は、

$$\Phi(\hat{B}) = \max [P(\hat{B}), \Psi^*(\hat{B})] \quad (6)$$

と表せる。式 (6) の右辺第 1 項は第 2 段階の投資を実施した場合に獲得できる期待純価値を、第 2 項は意思決定を留保したときに獲得される期待純価値の当該期価値を表す。意思決定者は、2 つの選択肢の中で期待純価値が最も大きくなる選択肢を選択する。

いま、ある臨界的プロジェクト価値 \bar{B}^* が存在し、

$$\Phi(\hat{B}) = \begin{cases} P(\hat{B}) & \hat{B} > \bar{B}^* \text{ の時} \\ \Psi^*(\hat{B}) & \bar{B}^* \geq \hat{B} > 0 \text{ の時} \end{cases} \quad (7)$$

が成立すると仮定しよう。この時、意思決定が留保されるようなプロジェクト価値を示す継続集合 C を

$$C = \{B | \bar{B}^* \geq B > 0\} \quad (8)$$

と定義することができる。プロジェクト環境によっては継続集合 C が空集合となる場合もありうる。いま、 $C \neq \emptyset$ と仮定しよう。この時、任意の $\hat{B} \in C$ に対して、

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{B}) &= \Psi^*(\hat{B}) \\ &= \{Q(\hat{B}, \tau^*(\hat{B})) - I_E\} \exp(-\rho\tau^*(\hat{B})) \end{aligned} \quad (9)$$

a) 最適評価時刻問題

いま、時点 t でプロジェクトの実施に関する意思決定を留保する場合を考える。時刻 t より任意の期間 τ が経過した時刻 $t' = t + \tau$ に再度プロジェクト評価を実施し、当該時刻より将来にわたって最適なプロジェクト選択が行われたときに獲得される期待純価値の当該期価値 $Q(\hat{B}, \tau)$ は、

$$\begin{aligned} Q(\hat{B}, \tau) &= E_f[\Phi(B)|\hat{B}] \\ &= \int_0^\infty \Phi(B) f(B|\hat{B}, \tau) dB \end{aligned} \quad (1)$$

と表される。ここに、 $\Phi(B)$ は時点 t におけるプロジェクト価値 B のもとで、それ以降最適な投資戦略をとることにより達成可能な期待純価値の当該期価値を表す最適値関数である。 $\Phi(\cdot)$ は未知関数であるが、当面の間、関数形を与件として議論を進める。また、記号 $E_f[\cdot|\hat{B}]$ は条件付確率密度関数 $f(B|\hat{B}, \tau)$ に関する期待値操作を表す。ただし、期間 $s \in [t, t']$ の間に投下された費用は時刻 t' においてはすでに支出されており、式 (1) では考慮されていないことに留意されたい。一方、時点 t より将来にわたって発生する期待純価値の時点 t における当該期価値 $\Psi(\hat{B}, \tau)$ は、

$$\Psi(\hat{B}, \tau) = \{Q(\hat{B}, \tau) - I_E\} \exp(-\rho\tau) \quad (2)$$

と表される。ただし、 ρ は割引率、 I_E は評価費用である。評価期間 τ を最適に決定することによって獲得される期待純価値の最大値 $\Psi^*(\hat{B})$ は、

$$\Psi^*(\hat{B}) = \max_{\tau \geq 0} [\Psi(\hat{B}, \tau)]$$

が成立する．式(1)を展開することにより，

$$Q(\hat{B}, \tau^*(\hat{B})) = \int_0^{\bar{B}^*} \Phi(B) f(B|\hat{B}, \tau^*(\hat{B})) dB \\ + \int_{\bar{B}^*}^{\infty} P(B) f(B|\hat{B}, \tau^*(\hat{B})) dB \quad (10)$$

と表せる．ここで，最適値関数 $\Phi(\hat{B})$ の値がプロジェクト価値 \hat{B} の値のみに依存していることに留意されたい．式(9)より，継続集合 C 内において

$$\Phi(\hat{B}) = \Theta(\hat{B}) + \int_0^{\bar{B}^*} \Phi(B) K(B, \hat{B}; \tau^*(\hat{B})) dB \quad (11) \\ \Theta(\hat{B}) = \left\{ \int_{\bar{B}^*}^{\infty} P(B) f(B|\hat{B}, \tau^*(\hat{B})) dB \right. \\ \left. - I_E \right\} \exp(-\rho\tau^*(\hat{B}))$$

が成立する．ただし，

$$K(B, \hat{B}; \tau^*(\hat{B})) = f(B|\hat{B}, \tau^*(\hat{B})) \exp(-\rho\tau^*(\hat{B})) \quad (12)$$

である．式(11)は未知関数 $\Phi(\hat{B})$ に関する第2種フレドホルム型積分方程式³⁾となっている．積分方程式の解を $\Phi^*(\hat{B})$ と表す．最適値関数 $\Phi^*(\hat{B})$ に対して境界条件

$$\Phi^*(\bar{B}^*) = P(\bar{B}^*) \quad (13)$$

が成立する．このように最適実施戦略問題は，最適評価時刻問題の結果を与件とし，積分方程式(11)ならびに境界条件(13)を満足するような未知関数 $\Phi^*(\hat{B})$ と臨界的プロジェクト価値 \bar{B}^* を求める問題となる．

4. モデルの解法

本研究で定式化した最適評価・実施モデルは，最適実施戦略問題(11)-(13)および最適評価時刻問題(3)-(4)の2つの部分問題により構成されている．最適実施戦略問題において，最適値関数 $\Phi(\hat{B})$ は積分方程式(11)の解として求まるが，通常の積分方程式と異なり，積分区間を定義する \bar{B}^* が未知数であり，また評価間隔 $\tau^*(\hat{B})$ も未知関数となっている．ひとまず \bar{B}^* および関数 $\tau^*(B)$ ($0 < B \leq \bar{B}^*$)の形式を与件として，最適実施戦略問題の解法を示す．

$$K_1(B, \hat{B}) = K(B, \hat{B}; \tau^*(\hat{B})) \quad (14a)$$

...

$$K_n(B, \hat{B}) = \int_0^{\bar{B}^*} K_{n-1}(\xi, \hat{B}) K(B, \xi) d\xi \quad (14b)$$

$$\Gamma(B, \hat{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(B, \hat{B}) \quad (14c)$$

を定義すれば，積分方程式(11)の解は，

$$\Phi^*(\hat{B}) = \Theta(\hat{B}) + \int_0^{\bar{B}^*} \Gamma(B, \hat{B}) \Theta(B) dB \quad (15)$$

と表される．積分区間 $(0, \bar{B}^*]$ が変化すれば最適値関数 $\Phi^*(\hat{B})$ の関数形が変化する．最適値関数は \bar{B}^* をパラメータとする汎関数となっており，それを陽的な関数形として表現することは不可能である．このことに留意すれば，最適実施戦略問題は

$$\Phi^*(\hat{B}) = \Theta(\hat{B}) + \int_0^{\bar{B}^*} \Gamma(B, \hat{B}) \Theta(B) dB \quad (16a)$$

$$\Phi^*(\bar{B}^*) = P(\bar{B}^*) \quad (16b)$$

を満足する境界値 \bar{B}^* を求める問題に帰着する．

これまで既知として扱った最適評価間隔関数 $\tau^*(B)$ は，最適実施戦略問題の解である最適値関数 $\Phi^*(B)$ を用いて解く必要がある．したがって，2つの部分問題は互いにもう一方の部分問題の解を与件として最適化を図る問題となっており，互いを反復的な計算により解く必要がある．

5. おわりに

本稿では，プロジェクト価値の部分的観測可能性を考慮したプロジェクトの最適評価・実施モデルを定式化した．また，本問題が積分方程式を含む最適実施戦略問題と最適評価時刻問題の2つの部分問題によって構成され，相互を反復的な計算により解く必要があることを示した．なお，紙面の都合により，解法の詳細ならびに数値計算結果に関しては講演時に発表させていただく．

参考文献

- 1) Copeland, T. and Antikarov, V. (2001): *Real Options*, Texere
- 2) たとえば, Maglin, S. A. (1963): *Approaches to Dynamic Investment Planning*, North Holland
- 3) たとえば, 上村 豊 (2001): 「積分方程式 - 逆問題の視点から - 」, 共立出版