確率的インパルス制御アプローチによる有料道路料金変更法*

A Stochastic Impulse Control Approach to Maximizing Toll Road Revenues *

棟方 章晴†, 大嶋 孝史†, 赤松 隆‡

By Akiharu MUNEKATA†, Takashi OSHIMA†, Takashi AKAMATSU‡

1　はじめに

現在, 東京湾アクアライン, 本四連絡橋など, 日本の有料道路の定常的な赤字が深刻な問題となっている. この赤字の原因は, 基本的には, 当該道路の膨大な建設コストとそれに比してあまりに低い交通需要にある. そして, さらに悪いことに, 膨大な建設コストの回収をめざして設定された高額な通行料金が交通需要を抑制してしまうという悪循環に陥っている. このような状況下では, 交通需要増加をめざした料金変更は, 施設を最も有効に活用すべきとの観点からは, 十分な検討に値するオプションである.

このような問題意識のもと, 本研究では, 交通量に応じて料金を変更し (eg. 交通量が過小な状態が続けば料金を下げる), それによって交通需要と料金収入を適切なレベルに制御する方法のプロトタイプを提案する. このような料金変更の考え方自体は, 従来から漠然とは議論されてきたものである. しかし, 交通量の動学的な不確実性を考慮した上で, どのように料金を変更すべきかを理論的に検討した例は, 著者らの知る限り, 皆無である. それに対して, 本研究では, 交通需要の動学的な不確実性を確率過程として明示的にモデル化する. そして, その交通需要の観測情報に基づき, 期待利潤 (あるいは経済便益) を最大化するように料金を変更してゆくフィードバック制御則を導く.

本論文の構成は, 以下の通りである：まず, 第 2 節で上述の問題を確率的インパルス制御問題として定式化し, 第 3 節で, その最適制御条件を導出する. そして第 4 節では, その最適条件が標準形の線形相補性問題 (LCP: Linear Complementarity Problem) として表現できることを明らかにする. さらに, この結果を活用すれば, 本研究で定式化された) 従来, 必ずしも良い一般的解法が存在しなかった) 確率的インパルス制御問題が極めて効率的に解けることを示す. 最後に, 第 5 節で, モデルおよび解法の拡張を議論する.

*キーワーズ：交通需要, 道路料金, 確率的制御, 相補性問題, メリット関数

†学生員, 東北大学大学院情報科学研究科

‡正会員, 工博, 東北大学大学院情報科学研究科

2　状況設定とモデルの定式化

(1)　状況設定

本研究では, ある単一の有料道路区間における料金更新ルールを考える. 当該道路の単位時間あたり利用者数 (交通量)q は, 日々, 確率的に変動する (その変動ダイナミクスのモデルは, 続く (2) で与えられる). 道路管理者は, 利用者から料金を徴収し収入を得る. 料金徴収期間は, 現在から無限に渡る将来である (有限期間の場合については第 5 節参照). 道路管理者は, 2 つの料金レベル (e.g. 高額料金 $(i=1)$ or 低額料金 $(i=2)$) の一方から他方へ任意の時点で変更できる. 以下では, 料金レベル i における料金を p_i(定数), 料金徴収に要する単位時間当たりの費用を c_i(定数) と書く. また, 料金レベルを i から j へ変更するためには, 固定費用 I_i(定数) を要する. このような状況下, 道路管理者は, 観測交通量情報に基づき, 料金レベルの変更時点 $\{\theta_k\}(k=1,2,\cdots)$ を制御し, 期待利潤の最大化をはかる.

(2)　モデルの定式化

料金レベル i における交通量 q は, 以下の確率微分方程式で表されるとする:

$$dq = \mu_i(p_i,q)dt + \sigma(q)dz \quad (i=1,2) \tag{1}$$

ここで, $\mu_i(p_i,q)$ は交通量の確定的変化率 (ドリフト) であり, 時点 t での料金と交通量の関数である. dz は標準 Wiener 過程であり, 交通量の不確実な変動を表す.$\sigma(q)$ は交通量の標準偏差 (ボラティリティ) を意味し, (時点 t での) 交通量の関数である. このモデルでは, ドリフトが料金の関数であるため, 交通量 q の変動パターンは, 料金レベル i によって異なることに注意しよう.

式 (1) は, 応用研究においてしばしば用いられる幾何 Brown 運動や平均回帰過程等を含む一般的な確率過程モデルである. 例えば, 幾何 Brown 運動は, $\mu_i(p_i,q)=\mu_i q$, $\sigma(q)=\sigma q$ (μ_i,σ_i は料金レベル i における平均及び分散パラメータ (定数)), であり, 平均回帰過程は, $\mu_i(p_i,q)=\mu_i(m_i-q)$, $\sigma(q)=\sigma$ (m_i は料金レベル i における平均交通需要レベルを表す定数) とおいたケースに相

当する．本研究では, これらを特殊ケースとして含む一般的なモデルを解析の対象とする．

以上の状況設定下, 期待利潤:

$$J \equiv E_0\left[\sum_{j=1,2}\left\{\int_0^\infty \delta_j(u)(p_j q(u) - c_j)e^{-\rho u}du - \sum_{k\geq 0}^{\infty}\delta_j(t)I_j e^{-\rho\theta_k}\right\}\right] \quad (2)$$

を最大化するような料金変更ルール $\{\theta_k\}$ を決定する．すなわち, 本稿で議論する問題は, 以下の確率的インパルス制御問題 [P-0]

$$\max_{\{\theta_k\}}.\ J \quad \text{subject to Eq.(1)} \quad (3)$$

として定式化される．ここで, ρ は割引率, $\delta_i(t)$ は時刻 t において料金レベル i であれば 1, そうでなければ 0 と定義されたクロネッカー･デルタである．なお, 本稿で示す解析法は, 制御の目的関数を道路管理者の期待利潤とした場合に限定されるものではない．例えば, 交通量 q の関数でさえあれば, 何らかの社会的便益指標を目的関数としても, 本稿で示す方法自体は本質的に変わらない．しかし, 動学的不確実性下での社会的便益の評価に関しては, 確立した指標があるとは言い難いため, 以下では期待利潤を目的関数として議論をすすめる．

3　理論解析

(1)　最適値関数が満たすべき条件

前節で定式化された確率的インパルス制御問題 [P-0] の最適制御状態で成立すべき条件である Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式を導出しよう．そのために, まず, 最適値関数 $V_i(q(t))$ を

$$V_i(q(t)) \equiv \max_{\theta_k}.E_t\left[\sum_{j=1,2}\left\{\int_t^\infty \delta_j(u)(p_j q(u) - c_j) e^{-\rho(u-t)}du - \sum_{k\geq k'}^{\infty}\delta_j(t)I_j e^{-\rho(\theta_k - t)}\right\}\right] \quad (4)$$

と定義する．ここで k' は時刻 t までの料金レベル変更回数である．

ここで, 我々の問題の構造に着目すると, 各時刻 t における制御は, 料金を変更するか否かという離散的な選択のみである．このことから, 時刻 t において各々の選択がなされる場合について, 最適値関数が満たすべき条件が明らかとなる．以下では, 料金レベルを変更する場合, 料金レベルを据え置く場合について, 最適値関数が満たすべき条件を述べる．

1. **料金レベルを変更する場合** 最適値関数 $V_i(q(t))$ の定義により,

$$V_i(q(t)) \geq V_j(q(t)) - I_i \quad (i=1,2, i\neq j) \quad (5)$$

が成立する．

2. **料金レベルを据え置く場合** 最適値関数 $V_i(q(t))$ の定義及び DP 原理により,

$$V_i(q(t)) \geq \int_t^{t+dt}(p_i q(u) - c_i)e^{-\rho(u-t)}du + e^{-\rho dt}E[V_i(q(t)+dq)|q(t)] \quad (i=1,2) \quad (6)$$

が成立する．これは, 伊藤の補題を用いれば,

$$-L_i V_i - p_i q(t) + c_i \geq 0 \ \ (i=1,2) \quad (7)$$

に帰着する．ここで L_i は,

$$L_i \equiv \frac{1}{2}\sigma^2(q)\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \mu(p_i, q)\frac{\partial}{\partial q} - \rho \quad (8)$$

と定義される微分演算子である．

上述した 2 つの場合のどちらかが, 各時刻において選択される．従って, 各時刻においては不等式 (5), (7) のどちらかが, 必ず等式で成立する．従って,

$$\begin{cases}[V_i - (V_j - I_i)][-L_i V_i - p_i q(t) - c_i] = 0 \\ V_i - (V_j - I_i) \geq 0, -L_i V_i - p_i q(t) - c_i \geq 0\end{cases} \quad (i=1,2) \quad (9)$$

が成立する． これは, 時刻 t において $i = 1, 2$ のどちらにあっても成立しなければならない．よって, 最適値関数 V_1, V_2 が満すべき条件は

$$\begin{cases}\min.[V_1 - (V_2 - I_1), -L_1 V_1 - p_1 q(t) + c_1] = 0 \\ \min.[V_2 - (V_1 - I_2), -L_2 V_2 - p_2 q(t) + c_2] = 0\end{cases} \quad (10)$$

となる．

(2)　自由境界型微分方程式問題としての表現

最適条件式 (10) は, Dirichlet 条件と Neumann 条件つき微分方程式からなる自由境界問題として表現できることが知られている[2),3)]．このアプローチでは, まず, 料金レベルを 1 から 2, 及び 2 から 1 へ変更すべき最適閾値交通量 $q^{(1)}, q^{(2)}$ が存在すると仮定する．そして, 仮に, これらの閾値を既知とすれば, 式 (10) は, 境界条件：

$$\begin{cases}V_1(q^{(1)}) = V_2(q^{(1)}) - I_1 \\ V_2(q^{(2)}) = V_1(q^{(2)}) - I_2\end{cases} \quad (11)$$

の元での連立微分方程式問題に帰着する．さらに，未知の閾値交通量 $q^{(i)}$ を決定 (最適性を保証) するための "smooth pasting 条件"：

$$\begin{cases} V_1'(q^{(1)}) = V_2'(q^{(1)}) \\ V_2'(q^{(2)}) = V_1'(q^{(2)}) \end{cases} \tag{12}$$

を追加すれば，自由境界型微分方程式問題に帰着する．

この様な，閾値交通量を明示的な未知変数としたアプローチは，微分方程式の一般解が解析的に求められる特殊な問題には有効である．しかし，本研究で対象とする問題は，このアプローチでは解けない．まず，問題 [P-0] では，交通量の従う確率過程 (1) が一般的なため，演算子 (8) に対応する微分方程式の解析解は存在しない．また，仮に式 (1) に特殊な仮定を置ける場合でも，有限満期問題 (第 5 節参照) では，解析解を求める事が不可能である．そこで次節では，最適制御条件式 (10) を直接的に用いた新たな解法を開発する．

4　アルゴリズム

本節では，まず，最適制御条件式 (10) が標準形の LCP として表現できることを明らかにする．そして，その結果を活用すれば，確率制御問題 [P-0] は，最近の数理計画理論に基づくアルゴリズムによって，効率的に解けることを示す．

(1)　問題の離散化表現

本研究では，一般性のある数値解法を開発するために，解くべき問題を有限次元 LCP に帰着させたい．その準備として，状態変数である交通量 q を離散表現し，それに対応する (最適値関数，微分演算子等も離散表現した時の) 最適制御条件を導出する．

まず，交通量 $q(t)$ を $\boldsymbol{q} \in \mathcal{R}^N$ ：

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta q & 2\Delta q & \cdots & N\Delta q \end{bmatrix}^{\top} \tag{13}$$

と離散表現する．これに対応して，最適値関数 V_iを$\hat{\boldsymbol{V}}_i \in \mathcal{R}^N$，微分演算子 $-L_i$を$\boldsymbol{D}_i \in \mathcal{R}^N \times \mathcal{R}^N$ と離散表現する:

$$\hat{\boldsymbol{V}}_i = \begin{bmatrix} \hat{V}_i(0) \\ \hat{V}_i(\Delta q) \\ \hat{V}_i(2\Delta q) \\ \vdots \\ \hat{V}_i(N\Delta q) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_i = \begin{bmatrix} b & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a & b \end{bmatrix} \tag{14}$$

ここで，$a = -\sigma^2(q)/2(\Delta q)^2 - \mu_i/\Delta q,\ \ b = \sigma^2(q)/(\Delta q)^2 + \rho,\ \ c = -\sigma^2(q)/2(\Delta q)^2 + \mu_i/\Delta q$ である．これらの離散化により，最適制御条件 (9) は，

$$\begin{cases} [\hat{\boldsymbol{V}}_i - (\hat{\boldsymbol{V}}_j - I_i\mathbf{1})][-\boldsymbol{D}_i\hat{\boldsymbol{V}}_i - p_i\boldsymbol{q} - c_i\mathbf{1}] = 0 \\ \hat{\boldsymbol{V}}_i - (\hat{\boldsymbol{V}}_j - I_i\mathbf{1}) \geq \mathbf{0}, -\boldsymbol{D}_i\hat{\boldsymbol{V}}_i - p_i\boldsymbol{q} - c_i\mathbf{1} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$
$$(i = 1, 2) \tag{15}$$

と表現される．

(2)　標準形の線形相補性問題としての表現

式 (15) は，そのままでは，必ずしも扱いやすい問題ではない．しかし，これは，以下の変数変換:

$$\boldsymbol{x}_i \equiv \boldsymbol{D}_i\hat{\boldsymbol{V}}_i - p_i\boldsymbol{q} + c_i\mathbf{1} \tag{16}$$
$$F_i \equiv \hat{\boldsymbol{V}}_i - (\hat{\boldsymbol{V}}_j - I_i\mathbf{1}) \tag{17}$$

により，標準形の LCP に変換可能である．以下ではこれを示そう．まず，式 (16) より，

$$\hat{\boldsymbol{V}}_i = \boldsymbol{D}_i^{-1}[\boldsymbol{x}_i + p_i\boldsymbol{q} - c_i\mathbf{1}] \tag{18}$$

である．ここで，$\boldsymbol{D}_i^{-1}$ は，連続状態モデルにおける Green 作用素に相当する．これを式 (17) に代入すれば，

$$F_i = \boldsymbol{D}_i^{-1}[\boldsymbol{x}_i + p_i\boldsymbol{q} - c_i\mathbf{1}] - \boldsymbol{D}_j^{-1}[\boldsymbol{x}_j + p_j\boldsymbol{q} - c_j\mathbf{1}] + I_i\mathbf{1} \tag{19}$$

を得る．これを各料金レベル 1, 2 について書き下せば，F_i は，変数 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2]^{\top}$ の明示的な関数 $F_i(\boldsymbol{x})$ として，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x}) \\ F_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1^{-1} & -\boldsymbol{D}_2^{-1} \\ -\boldsymbol{D}_1^{-1} & \boldsymbol{D}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

where

$$K_1 = \boldsymbol{D}_1^{-1}[p_1\boldsymbol{q} - c_1\mathbf{1}] - \boldsymbol{D}_2^{-1}[p_2\boldsymbol{q} - c_2\mathbf{1}] + I_1\mathbf{1} \tag{21}$$
$$K_2 = -\boldsymbol{D}_1^{-1}[p_1\boldsymbol{q} - c_1\mathbf{1}] + \boldsymbol{D}_2^{-1}[p_2\boldsymbol{q} - c_2\mathbf{1}] + I_2\mathbf{1} \tag{22}$$

と表現される．よって，条件式 (15) は，式 (20) で定義される写像 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ をもつ標準形の LCP:

Find $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_+^N$ *such that*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq 0 \end{cases} \tag{23}$$

に帰着することが示された．

(3)　Merit 関数法によるアルゴリズム

上で得られた標準形の LCP は，数理計画法の分野で開発された様々なアルゴリズムによって解くことができる．

以下では, 最近の数理計画理論の進展にともなって現れた "Merit 関数アプローチ" による解法を議論する. このアプローチは, LCP に対する古典的な解法である対角化法, 射影法, Lemke 法などに比べると, 一般に, 緩い条件下での収束が保証され, かつ, 効率的である.

Merit 関数アプローチとは, 元の LCP を Merit 関数と呼ばれる関数の最小化問題へと帰着させ, その最小化問題を解くものである. この時, Merit 関数 $G(\boldsymbol{x})$ は, $G(\boldsymbol{x})$ の大域的最小点の集合と, 元の LCP の解集合が一致することが保証された連続微分可能関数である. すなわち, 元の LCP の解 $\boldsymbol{x}^*$ が, また, 最小化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} .\ G(\boldsymbol{x}) \tag{24}$$

の解 $\boldsymbol{x}^*$ であり, $G(\boldsymbol{x}^*) = 0$ が成立する. この様な性質が保証された Merit 関数として, 従来, いくつかの関数形が提案されている. 本研究では, 以下に示す Merit 関数[1]を採用する:

$$G(\boldsymbol{x}) = -F(\boldsymbol{x}) \cdot (H(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}(H(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) \cdot (H(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x})) \tag{25}$$

ここで,

$$H(\boldsymbol{x}) \equiv [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]_+ \tag{26}$$

であり, また, $[\cdot]_+$ はベクトルの各要素 z に対して, $[z]_+ = \max[z, 0]$ とする演算子である. この Merit 関数を用いて LCP を解く最も単純なアルゴリズムは以下のようにまとめられる:

Step 0 初期可能解 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ の設定を行なう; $n := 1$ とする.

Step 1 Merit 関数 $G(\boldsymbol{x})$ の降下方向ベクトル $\boldsymbol{d}^{(n)}$ を $\boldsymbol{d}^{(n)} = H(\boldsymbol{x}^{(n)}) - \boldsymbol{x}^{(n)}$ とする.

Step 2 ステップサイズ α を, 以下の問題を解く事により求める:

$$\min_{\alpha} G(\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(n)}), \quad \text{s.t.}\ \ 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{27}$$

Step 3 解の改訂を行なう: $\boldsymbol{x}^{(n+1)} := \boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(n)}$

Step 4 収束判定: 収束していれば停止, そうでなければ $n := n + 1$ として, **Step 1** へ戻る.

このアプローチでは, 写像 $F(\boldsymbol{x})$ の評価を効率的に行なえるか否かが, アルゴリズム全体の効率性を左右する. 我々の解きたい LCP では, 写像 $F(\boldsymbol{x})$ は, 逆行列 $\boldsymbol{D}_i^{-1}$ を含んだ式 (20) により定義されている. 従って, $\boldsymbol{D}_i^{-1}$ を直接的に計算する素朴な方法では, N^2 オーダーの計算量を必要とする. しかし, 式 (14) の構造を活用すれば, 写像 $F(\boldsymbol{x})$ の評価は, 常微分方程式を解くこととほぼ同型の問題に帰着させることができる. すなわち, 我々の LCP では, N のオーダーというわずかな計算量で $F(\boldsymbol{x})$ を評価でき, Merit 関数を用いた上記アルゴリズムは, 極めて効率的なアプローチとなる.

5 有限満期問題への拡張

本節では, ここまでで議論した問題の拡張として, 料金徴収可能期間を $[0, T](T < \infty)$ とした有限満期問題について考察する. この有限満期問題の目的関数 $\tilde{J}(q(t), t)$ では, (無限満期問題と比べると) その積分範囲が料金徴収可能期間 $[0, T]$ に変わる. それに伴い, 最適値関数 $\tilde{V}_i(q(t), t)$ は, $q(t)$ のみならず, 時点 t にも依存した関数となる.

この場合, 無限満期問題の場合とほぼ同様にして, 最適制御条件式：

$$\begin{cases} \min.\left[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_2 - I_1), -\tilde{L}_1\tilde{V}_1 - p_1 q(t) + c_1\right] = 0 \\ \min.\left[\tilde{V}_2 - (\tilde{V}_1 - I_2), -\tilde{L}_2\tilde{V}_2 - p_2 q(t) + c_2\right] = 0 \end{cases} \tag{28}$$

を得る. ここで, $\tilde{L}_i$ は, 以下の様に定義された (t に関する偏微分を含む) 微分演算子である:

$$\tilde{L}_i \equiv \frac{1}{2}\sigma^2(q(t))\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \mu(p_i, q(t))\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t} - \rho. \tag{29}$$

無限満期問題の場合と同様に, 状態空間の離散化を行なえば, 式 (28) は, 以下の (有限次元) 相補性問題に帰着する：

$$\begin{aligned} \min.[-\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{V}_i^t - \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{V}_i^{t+1} - \boldsymbol{V}_i^t) - p_i\boldsymbol{q} - c_i\boldsymbol{1}, \\ \boldsymbol{V}_i^t - (\boldsymbol{V}_j^t - I_i\boldsymbol{1})] = 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{30}$$

ここで, $\boldsymbol{V}_i^t = [\tilde{V}_i(0, t)\ \tilde{V}_i(\Delta q, t)\ \cdots\ \tilde{V}_i(N\Delta q, t)]$.

式 (30) は, 仮に $\boldsymbol{V}_i^{t+1}$ を既知とすれば, 時点 t の $\boldsymbol{V}_i^t$ のみを未知変数とする問題である. 一方, 最適値関数 $\tilde{V}_i(q(t), t)$ の定義より, 満期 T では,

$$\boldsymbol{V}_i^T = \boldsymbol{0} \quad (i = 1, 2) \tag{31}$$

である. 従って, 時点 $t = 0$ から $t = T$ で定義された一群の問題 (30) は, 時点 T から 0 へと後ろ向きに考えれば, 各時点 t ごとに逐次的に解くことができる. その時点ごとに分解された問題は, 無限満期問題と同様, 標準形の LCP に変換可能であり, 4 (3) 節に示したアルゴリズムを用いれば, 容易に数値解が求められる.

参考文献

[1] M.Fukushima, "Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems," Mathematical Programming **53**, pp.99-110, 1992.

[2] J.M.Harrison, T.M.Sellke, and A.J.Taylor, "Impulse Control of Brownian Motion," Mathematics of Operations Research **8**, pp.454-466, 1983.

[3] A.Sulem, "Quasi-Variational Inequalities and Impulse Control Problems," in *Optimal pricing, inflation and the cost of price adjustment*(eds. E.Sheshinski and Y.Weiss), pp.57-95, 1993.