旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡：二項分布とポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡モデル

A Stochastic Network Equilibrium Model Considering Travel Time Uncertainty

中山晶一朗[1], 高山純一[2], 笠島崇弘[3]

Shoichiro Nakayama, Jun-ichi Takayama, Takahiro Kasajima

1. はじめに

交通ネットワーク均衡としては，従来からワードロップ均衡[1)]や確率的利用者均衡[2)3)]が知られている．確率的利用者均衡はランダム効用理論に基づいた経路選択による交通ネットワーク均衡であるが，その確率的利用者均衡という名称に反し，確定的な交通量および旅行時間を求めるものであり，交通量や旅行時間を陽には確率的に取り扱ってはいない．ただ，経路選択の際，単に最小旅行時間の経路を選択するのではなく，ランダム効用理論に基づいて「確定的」に配分する．つまり，ランダム効用理論から算出される選択確率の割合（選択比）に従って交通量を（確定的に）配分している．また，確率的利用者均衡では，経路選択の際のランダム項は経路の長さにかかわらずその分散は変化しないため，それが旅行時間の不確実性を表していると解釈することには，理論上の問題が生じる．そのランダム項は，人間の知覚誤差（もしくは観測不能な要因など）と解釈されるべきものであろう．このように確率的利用者均衡では，旅行時間の不確実性を考慮した交通量配分を行うものではないと言える．

そこで，本研究では，交通量や旅行時間を確率変数として扱い，旅行時間の不確実性を考慮できる，つまり，交通量や旅行時間を確率分布として取り扱う交通ネットワーク均衡を提案する．

Key Words: 交通ネットワーク均衡, 旅行時間の不確実性

1 正会員，博（工），金沢大学工学部
〒920-8667 金沢市小立野 2-40-20
Tel: 076-234-4614, Fax: 076-234-4632
2 正会員，工博，金沢大学工学部
3 福井県庁

2. 基本概念

ワードロップ均衡の基本的な考え方は，利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しいというものである．交通量や旅行時間を確率変数と考えた時，このワードロップ均衡の基本的な考え方を適用し，利用される経路の「期待旅行時間」は皆等しく，利用されない経路の「期待旅行時間」よりも小さいかせいぜい等しい，という均衡を考えることは極めて自然なことである．これが本均衡モデルの基本的な考え方である．この時，期待旅行時間の代わりに効用の期待値や一般化費用の期待値を用いることも当然可能となる．

本研究では，道路利用者は確率的に経路を選択すると仮定する．この時，N^r 人が存在する OD ペア r ($\in U$)の利用者が経路 k ($\in K$)を確率 p_k で選択すると，経路 k のその OD ペア r に関する経路交通量は二項分布 Bin(N^r, p_k)に従う（経路全てのうちどの経路を選択するのかで見た場合は多項分布に従う）．このように経路交通量が確率変数であるため，経路旅行時間も当然確率変数となる．ただし，ここでは同一 OD ペアの全員が同じ確率で経路を選択すると仮定する．本稿では厳密には示さないが，もし異なる確率で経路を選択するものがいれば，どちらかの期待旅行時間の方が小さくなるはずであり，期待旅行時間が等しいと仮定した上で示した本モデルの基本概念に反することになる．

上で示したようなある確率で行動を選択する（経路を選択する）ことはゲーム理論ではミックス戦略

と呼ばれている．一方，確定的に決定することは純粋戦略と呼ばれる．ゲーム理論の観点からは，ワードロップ均衡は（純粋戦略）ナッシュ均衡であるのに対し，本均衡モデルは混合戦略ナッシュ均衡となる．

3. 定式化

前節で述べたように経路選択を確率的に行うとき，実現される交通ネットワークの状態は以下のように表現できる．

$$\mathrm{E}[T_k^r] = \lambda^r \quad \text{if } p_k^r > 0 \quad \forall k\in K^r\ \forall r\in U \qquad (1)$$
$$\mathrm{E}[T_k^r] \geq \lambda^r \quad \text{if } p_k^r = 0 \quad \forall k\in K^r\ \forall r\in U \qquad (2)$$

ここで，E[·]は期待値であり，T_k^r は OD ペア r の経路 k の旅行時間（確率変数），λ^r は OD ペア r の最短の期待旅行時間である．

上式は相補性問題，変分不等式問題，不動点問題として定式化できる．変分不等式問題としての定式化は以下の通りである．

$$\text{Determine } \mathbf{X}^* = (\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in \Omega$$
$$\text{Such that } \mathbf{F}[\mathbf{X}^*]\cdot(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \qquad (3)$$

ここで，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ はベクトルの内積を表し，$\mathbf{F}[\mathbf{X}] = (\mathbf{E}[\mathbf{T}(\mathbf{p})] - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} - \mathbf{I})$，$\mathbf{E}[\mathbf{T}]$は経路の期待旅行時間ベクトル，$\mathbf{p}$ は経路選択確率のベクトル，$\boldsymbol{\lambda}$は経路の最短期待旅行時間のベクトル，$\mathbf{I}$ は単位ベクトルである．

4. 期待旅行時間の算出

経路交通量は既に述べたように二項分布に従うが，それはある一つの OD ペアの需要（利用者）に関しての経路交通量であり，一つの OD ペアでのリンク交通量も二項分布に従う．一般には OD ペアは複数あり，この場合のリンク交通量は二項分布に従う独立な確率変数の和となる．リンク旅行時間の期待値は次式のように計算することが可能である．

$$E[T_a] = \sum_{x_a^1=0}^{N^1}\cdots\sum_{x_a^r=0}^{N^r}\cdots\sum_{x_a^R=0}^{N^R} t_a\left(\sum_{r=1}^{R} x_a^r\right)\cdot\prod_{r=1}^{R}\Pr[x_a^r] \qquad (4)$$

ここで，T_a はリンク a のリンク旅行時間（確率変数），$\Pr[x_a^r] = {}_{N^r}C_{x_a^r}(p_a^r)^{x_a^r}\cdot(1-p_a^r)^{N^r - x_a^r}$ はリンク a を走行する OD ペア r の交通量が x_a^r である確率，$p_a^r = \sum_k \delta_{a,k}\cdot p_k^r$（リンク a を通る経路の選択確率の和），$\delta_{a,k}$はリンクaが経路kに含まれている場合は 1 をとり，含まれていない場合は 0 になる変数，r = 1, 2,…, $R(\in U)$である．

式(4)をそのまま計算すると計算量が膨大になるが，積率母関数を用いると，計算量が大幅に減少させることができる．リンク走行時間が BPR 関数とすると，リンクの旅行時間 t は$\alpha + \beta x^n$ で表される．したがって，期待リンク旅行時間を計算するためには $\mathrm{E}[X^n]$が計算できれば良い．リンク交通量（の確率変数）X_a は経路交通量（の確率変数）F_k^r の和である．つまり，$X_a = \sum_r \sum_k \delta_{a,k}\cdot F_k^r$ である．F_k^r は既に述べたように二項分布に従う．F_k^r の積率母関数を $M_k^r(s) = (p_k^r\cdot e^s + 1 - p_k^r)^{N^r}$ とし，積率母関数の性質を使うと，独立な確率変数の和である X_a の積率母関数 M_a(s)は以下の通りとなる．

$$M_a(\mathrm{s}) = \prod_r M^r(s) \qquad (5)$$

また，$\mathrm{E}[(X_a)^n]$は $\frac{d^n M_a(s)}{d\mathrm{s}^n}\Big|_{s=0}$ となるため，BPR 関数の場合，リンク旅行時間の期待値は以下の式となる．

$$E[T_a] = \alpha + \beta\cdot\left.\frac{d^n M_a(s)}{ds^n}\right|_{s=0} \qquad (6)$$

経路旅行時間の期待値 $\mathrm{E}[T_k^r] = \sum_a \delta_{a,k}\cdot\mathrm{E}[T_a]$となる．

リンク旅行時間の分散 $\mathrm{Var}[T_a]$は $\mathrm{E}[(T_a)^2] - \mathrm{E}[T_a]^2$ であり，$\mathrm{E}[(X_a)^{2n}]$，$\mathrm{E}[(X_a)^n]$を用いれば計算

することができる．また，経路旅行時間の分散 $\mathrm{Var}[T_k^r]$も以下の式のように計算できる．

$$\mathrm{Var}[T_k^r] = \sum_a \delta_{a,k} \cdot \mathrm{Var}[T_a] + \sum_a \sum_{a',\, a \neq a'} \delta_{a,k} \cdot \delta_{a',k} \cdot \mathrm{Cov}[T_a, T_{a'}] \tag{7}$$

ここで，$\mathrm{Cov}[\cdot,\cdot]$は共分散である．

リンク交通量の共分散を求めるために，図1のようにリンク a とリンク a' を通る交通量を分解する．リンク a とリンク a' の両方を通る交通量を $x_{a,a'}$ とし，リンク a は通るが，リンク a' は通らない交通量を $y_{a,a'}$ とし，逆にリンク a' は通るが，リンク a は通らない交通量を $z_{a,a'}$ としている．

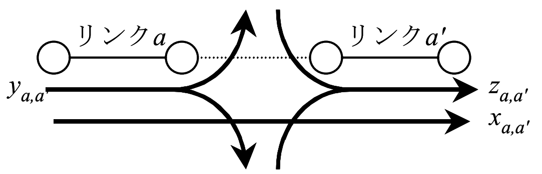

図1 共分散の説明

この時，リンク a とリンク a' の旅行時間の共分散は以下の式の通りとなる．ただし，x, y, z の添え字は省略した．

$$Cov[T_a, T_{a'}] = \sum_x \sum_y \sum_z t_a(x+y)\, t_{a'}(x+z)\, \mathrm{Pr}(x,y,z) - \mathrm{E}[T_a] \cdot \mathrm{E}[T_{a'}] \tag{8}$$

ただし，$t_a(\cdot)$はリンクパフォーマンス関数（BPR 関数）である．$\mathrm{Pr}[x, y, z]$は多項分布（三項分布）から計算することができる．

5. ポアソン分布の適用

前節までに二項分布を用いた確率的ネットワーク均衡の定式化を行った．リンクの期待旅行時間は式(6)のように表され，一見単純そうである．しかし，式(5)で示したようにリンク交通量の積率母関数は各 OD ペアの経路交通量の積率母関数の積であり，二項分布の和は正規分布やポアソン分布のように二項分布とはならず，リンク交通量の積率母関数は複雑なものとなり，それにともなって計算量も増加することが予想される．

二項分布は選択確率が小さい場合，ポアソン分布で近似できることが知られており，本節では二項分布の代わりにポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡の定式化を行う．独立なポアソン変数の和はポアソン変数であり，二項分布のようにリンク交通量の積率母関数が複雑になることはなく，計算量を大幅に削減することができる．二項分布の代わりに正規分布を使うことも当然可能であるが，それに関しては別の機会に発表したい．

既に述べたように二項分布をポアソン分布で近似できるのはその選択確率が小さい場合である．交通ネットワークの規模が大きい場合は OD 間の経路数は大きくなり，一つの経路の選択確率は小さくなり，ポアソン分布を適用することが可能となると考えられる．また，前節までに数学的には交通量は二項分布に従うと説明したが，実際には交通量が二項分布に従っているかどうかは詳しく調査する必要があり，実際はポアソン分布に従っている可能性も否定することはできないと考えられる．

2 節で述べたように OD ペア r の交通需要が N^r であり，経路 k の選択確率が p_k である時，OD ペアの経路交通量は二項分布 $\mathrm{Bin}(N^r, p_k)$に従うため，経路交通量は平均が $N^r \cdot p_k$ のポアソン分布により近似可能である．ここで，経路 k の平均交通量（期待交通量）$N^r \cdot p_k$ を μ_k とおくと，$N^r = \sum_k \mu_k$ であり，リンク a の平均交通量 μ_a は $\sum_k \delta_{a,k} \cdot \mu_k$ である．独立なポアソン変数の和はポアソン変数になるため，リンク a の交通量の積率母関数は平均が μ_a のポアソン分布の積率母関数（$\exp[-\mu_a\{1-\exp(s)\}]$）となり，その期待旅行時間 $\mathrm{E}[T_a]$は μ_a（のみ）の関数 $g(\mu_a)$となる．よって，Wardrop 均衡での交通量が平均交通量，旅行時間が期待旅行時間，BPR 関数などのリンクパフォーマンス関数が $g_a(\mu_a)$に置き換わったものと考えることができる．よって，ポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡は Wardrop 均衡と同様に以下のように定式化できる．

$$\min . Z = \sum_a \int_0^{\mu_a} g_a(w)\,dw \tag{9}$$

subject to

$$N^r = \Sigma_k \mu_k \qquad \forall k\in K^r\ \forall r\in U \qquad (10)$$

$$\mu_a = \Sigma_k \delta_{a,k}\cdot\mu_k \qquad \forall k\in K^r\ \forall a\in A \qquad (11)$$

$$\mu_a \geq 0,\ \mu_k \geq 0 \qquad \forall k\in K^r\ \forall a\in A \qquad (12)$$

このようにポアソン分布を用いた確率ネットワーク均衡はWardrop均衡と同様の最適化問題として定式化することができ，Frank-Wolf 法などの通常のアルゴリズムによって計算することができる．

6. リスク態度

道路利用者は単に旅行時間のみならず，その不確実性も考慮して経路を選択していると考えられる．前節までは，期待旅行時間により定式化を行ってきたが，これを効用に置き換えることで，利用者の旅行時間の不確実性への態度（リスク態度）を考慮することができる．本研究では，経路 k の効用 V_kを$(E[T_k] + \gamma\cdot Var[T_k])$とする．この時，リスク態度 γ が大きいほどリスク回避であり，小さいほどリスク選好である．

7. 数値計算

1OD2 リンクの単純なネットワークに上述の確率ネットワーク均衡を適用した．リンクパフォーマンス関数にはBPR関数（$\alpha = 0.15, \beta = 4$）を用い，リンク 1 の自由走行時間は 10 分，交通容量は 1000 台，リンク2の自由走行時間は20分，交通容量は 2000 台とした．

図 2 および図 3 はそれぞれリスク態度 γ を変化させた場合の二項分布の確率ネットワーク均衡の期待旅行時間およびポアソン分布の期待旅行時間である．図2，3から両均衡モデルともリスク回避の傾向が大きくなるほど，リンク 1 の選択する利用者が減少するが，二項分布のモデルとポアソン分布のモデルではリスク態度の変化に対する期待旅行時間の変化の度合いが異なっていることが分かる．

8. おわりに

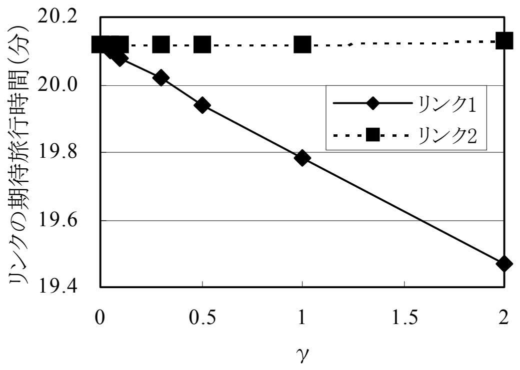

図 2 二項分布による均衡の期待旅行時間

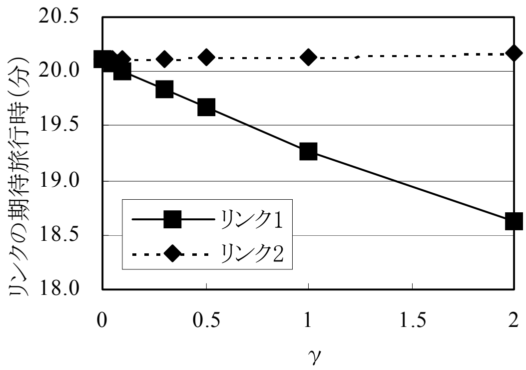

図 3 ポアソン分布による均衡の期待旅行時間

本研究では，交通量および旅行時間を確率変数とした，旅行時間の不確実性を考慮する交通ネットワーク均衡を提案した．提案したモデルは二項分布を用いた均衡モデルとその近似であるポアソン分布を用いた均衡モデルである．これらのモデルにより旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワークの均衡分析が可能となった．今後の課題としては，正規分布による確率ネットワーク均衡モデルの構築，交通需要の不確実性も考慮できるようにモデルを拡張することなどが挙げられる．

参考文献

1) Wardrop J. G. (1952) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *Proceedings the Institution of Civil Engineers Part II*, pp.325-378.
2) Daganzo, C. F. and Y. Sheffi (1977) On Stochastic Model of Traffic Assignment, *Transportation Science*, Vol. 11, pp. 253-274.
3) Fisk, C. (1980) Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment, *Transportation Research*, vol. 14B, pp.243-255.