

動学的不確実性下でのプロジェクト価格評価: 逆問題アプローチ*

*The Valuation of Projects with Stochastic Cash Flow Streams: An Inverse Problem Approach **

長江 剛志[†], 赤松 隆[‡]

By Takeshi Nagae[†], Takashi AKAMATSU[‡]

1 はじめに

道路事業や都市開発事業などのプロジェクトから得られる cash flow や便益は、経済、自然、技術環境といった要因によって時々刻々変動する。このような不確実性を持つ cash flow を評価する方法として、例えば、ENPV(Expected Net Present Value) 法などが利用されてきた。しかし、事業から発生する cash flow の多くは、経済活動と何らかの相関 (i.e., 高速道路の料金収入と景気指数) を持つ。従来、金融 option 理論において、これらの経済活動がもたらすリスクの価格が資産市場情報から求められることが知られている。ENPV 法は、このリスクの市場価格を考慮しないため、経済活動と相関を持つ cash flow の評価には適さない。

一方、事業そのものを資産 (option) と見なし、金融 option 理論を適用する方法も提案されている。この方法では、cash flow の変動が、市場で取引される経済的要因のみに依存する“完備市場”を仮定し、リスクの市場価格を用いて事業価格を評価する。しかし、一般に、事業から発生する cash flow の変動は経済的要因だけではなく、市場で取引されない固有の要因にも依存する。完備市場を仮定することは、これらの固有リスクの価値を無視することに等しい。従って、事業価格の評価に、完備市場における金融 option 理論をそのまま適用するのは望ましくない。

本来、これらの事業評価は、“不完備市場”における option 評価問題¹⁾として位置付けられる。完備市場においては、金融 option 理論の基礎となる無裁定条件のみからリスクの市場価格が一意に求められる。しかし、不完備市場においては、無裁定条件を与えるだけではリスクの市場価格が不定である。そこで、本研究では、リスクの市場価格を考慮しつつ、解の不定性を排除し、現実に適用可能なプロジェクト価格評価手法を提案する。また、この手法に対する効率的解法を示す。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2期モデルを用いて提案手法の基本的な考え方を説明する：第2節で従来の option 評価問題が逆問題として定式化される事を示し、第3節でこの問題を正則化する手法を提案する。次に、第4節では連続時間-状態モデルに対する提案手法を示す。最後に、第5節で、提案手法とその解法を具体例を用いて示し、従来の手法との関係を明示する。

2 従来手法—無裁定価格³⁾⁴⁾

期首 ($t = 0$) と期末 ($t = T$) の2期を考える。期末で取り得る状態集合を K (要素数 K) とする。各状態が生起する客観確率を $P \equiv [P(1) \cdots P(K)]$ で表す。事業から期末に得られる payoff を状態ごとに変化する確率変数 $F \equiv [F(1) \cdots F(K)]$ で表す。このとき、事業は、市場で取引されていない資産 (option) の一つと見なして良い。

N 種類の資産が取引される市場を考える。一般性を損なうことなく、1番目の資産を安全資産 (割引債) とし、残りを危険資産 (株式) とする。安全資産の期首および期末価格を、それぞれ、 $1, R (> 1)$ とする (R は所与の定数)。危険資産の期首価格を $s \equiv [s_1 \cdots s_N]'$ とし、期末価格を割引債の価格 R で割った割引価格を $S(k) \equiv [S_1(k) \cdots S_N(k)]'$, $S \equiv [S(1) \cdots S(K)]$ とする。

(1) 主問題—等価 Martingale 測度推定問題

市場に裁定機会は存在しない、すなわち、“元手0で正の期待利潤が得られるような投資戦略は存在しない”とする。この条件は無裁定条件と呼ばれ、以下の $Q \equiv [Q(1) \cdots Q(K)] > 0$ が存在することと等価であることが知られている²⁾：

$$E^Q [S] \equiv \sum_{k \in K} Q(k) S(k) = s. \quad (1)$$

ここで、 Q は P に対する EMM (Equivalent Martingale Measure) と呼ばれ、 $E^Q [\cdot]$ は確率測度 Q の下での期待値演算を表す。無裁定条件下では、任意の資産の期首価格は、EMM の下での期末価格の期待値に等しい。これより、 Q が求められれば、payoff F を持つ事業の無裁定価格は $f = E^Q [F]$ として得られる。従って、(1) から Q を推定する逆問題を解けば、事業価格が求められる。

今、 $\text{rank}(S) > N$ の場合、市場は不完備であると言い、 Q が一意に決まらない。しかし、事業の売買を明示的に導入することで、少なくとも価格の上下限を与えることはできる。まず、事業の買い手と売り手を考え、それぞれが、無裁定条件下で、価格を最小化もしくは最大化するような EMM を選択するとしよう。このとき、買い手/売り手の行動は、以下の LP (Linear Programming)：

$$\text{[買い手]} \quad \underline{f} \equiv \min_Q E^Q [F] \quad \text{s.t. (1),} \quad (2)$$

$$\text{[売り手]} \quad \bar{f} \equiv \max_Q E^Q [F] \quad \text{s.t. (1),} \quad (3)$$

として定式化され、事業価格の上下限はそれぞれの解として得られる。

*keywords: プロジェクト評価, 逆問題, オプション理論, 不完備市場

[†] 学生員, 東北大学大学院情報科学研究科

[‡] 正会員, 工博, 東北大学大学院情報科学研究科

(2) 双対問題—Super-Hedging 問題

今, (1) に対する Lagrange 乗数を $\theta \in \mathcal{R}^{N \times 1}$ とすれば, (2), (3) の双対問題が以下のように導かれる:

$$\max_{\theta} \theta' s \text{ s.t. } \theta' S \leq F, \quad (4)$$

$$\min_{\theta} \theta' s \text{ s.t. } \theta' S \geq F. \quad (5)$$

この問題は, 取引主体が, 事業の売買に関するリスクを hedge する行動と解釈できる. 主体が期首で購入する n 番目資産の量を θ_n で表し, $\theta \equiv [\theta_1 \cdots \theta_N]'$ とすれば, この portfolio の期首価格および期末価格 (割引き済み) は, それぞれ, $w \equiv \theta' s$, $W \equiv [W(1) \cdots W(K)] \equiv \theta' S$ で表される. 今, 買い手は期首に portfolio を空売りして事業を購入し, 期末に事業の payoff から portfolio payoff を支払うとしよう. このとき, (4) は, 期末のいかなる状態においても富 $F(k) - W(k)$ が負とならないような portfolio の中で, 期首価格を最大化する super-hedging 問題と見なせる. 売り手についても, 期末の富を $W(k) - F(k)$ とすれば, 同様に解釈できる.

3 提案手法—KL 情報量による正則化

(1) 主問題—状態価格推定問題

前節で述べた従来の手法では, 事業価格は不定となり得る. これは, LP として定式化された EMM 推定問題の最適条件が特異となり得るためである. そこで, 本研究では, このような不定逆問題の正則化手法の一つとして知られる KL(Kullback-Leibler) 情報量を用いて問題を定式化する. 以降では, 売り手についての問題は, 買い手のそれとほぼ対称であるため, 解説を省略する.

まず, 確率測度 \mathcal{P} に対する \mathcal{Q} の KL 情報量は以下の式で定義される:

$$-\sum_{k \in K} \mathcal{Q}(k) \ln \frac{\mathcal{Q}(k)}{\mathcal{P}(k)} \equiv -E^{\mathcal{Q}}[\ln \Lambda]. \quad (6)$$

ここで, $\Lambda(k) \equiv \mathcal{Q}(k)/\mathcal{P}(k)$, $\Lambda \equiv [\Lambda(1) \cdots \Lambda(K)]$ は Arrow-Debreu 状態価格に対応する変数である. KL 情報量によって正則化された EMM 推定問題は以下のように定式化される:

$$\min_{\Lambda} E^{\mathcal{Q}}[F + (1/\gamma) \ln \Lambda] \text{ s.t. } (1). \quad (7)$$

ただし, $1/\gamma > 0$ は所与の定数.

ここで, (1) についての Lagrange 乗数を $\theta \in \mathcal{R}^{N \times 1}$ とすれば, 最適性条件より, Λ は以下の Logit 型の式として得られる:

$$\Lambda(k) = \frac{\exp[-\gamma \{F(k) - \theta' S(k)\}]}{E[\exp[-\gamma \{F - \theta' S\}]]}. \quad (8)$$

(2) 双対問題—確実性等価最大化問題

(7) の双対問題は以下のように定式化される:

$$\max_{\theta} -\frac{1}{\gamma} E[\exp[-\gamma \{F - [W - w]\}]]. \quad (9)$$

ただし, $W \equiv \theta' S$, $w \equiv \theta' s$.

この問題は, 以下のような経済学的解釈を与えられる. まず, 取引主体が富 W に対して CARA (Constant Absolute Risk Aversion) 型の効用関数 $u(W) = -\exp[-\gamma W]$ を持つと仮定し, 確率的な富 $W \equiv [W(1) \cdots W(K)]$ に対する確実性等価を $u(W^{CE}) = E[u(W)]$ と定義する. これを W^{CE} について解けば, 以下の式を得る:

$$W^{CE} = -\frac{1}{\gamma} \ln E[\exp[-\gamma W]]. \quad (10)$$

ここで, θ を portfolio 戦略と見なせば, 期末での買い手の利潤は事業の payoff から購入費用を引いた $F(k) - [W(k) - w]$ となる. 従って, (9) は期末での利潤に対する確実性等価を最大化する問題であると解釈できる.

4 連続時間-状態モデル

本節では, 連続時間-状態モデルに対する提案手法を示す. まず, 時間帯 $[0, T]$ および確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ を考える. この確率空間上で, K 次元 \mathcal{P} -Wiener 過程 $Z(t) \equiv [Z_1(t) \cdots Z_K(t)]'$ を仮定し, その増分 $dZ(t)$ が互いに独立であるとする.

1 種類の安全資産 (割引債) と N 種類の危険資産 (株式) が取引される資産取引市場を考える. 時刻 t での安全資産価格, および n 番目の危険資産の価格を $B(t)$, $\bar{S}_n(t)$ で表し, それぞれ, 以下の確率微分方程式に従うと仮定する:

$$dB(t)/B(t) = r(t) dt, \quad (11)$$

$$d\bar{S}_n(t)/\bar{S}_n(t) = \bar{\alpha}_n(t) dt + \sigma_n(t) dZ(t). \quad (12)$$

ここで, $\bar{\alpha}(t) > r(t) > 0$, $\sigma_n(t) \equiv [\sigma_{n,1}(t) \cdots \sigma_{n,K}(t)]$, $\sigma_{n,k}(t) > 0$ はそれぞれ既知の関数とする. 以降では, 任意の資産の割引き前の価格を $\bar{X}(t)$, 割引価格を $X(t) \equiv \bar{X}(t)/B(t)$ で表し, $S(t) \equiv [S_1(t) \cdots S_N(t)]'$ とする. また, 対象とする事業の満期を $t = T$ とし, 満期での payoff を $F(T) \equiv F(Z(T))$, $[0, T]$ 間に発生する利潤フローを $\pi(t) \equiv \pi(t, Z(t))$ で表す (いずれも割引き済み).

(1) 主問題—リスクの市場価格推定問題

(a) 定式化

市場に裁定機会が存在しなければ, 任意の時刻 $t < s \in [0, T]$ において, 以下の性質を満たすような \mathcal{P} に対する EMM \mathcal{Q} が存在する²⁾:

$$E_t^{\mathcal{Q}}[S(s)] = S(t), \quad \text{または} \quad E_t^{\mathcal{Q}}[dS(t)] = 0. \quad (13)$$

ここで、 $E_t^Q[\cdot] \equiv E^Q[\cdot|\mathcal{F}(t)]$ は確率測度 Q の下での条件付期待値を表す。また、確率測度 P に対する Q の KL 情報量は

$$-E^Q[\ln\{\Lambda(T)/\Lambda(0)\}]. \quad (14)$$

と定義される。ここで、 $\Lambda(t)$ は P に対する Q の Radon-Nikodym 微分であり、以下の式で定義される：

$$\Lambda(t)/\Lambda(0) = E_t[dQ/dP]. \quad (15)$$

このとき、KL 情報量で正則化された EMM 推定問題は、明示的な未知変数を $\Lambda(T)$ とした以下の問題となる：

$$[P0] \min_{\Lambda(T)} E \left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(0)} \left\{ F(T) + \int_0^T \pi(t) dt + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(0)} \right\} \right] \\ \text{s.t. } E^Q[(\Lambda(T)/\Lambda(0))S(T)] = S(0). \quad (16)$$

ただし、 $1/\gamma > 0$ は所与の定数である。

[P0] は、リスクの市場価格 (MPR : Market Price of Risk) $\lambda(t) \equiv [\lambda_1(t) \cdots \lambda_K(t)]'$ を制御変数とした確率制御問題として再定式化できる。ここで、MPR とは無裁定条件下において以下の性質を満たす確率過程である：

$$\alpha(t) = \sigma(t)\lambda(t). \quad (17)$$

ただし、 $\alpha(t), \sigma(t)$ は、それぞれ、 $\alpha_n(t) \equiv \bar{\alpha}_n(t) - r(t), \sigma_n(t)$ を行方向に並べたベクトルおよび行列である。Girsanov の定理により、 $\lambda(t)$ と $\Lambda(t)$ の間には以下の関係が成立する：

$$\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(0)} = \exp \left[- \int_0^t \lambda(s)' d\tilde{Z}(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \lambda(s)' \lambda(s) ds \right]. \quad (18)$$

ただし、 $\tilde{Z}(t)$ は、独立な増分を持つ K 次元 Q -Wiener 過程であり、 $\tilde{Z}(t) \equiv Z(t) + \int_0^t \lambda(s) ds$ なる関係を満たす。(16) に Girsanov の定理 (18) を適用すれば、制御変数を $\{\lambda(t)\}$ とした以下の確率制御問題に帰着する：

$$[P1] \min_{\{\lambda(t)\}} E^Q \left[F(T) + \int_0^T \left\{ \pi(t) + \frac{\lambda(t)'\lambda(t)}{2\gamma} \right\} dt \right] \text{s.t.} (17).$$

(b) 最適性条件

[P1] の最適値関数を以下のように定義する：

$$V(t, Z) \equiv \min_{\{\lambda(\cdot)\}} E_t^Q \left[F(T) + \int_t^T \left\{ \pi(s) + \frac{\lambda(s)'\lambda(s)}{2\gamma} \right\} ds \right].$$

DP 原理を用いて分解し、伊藤の補題を適用すれば、以下の HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式を得る：

$$\min_{\lambda} \pi + \frac{1}{2\gamma} \lambda' \lambda + V_t - V_Z' \lambda + \frac{1}{2} \text{tr}[V_{ZZ}] = 0 \text{ s.t.} (17).$$

ここで、下付添え字は、その添え字での偏微分を表す。(17) に対する Lagrange 乗数を $\beta(t) \in \mathcal{R}^{N \times 1}$ とすれば、最適性条件より、

$$\beta(t) = \Sigma(t)^{-1} \{-\alpha(t)/\gamma + \sigma(t)V_Z\}, \quad (19)$$

$$\lambda(t) = -\gamma\Theta(t)V_Z + \sigma(t)'\Sigma(t)^{-1}\alpha(t). \quad (20)$$

ただし、 $\Sigma(t) \equiv \sigma(t)\sigma(t)'$ 、 $\Theta(t) \equiv I - \sigma(t)'\Sigma(t)^{-1}\sigma(t)$ である。これを HJB 方程式に代入すれば、以下の 非線形 2 階偏微分方程式を得る：

$$\pi + V_t - V_Z' \sigma(t)'\Sigma(t)^{-1}\alpha(t) + \frac{1}{2} \text{tr}[V_{ZZ}] \\ - \frac{\gamma}{2} V_Z' \Theta(t) V_Z + \frac{1}{2\gamma} \alpha(t)'\Sigma(t)^{-1}\alpha(t) = 0. \quad (21)$$

終端条件は $V(T, Z) = F(Z(T))$ である。この偏微分方程式の解法は第 5 節に示す。

(c) 事業価格

(21) の解より V_Z を導出し、(20) に代入すれば、MPR $\{\lambda(t)\}$ が得られる。これを (18) に代入すれば Radon-Nikodym 微分 $\Lambda(T)/\Lambda(0)$ が求められる。事業価格は、以下の期待演算によって得られる：

$$f = E \left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(0)} \left\{ F(T) + \int_0^T \pi(t) dt \right\} \right].$$

(2) 双対問題—確実性等価最大化問題

(a) 定式化

[P1] の双対問題は、制御変数を $\beta(t) \equiv [\beta_1(t) \cdots \beta_N(t)]'$ とする以下の確率制御問題として定式化される：

$$[D] \max_{\{\beta(t)\}} -\frac{1}{\gamma} \ln E \left[\exp \left[-\gamma \left\{ F(T) + \int_0^T \pi(t) dt - [w(T) - w(0)] \right\} \right] \right].$$

2 期モデルと同様、経済主体が CARA 型効用関数を持つとすれば、双対問題に経済学的解釈を与えることができる。時点 t で、安全資産および n 番目危険資産を、それぞれ、 $\theta_0(t), \theta_n(t)$ 持つときの portfolio の割引価格を

$$w(t) \equiv \theta_0(t) + \sum_n \theta_n(t) S_n(t) \quad (22)$$

とする。ここで、portfolio 戦略は自己充足的—各瞬間で資金が湧き出したり消滅したりしない—とする。このとき、 $w(t)$ は以下の確率微分方程式に従う：

$$dw(t) = \sum_n \theta_n dS_n(t) = \beta(t)' \{\alpha(t) dt + \sigma(t) dZ(t)\}.$$

ただし、 $\beta_n(t) \equiv \theta_n(t) S_n(t)$ とする。

買い手の満期 T での利潤は、事業から発生する利潤 $F(T) + \int_0^T \pi(t) dt$ から portfolio による購入費用 $w(T) - w(0)$ を引いたものである。これより、[D] は、満期での利潤に対する確実性等価を最大化する問題と見なせる。

(b) 最適性条件

[D] の最適値関数を

$$V(t, Z) \equiv \max_{\{\beta(\cdot)\}} -\frac{1}{\gamma} \ln E_t \left[\exp \left[-\gamma \left\{ F(T) + \int_t^T \pi(s) ds - [w(T) - w(t)] \right\} \right] \right]$$

と定義すれば、DP 原理と伊藤の補題より、(21) と全く同じ偏微分方程式が導出できる。

(c) 事業価格

双対問題についても、主問題と同様に Radon-Nikodym 微分を求めて期待値をとれば事業価格が求められる。また、この問題の目的関数に、 Q に対する \mathcal{P} の KL 情報量を加えると、 Q の下での期待値が得られることを利用すれば、以下の式からも事業価格が得られる：

$$f = V(0, Z(0)) + \frac{1}{2\gamma} \mathbb{E} \left[\int_0^T \lambda(t)' \lambda(t) dt \right]. \quad (23)$$

5 具体例

本節では具体例を用いて提案手法、およびその解法を示し、従来手法との関係を明らかにする。

(1) 定式化—有料道路事業の例

高速道路などの有料道路事業を考えよう。事業の管理期間を $[0, T]$ とし、その間、この事業からは不確実に変動する交通量 $P(t)$ に応じて、毎時刻、利潤フロー $\pi(t, P(t))$ が発生するとする。管理期間の終了後、事業は民間企業に売却され、事業主は満期での交通量 $P(T)$ に応じた売却益 $F(P(T))$ を得るとする。

市場では債券と証券が 1 種類ずつ取引されるとし、証券の割引価格を $S(t)$ で表す。ここで、証券価格 $S(t)$ および交通量 $P(t)$ が、それぞれ、以下の幾何 Brown 運動に従うとしよう：

$$dS(t)/S(t) = \alpha dt + \sigma_1 dZ_1(t), \quad (24)$$

$$dP(t)/P(t) = m dt + v_1 dZ_1(t) + v_2 dZ_2(t). \quad (25)$$

ただし、 $\alpha, m, \sigma_1, v_1, v_2$ は所与の定数とする。また、 $Z_1(t)$ は証券価格と完全に連動している取引可能な経済的リスク要因、 $Z_2(t)$ は市場で取引できない事業固有のリスク要因である。簡便のため、以降では $Y(t) \equiv \ln P(t)$ を用いる。

(2) 解法

事業から得られる利潤は交通量のみ依存するため、目的関数は $V(t, Y)$ で表される。このとき、最適性条件 (21) は以下のように書き直される：

$$\begin{aligned} \pi + V_t + \left\{ \mu - \frac{\sigma v'}{\sigma \sigma'} \alpha \right\} V_Y + \frac{1}{2} (vv') V_{YY} \\ - \frac{\gamma}{2} (1 - \rho^2) (vv') V_Y^2 + \frac{\alpha^2}{2\gamma \sigma \sigma'} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、 $\sigma \equiv [\sigma_1 \ 0]$ 、 $v \equiv [v_1 \ v_2]$ 、 $Z(t) \equiv [Z_1(t) \ Z_2(t)]'$ であり、 $\rho \equiv \sigma v' / \sqrt{(\sigma \sigma')(vv')}$ は $dS(t)$ と $dP(t)$ の相関係数、 $\mu \equiv m - vv'/2$ は $Y(t)$ の期待増分である。この非線形偏微分方程式は、以下の関数変換：

$$\Phi(t, Y) \equiv \exp [V(t, Y)/\zeta] \quad (27)$$

によって線形の方程式に帰着させられる。具体的には、(27) 中で $\zeta = -1/\gamma(1 - \rho^2)$ と選べば、 Φ について以下

の線形偏微分方程式を得る：

$$\Phi_t + \left\{ \mu - \frac{\sigma v'}{\sigma \sigma'} \right\} \Phi_Y + \frac{1}{2} (vv') \Phi_{YY} + \left\{ \pi + \frac{\alpha^2}{2\gamma \sigma \sigma'} \right\} \frac{\Phi}{\zeta} = 0. \quad (28)$$

この方程式を終端条件 $\Phi(T, Y) = \exp [F(\exp Y)/\zeta]$ の元で解き、 $V = \zeta \ln \Phi$ とすることで元の偏微分方程式の解が得られる。(28) のような 2 階線形偏微分方程式に対しては多くの効率的解法が提案されており、それらを用いることで大規模な問題でも容易に数値解が求められる。

(3) 従来手法との関係—解の性質

この具体例では、提案手法と従来手法との関係が、2 つのパラメタ ρ と γ に集約される。まず、危機回避係数 $\gamma = 0$ の場合には、無裁定条件下で最も客観的確率測度 \mathcal{P} に“近い” EMM Q が選ばれる。逆に、 $\gamma \rightarrow \infty$ の場合には \mathcal{P} と Q の乖離は無視され、無裁定条件のみが有効となる。

また、証券価格と交通量の変動の相関係数 $\rho = 0$ の場合は資産市場の情報が一切反映されない(無裁定条件が有効でない)。従って、 $\rho = 0$ かつ $\gamma = 0$ の場合の事業価格は ENPV に一致する。一方、 $\rho = 1$ の場合は、事業からの cash flow の変動を全て証券で hedge できるため、その価格は完備市場における金融 option 価格となる。これは、 $\rho = 1$ の時、(26) から非線形項が消え、金融 option 価格が従う Black-Scholes 方程式とほぼ等価となることから確認できる。

6 おわりに

本研究では、不確実な cash flow をもたらす事業を、不完備市場における option と見なして価格評価する方法を提案した。具体的には、従来の無裁定条件下での option 評価法と整合性を保ちつつ、KL 情報量(あるいは危機回避係数)を導入することで解の不定性を排除した問題を定式化した。また、この問題の最適性条件から、事業価格が従う非線形偏微分方程式を導出した。さらに、ある種の関数変換を行うことで、この方程式が線形偏微分方程式に帰着することを示した。これにより、解の特性が明らかになり、既存の数値解法が適用可能となった。最後に、本研究での提案手法で評価した事業価格と、従来の ENPV および無裁定価格との対応関係を示した。

参考文献

- 1) J. H. Cochrane, *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, 2001.
- 2) M. Harrison and D. Kreps, “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory* **20**, 381-408, 1979.
- 3) N. El Karoui and M. C. Quenez, “Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in An Incomplete Market”, *SIAM Journal on Control and Optimization* **33**, 29-66, 1995.
- 4) D. G. Luenberger, “Arbitrage and Universal Pricing”, *Journal of Economic Dynamics & Control* **26**, 1613-1628, 2002.