Nested Logit 型確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金*

Optimal Link Tolls under Nested Logit Type Stochastic User Equilibrium*

円山 琢也**・原田 昇***・太田 勝敏****
By Takuya MARUYAMA**, Noboru HARATA***, and Katsutoshi OHTA****

1. はじめに

交通渋滞の緩和と大気汚染問題等への対応を目的としたロードプライシングは，東京都心部への導入も検討されるなど，現実味のある都市交通政策の代替案の一つになりつつある．本稿の目的は，このロードプライシングの最適な料金設定に関して，利用者の行動を明示的に扱いつつ現実都市圏の道路網にも適用可能な形式を提示することにある．

道路利用の私的限界費用と社会的限界費用の乖離に等しい額を混雑料金として課せば社会的に最適な状態が実現するという限界費用原理は，経済学における単純な 1 本のリンクを対象とした議論から導き出されたものである．この理論は，時間軸・空間軸の扱いが過度に単純化されている点と，交通行動の表現が不十分であるという問題があり，現実都市圏の料金設定問題に直接適用できるものではない．

空間表現の拡張に関しては，交通ネットワーク均衡分析のモデルの枠組みに混雑料金理論を適用することで，各リンクにおいて限界費用原理を適用すればよいことが知られている．しかし，従来モデルの利用者の経路選択行動の記述，需要関数の設定法などは，いまだ現実を簡略化したものであった．

本稿では以上の問題意識のもと，利用者の交通行動が複数の交通手段を含むネットワーク上でランダム効用理論に基づく Nested Logit 型の多次元選択行動として記述される場合における最適混雑料金について議論する．提示するフレームは，静的モデルであるという限界があるものの，現実の大規模なネットワーク上においても最適混雑料金の算出が可能である点が大きな利点となる．

また，現実のロードプライシングは，道路混雑緩和のみを目的とするわけではなく，大気汚染等の環境基準の達成を目的とする場合が多い．したがって，環境負荷排出総量が一定の制約を満たすような料金設定法についても触れる．

2. 既存研究のレビューと本研究の方針

交通ネットワーク均衡分析における混雑料金政策の議論としては，固定需要型配分において，利用者均衡モデルにおいて各リンクに限界費用原理を適用することで，システム最適配分が達成できることがよく知られている．この料金システムは，需要変動型の場合においても，Gardner[1)]，Yang and Huang[2)]らによって議論されているように，次のような目的関数で示される社会的余剰を最大化する．

$$\max . \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega - \sum_a t_a(x_a) x_a \qquad (1)$$

ここで，$D_{rs}^{-1}(.)$ は，OD ペア rs 間の逆需要関数，q_{rs} は，OD ペア rs の交通量，$t_a(.)$は，リンク a のリンクコスト関数，x_a は，リンク a の交通量とする．しかしながら，これらの研究で仮定されている需要関数は，独立型の需要関数であり，一般的なロジットモデルなどの競合型の需要関数の場合には，直接的には適用できない．また，この需要関数は，利用者の交通行動と結びついたものではなく，需要関数の価格弾力性を設定する必要があるが，その設定値によって混雑料金は大きく異なることになる[3)]．利用者の経路選択行動も確定的なものが仮定されている．また，単一の交通手段が想定されており，代替交通手段への影響を評価できない．これらの仮定を緩和し，フレームを一般化することは，混雑料金政策を論じるうえで重要な研究課題となろう．

この一般化を意図した既存研究としては，利用者

*キーワーズ: ネットワーク交通流，混雑料金
** 学生会員，修，東京大学大学院新領域創成科学研究科
*** 正会員，工博，東京大学大学院新領域創成科学研究科
****フェロー, Ph. D，東京大学大学院工学系研究科
(〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1, Tel 03-5841-6234, Fax03-5841-8527)

の経路選択行動が確率的である，すなわち確率均衡配分モデルの元での最適混雑料金についての,赤松,桑原[4),5)]による研究がある．彼らのモデルの目的関数は総走行時間の最小化を基本としたものであり，その場合に適用できる限界費用原理の拡張式を示した．これに対して，Yang[6)]は，ロジット型確率的均衡配分モデルと整合的な純経済便益を定義し，その最大化を目的関数とした場合，最適混雑料金は通常の限界費用原理となることを示した．

本稿では，利用者の経路選択も確率的とし，さらに，手段選択，目的地選択など他の次元の選択行動を含めて，ランダム効用理論に基づく Nested Logit モデルで記述した場合の最適混雑料金について議論する．本稿では，最適化の目的関数に Yang[6)]と同様な考えに基づく社会的純便益を設定する．これらは，利用者の総期待最大効用の最適化の問題であり，経済効率性の最適化をもたらす混雑料金といえる．しかしながら，経済性の効率だけではなく，環境負荷とのバランスという視点も求められよう．したがって，以上の最適モデルに加えて，環境負荷の制約をシステムに課した場合のモデルも提示し，それらを実現するための料金設定について議論する．環境負荷も考慮した料金政策は，Nagurney[7)]によって示されているが，そこで用いられているのは，利用者の確定的な選択のみを仮定したものであり，それらを拡張したモデルを提示する．

3.　モデルの定式化

Nested Logit モデルと整合的なネットワーク均衡配分モデルは，数多くの種類があり，大規模な都市圏にも適用可能なアルゴリズムも開発されている．これらの各モデルに対応した最適混雑料金政策を考えることが可能であるが，ここでは，まず手段選択と経路選択を Nested Logit モデルで記述される場合の最適混雑料金を議論する．また，各モードにおいて混雑が発生するが，そのリンクコスト関数は，モード間で独立であり,相互干渉は無いものとしよう．

まず，利用者の行動は，ランダム効用理論に基づいて，手段選択を上位，経路選択を下位の階層とする以下の Nested Logit Model で記述できると仮定しよう．

$$\Pr(k \mid rs,m)=\frac{\exp(-\theta_1^m c_{k,m}^{rs})}{\sum_k \exp(-\theta_1^m c_{k,m}^{rs})},\quad \forall r,s,m,k \quad (2)$$

$$\Pr(m \mid rs)=\frac{\exp[-\theta_2(S_m^{rs}+C_m^{rs})]}{\sum_k \exp[-\theta_2(S_m^{rs}+C_m^{rs})]},\forall r,s,m \quad (3)$$

$$S_m^{rs}=-\frac{1}{\theta_1^m}\ln\sum_k \exp(-\theta_1^m c_{k,m}^{rs}),\quad \forall r,s,m \quad (4)$$

ここで，$\Pr(k|rs,m)$は，OD ペア rs，手段 m の条件のもと経路 k を選択する確率，$\Pr(m|rs)$は，OD ペア rs の条件で手段 m を選択する確率である．$c_{k,m}^{rs}$ は，OD ペア rs 間, 手段 m の経路 k の交通費用，S_m^{rs} は，OD ペア rs 間, 手段 m の経路選択に関する期待最小費用，θ_1^m,θ_2 は，それぞれ経路選択，手段選択に関するパラメータ，C_m^{rs} は，手段 m に固有の非効用とする．

(1) 記述モデル

最適混雑料金の議論の前に，各利用者が，各自で効用最大化行動をとった場合の記述的モデルを示しておく．ネットワーク上のフローの均衡条件と，上記 Nested Logit モデルを同時に満足する解は，次の最適化問題と等価である．

$$\begin{aligned}\min Z_1(\mathbf{x},\mathbf{q}) &= \sum_{m,a}\int_0^{x_a^m} t_a^m(\omega)d\omega-\sum_{r,s,m} q_m^{rs}H_m^{rs} \\ &-\sum_{r,s} q_{rs}H_{rs}+\sum_{r,s,m} q_m^{rs}C_m^{rs}\end{aligned} \quad (5)$$

$$\sum_m q_m^{rs}=q_{rs},\quad \forall r,s \quad (6)$$

$$\sum_k f_{k,m}^{rs}=q_m^{rs},\quad \forall m,r,s \quad (7)$$

$$x_a^m=\sum_{r,s,k} f_{k,m}^{rs}\delta_{a,k}^{m,rs},\quad \forall m,a \quad (8)$$

$$q_{rs}^m \ge 0, f_{k,m}^{rs}\ge 0, x_a^m \ge 0,\quad \forall m,r,s,k,a \quad (9)$$

ここで,

$$\begin{aligned}H_m^{rs} &= -\frac{1}{\theta_1^m}\sum_k \Pr(k \mid rs,m)\ln \Pr(k \mid rs,m) \\ &= -\frac{1}{\theta_1^m}\sum_k \frac{f_{k,m}^{rs}}{q_m^{rs}}\ln\frac{f_{k,m}^{rs}}{q_m^{rs}},\forall r,s,m\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}H_{rs} &= -\frac{1}{\theta_2}\sum_m \Pr(m \mid rs)\ln \Pr(m \mid rs) \\ &= -\frac{1}{\theta_2}\sum_m \frac{q_m^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{q_m^{rs}}{q_{rs}},\forall r,s\end{aligned} \quad (11)$$

q_{rs}　: OD ペア rs 間 OD 交通量
q_m^{rs}　:手段 m の OD ペア rs 間 OD 交通量
$f_{k,m}^{rs}$　:手段 m のOD ペア rs 間経路 k の交通量
x_a^m　:手段 m リンク a の交通量
$t_a^m(x_a^m)$:手段 m リンク a のリンクコスト関数

$\delta_{a,k}^{m,rs}$:リンク経路接続行列

以上のモデルは，交通ネットワークにおける個々の利用者の(確率的な)効用最大化行動の結果を記述したものである．しかし，混雑により外部不経済が生じている交通ネットワークでは，その均衡解は，必ずしも社会的に最適な状態と一致しない．以下では，交通ネットワーク利用者全体の余剰最大化を達成するためには，各リンクにどのような混雑料金を課せばよいか議論する．

(2) 最適混雑料金設定

さて，最適混雑料金を議論するのに必要な規範的モデルを提示する前に，次のような良く知られた関係式を確認しておく．双対理論によれば，ある経路費用 **C** についてロジットモデルによる経路選択確率が定まる場合，次式が成立する[8)].

$$S_m^{rs} + H_m^{rs} = \sum_k \Pr(k \mid rs, m) c_{k,m}^{rs}, \forall r,s,m \tag{12}$$

$$\therefore \sum_{r,s,m} q_m^{rs} S_m^{rs} + \sum_{r,s,m} q_m^{rs} H_m^{rs} = \sum_{r,s,m,k} f_{k,m}^{rs} c_{k,m}^{rs} \tag{13}$$

同様にして，手段選択に関して次式が成立する．

$$S_{rs} + H_{rs} = \sum_m \Pr(m \mid rs)(S_m^{rs} + C_m^{rs}), \forall r,s \tag{14}$$

$$\therefore \sum_{r,s} q_{rs} S_{rs} + \sum_{r,s} q_{rs} H_{rs} = \sum_{r,s,m} q_m^{rs}(S_m^{rs} + C_m^{rs}) \tag{15}$$

ここで，S_{rs} は，手段選択に関する期待最小費用，

$$S_{rs} = -\frac{1}{\theta_2} \ln \sum_m \exp[-\theta_2 (S_m^{rs} + C_m^{rs})], \forall r,s \tag{16}$$

である．ここで, (13), (15)の両辺を足し合わせると，

$$\begin{aligned} &\sum_{rs} q_{rs} S_{rs} + \sum_{rsm} q_m^{rs} H_m^{rs} + \sum_{rs} q_{rs} H_{rs} - \sum_{rsm} q_m^{rs} C_m^{rs} \\ &= \sum_{rsmk} f_{k,m}^{rs} c_{k,m}^{rs} = \sum_{ma} x_a^m t_a^m (x_a^m) \end{aligned} \tag{17}$$

が成立することになる．

ここで，今回の最適混雑料金政策で達成すべき最適化問題の目的関数を，交通ネットワーク利用者全体の(社会的)余剰最大化とおこう．この場合，ランダム効用理論に整合的な指標は，OD 間期待最大効用($-S_{rs}$)の総和となる．そこで，期待最大効用の和をフローの保存条件のもと最大化する次の規範モデルを考える．

$$\max . \sum_{rs} -q_{rs} S_{rs} \tag{18}$$

s.t. (6)-(9)

この最適化問題は，(17)式を用いて書き換えることができる．

$$\begin{aligned} \min . Z_2(\mathbf{x}(\mathbf{f}), \mathbf{q}) = &\sum_{ma} x_a^m t_a^m (x_a^m) - \sum_{rsm} q_m^{rs} H_m^{rs} \\ &- \sum_{rs} q_{rs} H_{rs} + \sum_{rsm} q_m^{rs} C_m^{rs} \end{aligned} \tag{19}$$

s.t. (6)-(9)

この規範モデルの目的関数(19)式(5)と式を比較すると，その差は，目的関数の第一項のみであることが分かる．したがって，固定需要配分の場合，および独立型の需要関数を用いた弾性需要配分の場合と全く同様に，各リンクに次式のような限界料金を課すことにより，各自の効用最大化行動が，社会的余剰の最大化につながることが分かる．

$$p_a^m = x_a^m \frac{\partial t_a^m (x_a^m)}{\partial x_a^m} \tag{20}$$

このモデルの解は，既存の Nested Logit 型需要変動モデルのアルゴリズムにおいて，リンクコスト関数を，$t_a^m + p_a^m$ で置き換えれば容易に求めることができる．すなわち，大規模なネットワークにおいても効率的なアルゴリズムが利用できる．また，この規範モデルにおけるリンク交通量，限界所要時間の値を計算しておけば，最適なリンク混雑料金パターン $\{p_a^m\}$を定めることができる．

以上と全く同様な議論は, Nest の上位段階に手段選択以外を想定する場合，段階構成を増やした場合にも当然成立する．Nest の上位を時刻選択モデルとおいた場合にも，フローモデルとして時間帯間の相互干渉を無視したものを利用するならば，同様な議論が展開できる．この場合，以上のモデルにおいて手段 m の添え字を時間帯 m と読み替えればよい．

なお，このモデルを用いることで最適混雑料金が算出できるが，固定需要モデルを用いた場合の混雑料金，確率均衡モデルを用いた場合の混雑料金と比較することで，経路選択に伴う外部不経済，手段選択に関する外部不経済をそれぞれ同定するという利用法も可能であろう．

以上の議論は，一般的には，ネットワーク均衡問題を表現する下位の最適化問題を制約条件とし総便益の最大化を上位の目的関数としたシュタッケルベルグの leader-follower 問題として，定式化されるものであるが，本稿のフレームは，単純にこれらの解を求めることが可能であることを示している．

4. 環境負荷制約

以上の料金政策で社会的余剰最大化が達成できることが示されたが，この最適化に環境負荷排出総量の制約が加えられる場合を考えよう．ネットワーク，利用者の行動仮説は前節と同等とする．

最も単純な状況として，各リンクにおける環境負荷の排出原単位が $e_a{}^m$ で一定であると仮定しよう．リンクから排出される負荷量は，$x_a{}^m e_a{}^m$ で与えられる．ネットワーク全体から発生するある種の環境負荷がある一定の基準を満たしつつ，社会的余剰が最大化されるような料金設定法を考える．以上のような状態は，数学的に書けば，

$$\max . \sum_{rs} -q_{rs} S_{rs} \tag{21}$$

s.t. (6)-(9) and

$$\sum_{m,a} e_a^m x_a^m \le E \tag{22}$$

となる．ここで，E は外生的に与える排出規制量総量である．例えば，CO_2 排出総量の 1990 年比較の 6%減といった値である．この問題の最適条件を求めて整理すると，次式が得られる．

$$f_{k,m}^{rs} = q_m^{rs} \frac{\exp(-\theta_1^m \tilde{c}_{k,m}^{rs})}{\sum_k \exp(-\theta_1^m \tilde{c}_{k,m}^{rs})}, \quad \forall r,s,m,k \tag{23}$$

$$q_m^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta_2(\tilde{S}_m^{rs} + C_m^{rs})]}{\sum_k \exp[-\theta_2(\tilde{S}_m^{rs} + C_m^{rs})]}, \quad \forall r,s,m \tag{24}$$

$$\tilde{S}_m^{rs} = -\frac{1}{\theta_1^m} \ln \sum_k \exp(-\theta_1^m \tilde{c}_{k,m}^{rs}), \forall r,s,m \tag{25}$$

$$\tilde{c}_{k,m}^{rs} = \sum_{m,a} [t_a^m(x_a^m) + x_a^m \frac{\partial t_a^m(x_a^m)}{\partial x_a^m} + \lambda e_a^m] \delta_{a,k}^{m,rs}, \forall r,s,m,k \tag{26}$$

ここで，λは，環境制約条件(22)に対応したラグランジュ乗数である．したがって，各利用者の効用最大化行動の結果が環境負荷制約を満たしながら社会的余剰の最大化を達成するためには，各リンクに，

$$\tilde{p}_a^m = x_a^m \frac{\partial t_a^m(x_a^m)}{\partial x_a^m} + \lambda e_a^m \tag{27}$$

に等しい額の，料金を課せばよいことになる．この式の第一項は伝統的な混雑料金であり，第二項は環境負荷制約を達成するための排出税と解釈できる．直感的に説明すれば，環境制約が厳しければ厳しいほど，λは大きな値をとり，各リンクの排出税は増加する．排出税は，各リンクの排出原単位に比例するべきこともわかる．また，あまりにも厳しい基準では，その基準を達成する料金政策が存在し得ないことも理解できよう．

5. おわりに

Nested Logit モデル型ネットワーク均衡条件下の最適混雑料金の設定法を示した．最適化の目的関数を，行動モデルと整合的な社会的余剰の最大化とおくことで，既存の限界費用原理がそのまま当てはまることが示された．固定需要モデル，独立型需要関数を用いた変動需要型モデルにおいて示されていたことを，本稿では，Nested Logit 型統合モデルにおいても，あてはまることを確認した意義がある．独立型需要関数を用いた変動需要型モデルでは需要関数をアドホックに設定する必要があったが，Nested Logit 型統合モデルの場合は, 利用者の行動を明示的に扱ったモデル推定が可能であり，現実都市への適合度が増す利点がある．

講演時には，筆者らが現実の大規模都市圏に適用した Nested Logit 型の確率的利用者均衡配分モデルに対応した，以上の最適混雑料金の計算例を示し，実際の政策へのインプリケーションを議論したい．

参考文献

1) Gartner, N. H.: Optimal traffic assignment with elastic demands: A review part I. Analysis framework, *Transportation Science*, Vol. 14, No. 2, pp. 174-191, 1980.
2) Yang, H. and Huang, H.: Principle of marginal-cost pricing: How does it work in a general road network?, *Transportation Research*, Vol. 32A, No.1 pp. 45-54, 1998.
3) 野杁貴博，秋山孝正: 遺伝的アルゴリズムによる都市道路網ゾーン別混雑料金の設定，土木計画学研究･論文集, Vol. 18, no. 3, pp. 455-462, 2001.
4) 赤松隆，桑原雅夫: 確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金，土木学会論文集, No. 389/IV-8, pp. 121-129,1988.
5) Akamatsu, T. and Kuwahara, M.: Optimal toll pattern on a road network under stochastic user equilibrium with elastic demand, *Selected Proceedings of the 5th World Conference on Transport Research*, Vol. 1, pp. 259-273, 1989.
6) Yang, H.: System optimum, stochastic user equilibrium and optimal link tolls, *Transportation Science*, Vol. 33, No. 4, pp. 354–360, 1999.
7) Nagurney, A.: *Sustainable Transportation Networks*, Edward Elgar, 2000.
8) Miyagi, T.: On the formulation of a stochastic user equilibrium model consistent with the random utility theory- a conjugate dual approach-, *Proceedings of the 4th World Conference on Transportation Research*, Vol. 2, pp.1619-1635, 1986.