

# PF事業のためのインセンティブ契約モデル：オプションゲームアプローチ\*

An Incentive Contract Model for Infrastructure Projects: Option Game Approach\*

織田澤利守\*\*・小林潔司\*\*\*

by Toshimori OTAZAWA\*\* and Kiyoshi KOBAYASHI\*\*\*

## 1. はじめに

近年、社会基盤施設の整備・運営方法の効率性に関する議論が活発に行われている。こうした中で、PFI(Private Finance Initiative)方式の導入は、競争原理や民間事業者の持つ経営ノウハウの活用による効率性の向上を可能にするとして大きく期待されている。しかし、同じく民間活力の導入を目的とし、公共と民間の共同出資により設立された第3セクターの多くが、官民の馴れ合いやリスク分担の不明瞭さから民間部門のモラルハザード問題を引き起こし、経営状況の悪化に陥る結果となっている。こうしたことから、PFIプロジェクトの効率的な実施のためには、関係主体間のリスク分担を明確化し、インセンティブを確保するような契約スキームの設計が不可欠であるといえよう。

PFIプロジェクトでは民間による資金調達を基本とし、プロジェクトファイナンス手法による資金調達が行われる。資金調達に関する契約は、プロジェクトに関わるリスクの分担および決定権限(所有権)の配分ルールを規定する<sup>1)</sup>。特に、負債による規律付けの効果が民間事業の行動やインセンティブに与える影響は極めて重要である。しかし、デフォルトの発生によりプロジェクトの決定権限が債権者に移転したとき、債権者の決定がプロジェクト全体にとって最適なものであるという保証はない。契約によりデフォルトリスクを分担し、デフォルトの発生タイミングを適切に設定することでプロジェクトの価値を

高めることが可能であろう。

本研究では、オプションゲームアプローチ<sup>2)</sup>を用い、企業のインセンティブの問題とデフォルトリスクの分担問題を同時に考慮した上で最適となる契約スキームの設計を目的とする。なお、本稿では研究の初期段階として負債によるインセンティブ効果に着目した最も基本的なモデルの定式化を行う。

## 2. 本研究の基本的な考え方

PFIプロジェクトでは、複数の主体がプロジェクトに関係し、主体間で多様な契約関係が構築される。プロジェクトの契約構造はこうした個々の契約の集合体である。各関係主体は、プロジェクトの契約構造を通じて直接的あるいは間接的に他の主体の行動に影響を及ぼし合う。すなわち、各主体間にゲーム的状况が発生する。

本研究では、上下分離方式によって整備・運営される社会基盤施設を考え、施設の整備を行う事業主体をリーダー、経営を行う運営企業をフォロワーとするシュタッケルベルグ・ゲームを分析する。ここで、フォロワーである運営企業は自らの行動(努力水準)を戦略として選択する。ただし、運営企業の行動は私的情報であり、事業主体は観測および立証不可能である。こうした情報の非対称性が存在する下での、シュタッケルベルグ・ゲームはプリンシパル・エージェント問題として多くの研究の蓄積<sup>3)</sup>がある。

一方、リアルオプション理論<sup>4)</sup>では、プロジェクトへの投資機会をオプションとして捉え、その行使のタイミングとプロジェクトの価値を分析することができる。モデルでは、各主体は決められた契約スキームの下でプロジェクトより将来にわたって獲得できる総期待収益を最大とするような戦略を選択する。

\*キーワード：インセンティブ契約，オプションゲーム，プロジェクトファイナンス

\*\*学生員 工修 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻  
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073)

\*\*\*フェロー 工博 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻  
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5071)

### 3. インセンティブ契約モデル

#### (1) モデル化の前提

プロジェクトに関わる主体として施設を整備する事業主体と、事業主体から施設を賃貸し施設を経営する運営企業ならびに運営企業へ融資を行う債権者を考える。運営企業はプロジェクトファイナンス手法を採用し、借入金のみにより $\bar{D}$ の資金を調達する。借入契約においては、負債は恒に一定の残高があり、運営企業がデフォルトするまで借入金利 $\rho\bar{D}$ を負債コストとして支払うとする。ただし、 $\rho$ は無リスク金利である。事業主体は運営企業に施設を賃貸することにより賃貸収入を獲得する。運営企業は施設を運営することにより料金収入(キャッシュフロー)を獲得し、賃貸費用および借入金利を支払う。施設経営によってもたらされるキャッシュフローは、運営企業の行動(経営努力水準) $e$ に依存する。また、運営企業は行動 $e$ の実行に伴い、当該期価値 $C(e)$ の費用を負担しなければならない。ここで、行動 $e$ は運営企業の私的情報であり、その他の主体は観測および立証することは不可能であるが、行動費用の関数形は知り得るものとする。なお、キャッシュフローならびに行動費用は行動 $e$ の増加関数である。プロジェクト期間は1)施設が整備されていない初期時間 $t = 0$ から、事業主体が建設費用 $I$ を投じて施設を建設し、運営企業が運営を開始する時刻 $\theta_1$ までの第0期間 $[0, \theta_1)$ 、2)運営企業が施設経営を開始してから運営企業のデフォルトの生起によってプロジェクトが終了するまでの第2期間 $[\theta_1, \theta_2)$ 、3)運営企業がデフォルトし、施設経営が廃棄された第3期 $[\theta_2, \infty)$ により構成される。運営企業の名目資産額 $V$ が負債残高 $\bar{D}$ に最初に達した時点でデフォルトが生起するものとする。また、将来にわたってデフォルトが生起しない場合は $\theta_2 = \infty$ となる。なお、簡単のため施設の建設は瞬時に終了するものとする。

#### (2) 運営企業の名目資産価値の定式化

第0期の任意の時刻 $t$ において施設が建設され運営が開始された場合、当該時点における運営企業の名目資産額の初期値 $V^\circ(t)$ がブラウン過程

$$dV^\circ(t) = \mu^\circ dt + \sigma^\circ dB(t) \quad (1)$$

に従うと仮定する。ここで、 $\mu^\circ$ は名目資産額の初期

値のトレンド、 $\sigma^\circ$ は変動の大きさ(ボラティリティー)を表し、 $B(t)$ は標準ブラウン運動である。なお、名目資産額の初期値は運営企業の経営努力とは無関係であるとする。次に、第0期の終端時刻 $\theta_1$ において名目資産額の初期値 $V^\circ(\theta_1) = \hat{V}^\circ$ (以下、 $\hat{\cdot}$ は観測値を表す。)が観測されたとする。時刻 $\theta_1$ において努力水準 $e$ を選択した運営企業の第1期の任意の時刻 $t$ における名目資産価値を $V(e, t)$ と表そう。運営企業は施設経営により每期 $\mu(e)dt + \sigma dW(t)$ のキャッシュフローを獲得し、このうち施設賃貸料 $R$ を事業主体へ、借入金利 $r\bar{D}$ を債権者へ支払い、残りを留保利益として資本蓄積(赤字の場合は取り崩し)する。したがって、時刻 $t$ における運営企業の名目資産額の増分 $dV(e, t)$ は次式のように表される。

$$dV(e, t) = \{\mu(e) - R - \rho\bar{D}\}dt + \sigma dB(t) \quad (2)$$

$\mu(e)$ はキャッシュフローのトレンドを表し、運営企業の行動 $e$ に関して単調増加である。 $\sigma$ は変動の大きさ(ボラティリティー)を表す。式(2)より、時刻 $t$ における運営企業の名目資産価値 $V(e, t)$ は $\hat{V}^\circ$ を初期値として、次のように表される。

$$V(e, t) = \hat{V}^\circ + \{\mu(e) - R - \rho\bar{D}\}(t - \theta_1) + \sigma B(t - \theta_1) \quad (3)$$

#### (3) デフォルト事象の定式化

第1期のある時点において、運営企業の名目資産額 $V$ が負債残高 $\bar{D}$ に最初に達した時点でデフォルトが生起し、企業活動が停止する。運営企業のデフォルト時刻 $\theta_2$ は次のように表される。

$$\theta_2 = \inf\{t \geq \theta_1; V(t) < \bar{D}\} \quad (4)$$

ただし、デフォルト時刻 $\theta_2$ は、名目資産過程(2)のサンプルパスごとに定義される確率変数である。デフォルトが生起した時点で、運営企業の資産に関する決定権限は債権者に移転する。債権者は直ちに企業資産を清算することで負債残高 $\bar{D}$ を獲得する。なお、簡単のため清算コストは一切発生しないものとした。このため本融資契約は債権者にとってリスクフリーとなる。

#### (4) プロジェクト価値の定式化

a) 運営企業の資産価値

時刻 $\theta_1$ において努力水準 $e$ を選択した運営企業を考える。いま、第1期の任意の時刻 $t(\theta_1 \leq t \leq \theta_2)$ において、運営企業の名目資産額が $\hat{V}$ であったとする。このとき、運営企業の資産価値 $U(\hat{V})$ は、次式で表される。ただし、賃料 $R$ は所与であるとする。ここで、伊藤のレナマより、

$$dU(V) = U'(V)dV + \frac{1}{2}\sigma^2 U''(V)dt \quad (5)$$

が成り立つ。また、無裁定条件より、運営企業にとっての資産価値 $U(V)$ の収益率は無リスク利子率と等しくなければならない。したがって、

$$\rho dt = \frac{E(dV + dU(V))}{U(V)} \quad (6)$$

が成り立つ。ここで、 $E(\cdot)$ はリスク中立化確率のもとでの期待値操作を表す。式(5),(6)より、運営企業の資産価値 $U(\hat{V})$ の一般解を次のように得る。

$$U(\hat{V}) = \hat{V} + \frac{\mu(e) - R - \rho\bar{D}}{\rho} + \alpha_1 \exp(\beta_1 \hat{V}) + \alpha_2 \exp(\beta_2 \hat{V}) \quad (7)$$

ここで、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ は未知パラメータである。また、

$$\beta_1 = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (8a)$$

$$\beta_2 = \frac{-f - \sqrt{f^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (8b)$$

である。 $f = \mu(e) - R - \rho\bar{D}$ であり、 $\beta_1 > 0$ 、 $\beta_2 < 0$ を満足する。いま、 $\lim_{V \rightarrow \infty} U(V) = V - \bar{D} + (\mu(e) - R)/\rho$ より、 $\alpha_1 = 0$ である。時刻 $\theta_2$ において名目資産額の観測値が $V(e, \theta_2) = \bar{D}$ となり、デフォルトが生起する。デフォルト時点における資産価値はゼロ、すなわち $U(\bar{D}) = 0$ が成立することから、 $\alpha_2 = -(\mu(e) - R)/\rho \exp(\beta_2 \bar{D})^{-1}$ となる。したがって、運営企業の資産価値 $U(\hat{V})$ は次式で表される。

$$U(\hat{V}) = \hat{V} - \bar{D} + \frac{\mu(e) - R}{\rho} (1 - \exp\{\beta_2(\hat{V} - \bar{D})\}) \quad (9)$$

b) 事業主体のプロジェクト価値

事業主体が第0期の任意の時刻 $t(t < \theta_1)$ まで最適戦略を適用した結果、同時刻までプロジェクトは開始しておらず、仮に同時刻に施設を建設し、施設経営を開始した場合には運営企業の名目資産額の初期値

$\hat{V}^\circ$ が獲得できることが判明したとしよう。事業主体が同時刻以降も継続して最適戦略を適用することにより獲得可能な総賃料収入の時刻 $t$ における期待当該期価値は最適値関数

$$W_1(\hat{V}^\circ) = \max_{\theta_1} \left[ E \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \exp(-\rho t) dt - I \exp(-\rho \theta_1) \right] \right] \quad (10)$$

で表される。記号 $E[\cdot]$ は確率過程(2)に関する期待値操作を意味する。最適実施時刻 $\theta_1$ は、名目資産の初期値過程(1)のサンプルパスごとに定義される確率変数である。第1項は賃料収入の現在価値を、第2項は施設建設費用の現在価値である。最適値関数の一般解は

$$W_1(\hat{V}^\circ) = \gamma_1 \exp(\beta_1^\circ \hat{V}^\circ) + \gamma_2 \exp(\beta_2^\circ \hat{V}^\circ) \quad (11)$$

と表せる。ただし、

$$\beta_1^\circ = \frac{-\mu^\circ + \sqrt{\mu^{\circ 2} + 2\rho\sigma^{\circ 2}}}{\sigma^{\circ 2}} \quad (12a)$$

$$\beta_2^\circ = \frac{-\mu^\circ - \sqrt{\mu^{\circ 2} + 2\rho\sigma^{\circ 2}}}{\sigma^{\circ 2}} \quad (12b)$$

である。最適値関数が $V^\circ$ に関する増加関数であり、 $\lim_{\hat{V}^\circ \rightarrow 0} (W_1) = 0$ が成立するためには $\gamma_2 = 0$ でなければならない。したがって、最適値関数の一般解は次のように表される。

$$W_1(\hat{V}^\circ) = \gamma_1 \exp(\beta_1 \hat{V}^\circ) \quad (13)$$

つぎに、経営が開始された第1期の問題を考える。時刻 $\theta_1$ に経営が開始され、時刻 $t'$  ( $t' \geq \theta_1$ )まで進んだ時点に着目しよう。また名目資産額の観測値は $\hat{V}$ である。この場合、事業主体が獲得可能な総賃料収入の時刻 $t'$ における期待当該期価値は、

$$W_2(\hat{V}) = E \left[ \int_{t'}^{\theta_2} R \exp\{-\rho(\tau - t')\} d\tau \right] \quad (14)$$

と表される。上記と同様の手順を踏むことにより、

$$W_2(\hat{V}) = \frac{R}{\rho} + \delta_2 \exp\{\beta_2 \hat{V}\} \quad (15)$$

となる。さらに、 $\hat{V} = \bar{D}$ のとき $W_2 = 0$ より、 $\delta_2 = -R/\rho \exp(\beta_2 \bar{D})^{-1}$ となる。したがって、第1期における事業主体のプロジェクト価値 $W_2(\hat{V})$ は、次のようになる。

$$W_2(\hat{V}) = \frac{R}{\rho} - \frac{R}{\rho} \exp\{\beta_2(\hat{V} - \bar{D})\} \quad (16)$$

## (5) オプション・ゲーム

これまで定式化してきたように本問題では複数の主体がプロジェクトに関係しており、主体間でゲーム的状況が発生する可能性がある。いま、事業主体および運営企業は次のようなルールに従い、各々の政策変数を決定していくものとする。1) プロジェクトの開始時刻 $\theta_1$ および施設賃料 $R$ は、事業主体が決定する。プロジェクト開始時点で設定された賃料 $R$ は固定される。2) プロジェクト開始時点において、運営企業は自らの行動 $e$ を選択し、当該期価値 $C(e)$ の行動費用を負担する。なお、簡単化のため、プロジェクトよりもたらされるキャッシュフローは、プロジェクト開始時点の運営企業の行動にのみ依存し、その後の経営努力等には影響を受けないものとする。以上のルールの下では、本問題は事業主体をリーダー、運営企業をフォロワーとするシュタッケルベルグ・ゲームであるといえる。

### a) 運営企業の戦略

ゲームを後ろ向きに考えて、フォロワーである運営企業の最適化行動を考える。運営企業は時刻 $\theta_1$ に経営を開始し、時刻 $\theta_2$ にデフォルトに陥り経営から撤退する。運営企業が無限に存続できる場合には $\theta_2 = \infty$ となる。いま、運営企業にとって開始時刻 $\theta_1$ 、デフォルト時刻 $\theta_2$ および施設賃料 $R$ は所与である。時刻 $\theta_1$ における運営企業の行動は、インフラ経営により得られるキャッシュフローの期待現在価値を最大にする自らの努力水準 $e$ の選択問題として定式化される。

$$\begin{aligned} \max_e U(\hat{V}^\circ) - C(e) \\ \text{subject to 式(3) and } V^\circ(\theta_1) = \hat{V}^\circ \end{aligned} \quad (17)$$

したがって、事業主体の戦略 $(R, \theta_1)$ のもとでの運営企業の戦略 $e^*(R, \theta_1)$ は、

$$e^*(R, \theta_1) = \arg \max U(\hat{V}^\circ) - C(e) \quad (18)$$

となる。

### b) 事業主体の戦略

次に、リーダーである事業主体の最適化行動を考える。事業主体は自らの戦略に対する運営主体の最適応答である式(18)を制約として、プロジェクトよりもたらされる期待利潤の当該期価値を最大にするようなプロジェクト開始点 $V^*$ ならびに賃料 $R$ を決定す

る。まず、最適なプロジェクト開始点 $V^*$ において、Value Matching 条件

$$W_1(V^*) = W_2(V^*) - I \quad (19)$$

が成立する。ここで、事業主体の最大化問題は次のような定義される。

$$\max_{V^*, R} W_1(V) \quad \text{subject to 式(18), (19)} \quad (20)$$

最適開始点 $V^*$ に関する最適化条件(Smooth Pasting 条件)および賃料 $R$ に関する最適化条件はそれぞれ、

$$W_1'(V^*) = W_2'(V^*) \quad (21)$$

$$\frac{\partial W_1(V^*)}{\partial R} = 0 \quad (22)$$

である。したがって、式(18),(19),(21),(22)を解くことにより、事業主体の最適戦略 $(R^*, \theta_1^*)$ および運営主体の最適戦略 $e^*$ が導出される。

## 4. おわりに

本稿では、上下分離方式を採用する社会基盤施設の整備・運営に関するインセンティブ契約モデルを定式化した。モデルでは、施設整備を実施する事業主体とプロジェクトファイナンス手法により資金調達を行い施設を経営する運営企業および債権者の3者間に存在するゲーム的状況をオプション理論を用いて記述した。なお、本稿では紙面の都合上、基本モデルの定式化にとどめた。分析結果ならびにモデルの応用例は講演時に発表したい。

最後に、今後の課題としては、主体間でのデフォルトリスクの分担によるパレート改善の可能性の検討およびモラルハザードの抑制効果を備えた債務保証スキームの提案がある。

### 参考文献

- 1) 柳川範之(2000) 契約と組織の経済学, 東洋経済新報社.
- 2) 村瀬英彰(2000) 不動産価格形成とオプションゲーム, 季刊 住宅土地経済 2000年秋季号.
- 3) Salanie, B (2000) 契約の経済学, 勁草書房.
- 4) Dixit, A. K. and Pindyck, R.S. (1994) *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.