最適制御 MPEC モデルによるフレックスタイム制度下の鉄道通勤・始業時刻分布の分析 *

Railroad Commuting and Work Start Time Distributions under Flexible Work Hours System based on Optimal Control MPEC Model*

吉村　充功 **・奥村　誠 ***
By Mitsunori YOSHIMURA**・Makoto OKUMURA***

1. はじめに

近年，通勤混雑の緩和策として，交通需要管理施策が着目されている．しかし，代表例であるフレックスタイム制度の現状を見た場合，十分浸透しているとは言い難い．これは，企業にとっては，制度の導入は労働時間帯にずれを生じさせ，業務活動の効率低下を招くおそれがあるため，導入に積極的でないことに起因している．これまでの研究では，このような始業時刻変更による業務活動の効率低下の影響が考慮されていなかった．

本研究では，大都市圏の通勤鉄道を念頭に置き，通勤者や企業といった主体の行動を定式化し，フレックスタイムの導入による，これらの行動パターンを分析できる理論的なモデルを構築する．さらに，このモデルを用いてフレックスタイム制度の経済効果を分析する．ここで構築されるモデルは，すべての通勤者が最終的に獲得する効用が等しくなるという均衡制約条件下で，社会全体の効用を最適にする通勤・始業時刻分布を決定する問題であり，連続状態変数を持つ MPEC モデルである．

2. 鉄道通勤サービス市場と一般企業の生産活動

(1) 通勤者の出勤・帰宅不効用の定式化

出勤 (帰宅) 時において，時刻 t_g (t_r) に都心に到着 (出社) する (都心を離れる (退社する)) 通勤者の出勤 (帰宅) 不効用 $U(t_g)$ ($V(t_r)$) を列車の混雑度と自宅を早く出発 (遅く帰宅) することによるスケジュールコストの和により定義する．

$$U(t_g) = -\left(s(t_g)\right)^{\eta} - c\left\{T_g - \left(t_g - \omega\right)\right\} \tag{1}$$

$$V(t_r) = -\left(r(t_r)\right)^{\eta} - e\left\{\left(t_r + \omega\right) - T_r\right\} \tag{2}$$

ここで，$s(t_g)(r(t_r))$ は時刻 $t_g(t_r)$ に都心に到着 (出発) 列車の混雑度を表し，$s(t_g) = 1$ ($r(t_r) = 1$) のとき，定員輸送を意味する．η は混雑度に関する弾力値，ω は通勤所要時間，c (e) (円/分) は自宅出発時刻が早い (帰宅時刻が遅い) ことに関するスケジュールコストの時間価値を示す．出勤 (帰宅) 時のスケジュールコストは，任意の基準時刻 T_g (T_r) を基準に計測する．

(2) 鉄道企業の輸送力供給と運賃の定式化

時点 t_g (t_r) に都心に到着 (出発) する通勤者に対して供給される輸送力を $u(t_g)$ ($v(t_r)$) (人/分) と表す．時刻 t_g (t_r) 以前に都心に到着 (出発) する累積通勤者数の割合を $m(t_g)$ ($l(t_r)$) とすると，次式が成立する．

$$\dot{m}(t_g)N = s(t_g)u(t_g) \tag{3}$$

$$\dot{l}(t_r)N = r(t_r)v(t_r) \tag{4}$$

ただし，N は総通勤者数である．

出勤 (帰宅) 時間帯の運行費用 TRC_g (TRC_r) は，輸送力 $u(t_g)$ ($v(t_r)$) の関数で表される費用を出勤 (帰宅) 時間帯について積み上げ，次式により定義する．

$$TRC_g = \int_{T_0}^{T_2} \zeta\left(u(t_g)\right)^{\iota} \mathrm{d}t_g \tag{5}$$

$$TRC_r = \int_{T_1+H}^{T_3+H} \zeta\left(v(t_r)\right)^{\iota} \mathrm{d}t_r \tag{6}$$

ここで，ι, ζ は費用関数の弾力値，比例係数である．また，T_0, T_2 はそれぞれ，都心へ最も早く到着する通勤者の到着時刻，最も遅く到着する通勤者の到着時刻を，$T_1 + H, T_3 + H$ はそれぞれ，都心を最も早く離れる通勤者の退社時刻，最も遅く離れる通勤者の退社時刻を表す．

運賃は総括原価方式に従い，時間帯にかかわらず一定の運賃を設定していると仮定する．そのため，

* キーワード : MPEC, 最適制御,TDM, 交通管理
** 学生員, 修 (工), 広島大学大学院 工学研究科
(〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1, TEL&FAX : 0824-24-7849,
E-mail : myoshimr@hiroshima-u.ac.jp)
*** 正会員, 博 (工), 広島大学大学院 工学研究科
(〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1, TEL&FAX : 0824-24-7827,
E-mail : mokmr@hiroshima-u.ac.jp)

各通勤者の往復の運賃 RC は次式で表される．

$$RC = TRC_g/N + TRC_r/N \tag{7}$$

(3) 一般企業の生産活動の定式化

本研究では，Henderson[1] に倣い，各時点における都市内で労働している従業者数を取り入れた瞬間的な生産関数を定義し，時間的に変動する集積の効果を考慮する．1 従業者あたりの 1 日の生産額が，この従業者の 1 日の賃金に等しいとすると，時刻 t_w に始業する従業者の 1 日の賃金 $Y(t_w)$ は，1 従業者あたりの瞬間的な生産関数 $A(\rho(\tau)N)^\alpha$ を用いて次式のように定義できる．

$$Y(t_w) = \int_{t_w}^{t_w+H} A(\rho(\tau)N)^\alpha \, \mathrm{d}\tau \tag{8}$$

ここで，H (分) は労働時間で始業時刻に関係なく一定とする．A は各一般企業の技術水準を表すパラメータ，α は時間的集積の経済性の大きさを表すパラメータであり，それぞれ 1 つの都市内では一定値をとるとする．$\rho(\tau)$ は時点 τ に都心全体で業務を行っている従業者数の比率を表す．

(4) 通勤者の効用

通勤者 i が最終的に獲得する 1 日の効用 $W(i)$ は，以下のように表すことができる．

$$W(i) = Y(n^{-1}(i)) + U(m^{-1}(i)) + V(l^{-1}(i)) - RC \tag{9}$$

ここで，$n^{-1}(i)$, $m^{-1}(i)$, $l^{-1}(i)$ はそれぞれ，$t_w = n^{-1}(i)$, $t_g = m^{-1}(i)$, $t_r = l^{-1}(i)$ であり，$n(t_w)$, $m(t_g)$, $l(t_r)$ の逆関数である．なお，$n(t_w)$ は時刻 t_w 以前に始業している累積始業者数を表す．

各通勤者は，その通勤者にとって有利な状況，すなわち，式 (9) に示した効用 $W(i)$ の値が大きくなるように自宅出発 (出社) 時刻，始業 (終業) 時刻，退社 (帰宅) 時刻を設定する．そのため，均衡状態においては各通勤者の効用は等しくなる．

(5) 社会的厚生水準の定式化

政府の目的はすべての一般企業の総生産額と通勤者の鉄道通勤による不効用，鉄道企業の輸送費用からなる社会的厚生水準を最大にすることにある．社会的厚生水準 SW は次式により定義できる．

$$SW = \int_{T_0}^{T_3+H} \left[\dot{n}(t)N \cdot Y(t) + \dot{m}(t)N \cdot U(t) - \zeta u(t)^\iota + \dot{l}(t)N \cdot V(t) - \zeta v(t)^\iota\right] \mathrm{d}t \tag{10}$$

3. フレックスタイム制度下の通勤・始業時刻分布

(1) 利用者均衡通勤・始業時刻分布モデルの定式化

政府は，等効用条件 (11b) を満たすもののうち，社会的厚生水準 (11a) が最大になるような鉄道の運行スケジュールを計算し，それに従って鉄道企業は輸送力の供給を行う．このような運行スケジュールを求める問題は，等効用条件 (11b) を均衡制約条件に持ち，$u(t)$, $v(t)$, $k(t)$ を制御変数として社会的厚生水準 (11a) を最大化する MPEC 型の最適制御問題として，以下のように定式化できる．

$$\max_{u(t),v(t),k(t)} SW = \int_{T_0}^{T_3} \left[\dot{n}(t)N \cdot Y(t) + \dot{m}(t)N \cdot U(t) - \zeta u(t)^\iota + \dot{l}(t)N \cdot V(t) - \zeta v(t)^\iota\right] \mathrm{d}t \tag{11a}$$

$$\text{subject to} \quad W(i) = \text{const.} \tag{11b}$$

$$\dot{m}(t) = s(t)u(t)/N \tag{11c}$$

$$\dot{l}(t) = r(t)v(t)/N \tag{11d}$$

$$\dot{n}(t) \equiv k(t)/N \tag{11e}$$

$$\dot{Y}(t) = \begin{cases} AN^\alpha \{(1-n(t))^\alpha - n(t)^\alpha\} \\ \qquad \text{if } (T_1 \le t \le T_2) \cap (\dot{n}(t) \ne 0) \\ 0 \quad \text{if } (t < T_1, T_2 < t) \cup (\dot{n}(t) = 0) \end{cases} \tag{11f}$$

$$h_1(\boldsymbol{x}(t)) \equiv -l(t) \le 0 \tag{11g}$$

$$h_2(\boldsymbol{x}(t)) \equiv l(t) - n(t) \le 0 \tag{11h}$$

$$h_3(\boldsymbol{x}(t)) \equiv n(t) - m(t) \le 0 \tag{11i}$$

$$h_4(\boldsymbol{x}(t)) \equiv m(t) - 1 \le 0 \tag{11j}$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t)$ (= $\{m(t), l(t), n(t), Y(t), s(t), r(t)\}$) は状態変数を表す．(11b)-(11f) は状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$ の状態拘束を表す．(11g)-(11j) は状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$ の物理的な可能条件を表す状態制約条件である．等効用条件 (11b) は，式 (11g)-(11j) が 0 か否かの組み合わせごとに，微分方程式形で書き換えられる．

この問題は，状態制約条件を持つ最適制御理論[2] を適用することによって，求解が可能である．

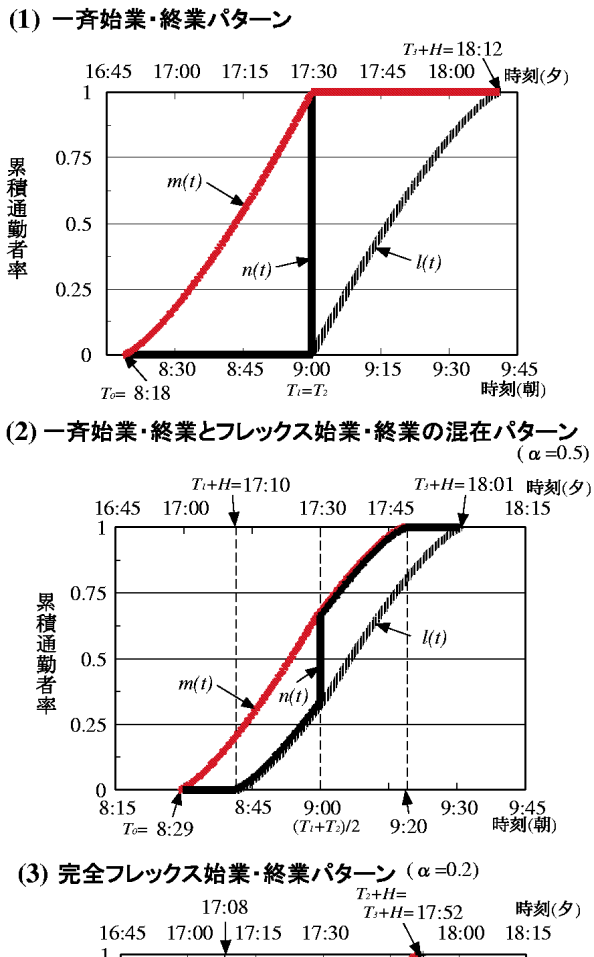


図 – 1 最適軌道のパターン

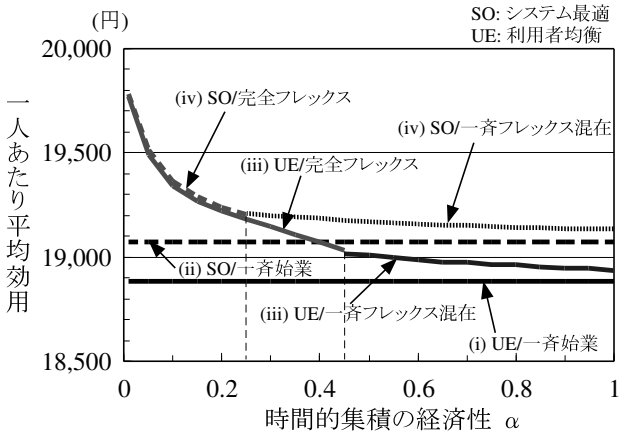


図 – 2 時間的集積の経済性の違いによる効用の変化

(2) モデルの求解

最適制御理論の最適性条件･跳躍条件より問題(11)の求解を行うと，状態制約条件 (11g)-(11j) が 0 か否かの組み合わせにより，通勤・始業時刻分布は以下の 3 つのパターンに分類できる (**図 – 1**).

a) 全員が一斉始業・終業

b) 一斉始業・終業とフレックス始業・終業が混在

c) 全員がフレックス始業・終業

(3) システム最適通勤・始業時刻分布

前項までの利用者均衡問題は，通勤者の自由な行動を許しているため混雑の外部性が作用し，求められた通勤・始業時刻分布パターンが社会的に最適ではない可能性がある．そこで，時刻別運賃 (混雑料金) 制度を導入することにより，通勤者の通勤行動を制御する問題を考える．このモデルの定式化，解は省略するが，最適軌道 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^o$ は，先のモデルと同様な 3 つのパターンに分類される [3].

4. フレックスタイム制度の経済評価

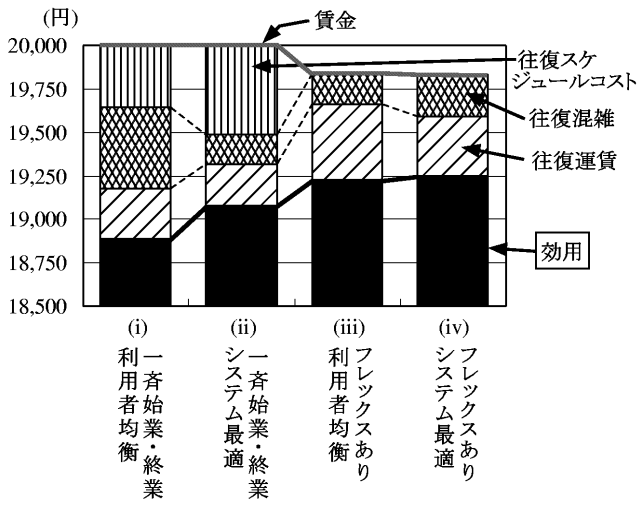
前節のモデルで求めたそれぞれの通勤・始業時刻分布パターンは，最適軌道の必要条件である．そのため，3 つのパターンのうち，どれが最適なパターンになるかは数値計算により求めなければならない．

経済評価の数値計算に用いる各係数の値を過去の実証研究 [4] などにより，$\eta = 4.5$, $\iota = 3.1$, $\zeta = 0.0008$(円/分)，$c = e = 10$(円/分)，$N = 40{,}000$(人)，$H = 450$(分)，A: 全通勤者が一斉始業･終業のときの 1 通勤者あたりの 1 日の賃金が 20,000(円) になるように設定する．

(1) 時間的集積の効果の違いによる経済評価

時間的集積の経済性 α は，都市の産業構造により異なる．そこで，α の値を変化させて，通勤･始業時刻分布パターンごとの 1 通勤者あたりの平均効用を数値計算により求めた (**図 –2**)．ただし，基本ケースとして，フレックスタイムが認められておらず，全員が一斉始業・終業するケースも求めている．

利用者均衡 (UE)/フレックスタイム制度下 (ケース iii) では，α が小さいほど効用が増加する．そのため，α が小さい都市ほどフレックスタイム制度の効果が大きいことが分かる．また，α が小さくなると完全フレックス始業･終業パターンが最適となって，



図－3 効用の比較 ($\alpha = 0.2$)

UE 下 (ケース iii) とシステム最適 (SO) 下 (ケース iv) とで効用の差はほとんど無くなる．これは，政府が時刻別運賃の政策を打っても，効果が上がらないことを意味する．

また，α が大きいと，フレックスタイム制度を導入 (ケース iii) しても効用はあまり改善できない．このようなケースでは，時刻別運賃を導入 (ケース ii) することにより効用の改善が可能である．

(2) 効用の各成分の経済評価

効用は，賃金から往復のスケジュールコスト，混雑の不効用，運賃を差し引いたものである．$\alpha = 0.2$ に設定した上で，制度の導入による効用の変化を各成分ごとに分別して表示したものが，**図－3** である．

この数値計算例では，一斉始業の下で時刻別運賃を導入 (ケース ii) してシステム最適にすれば混雑が大幅に軽減される．しかし，スケジュールコストがかえって増加するため効用はさほど改善されない．一方，フレックスタイムを導入 (ケース iii) した場合，賃金は 160 円の減少でほとんど減らないが，待ち時間が存在しなくなるためスケジュールコストが 0 になり，効用は大きく増加する．このとき，混雑はケース (ii) ほど改善されないことが分かる．さらに，時刻別運賃を導入 (ケース iv) してシステム最適にすると，混雑はさらに悪化する．ただし鉄道輸送費用が節約されるため，運賃の節約分が混雑悪化の不効用を若干上回り，効用は改善される．この例からもわかるように，混雑を最も軽減できるケースが社会的厚生水準 (効用) を最大にするとは限らない．

以上のように，フレックスタイム制度は効用の増加をもたらすことが期待できるが，その効果の大きさは都市の産業構造により異なり，時間的集積の経済性が強い場合には小さな効果しか期待できないことに注意が必要である．また，混雑の緩和が必ずしも全体的な最適と一致しないことから，制度の導入が他の各項目にどのような影響を及ぼすかの吟味が必要であることが確かめられた．

5. おわりに

本研究では，大都市鉄道通勤に対するフレックスタイム制度の理論的な分析を行うために，通勤者の効用が等しいという均衡条件下で，社会的厚生水準を最大化する時刻別の通勤列車の輸送力，通勤・始業時刻分布パターンを決定するという，MPEC 型の「利用者均衡通勤･始業時刻分布決定モデル」の構築を行い，経済評価を行った．

本研究を通して，時間軸に沿って差別化された市場が連続しているような問題に対して，最適制御型の MPEC モデルが適用できることを示した．ただし，本研究のような状態変数のみの不等式制約条件を持つモデルでは，最適制御問題の一般的な解法であるポントリャーギンの最大値原理を直接適用できない．そのため，軌道の不連続性を扱う跳躍条件を考慮しなければならず，解を求めることが困難になりやすい．さらに，得られる解は十分条件を満たさないことから具体的な解を求めるためには数値計算に頼らざるを得ない．また多次元の連立微分方程式を数値的に解く必要があり，このような制約を回避するために，本質を失わない範囲でできる限り単純化することが必要であろう．

参考文献

1) Henderson,J.V. : The economics of staggered work hours, Journal of Urban Economics, Vol.9, pp.349-364, 1981.
2) 志水 清孝 : 最適制御の理論と計算法, コロナ社, pp.54-104, 1994.
3) 吉村 充功・奥村 誠 : 鉄道通勤における最適フレックスタイムパターンの研究, 土木計画学研究・論文集, Vol.18, No.5, pp.779-786, 2001.
4) 志田 州弘・古川 敦・赤松 隆・家田 仁: 通勤鉄道利用者の不効用関数パラメータの移転性に関する研究, 土木計画学研究・講演集, No.12, pp.519-525, 1989.