

MPEC に基づく立地均衡分析

Some Land-use Equilibrium Model Analysis with the MPEC Solution Methodology

森杉 雅史¹

Masa Morisugi

はじめに

Weber に代表される古典的立地問題は本来 2 つの最適化行動が含まれる。すなわち、立地点選択行動と、立地してから原料調達・生産・販売する行動の二つである。通常、我々が持ち家をどこに建てるかという選択に際しては、その地点に住むとどのような居住効用（就業地・学校・買い物地へのアクセス性、緑・騒音・景観のアメニティ、公園・河川・観光地・スポーツ文化施設の存在など）が得られるかを前もって見定める必要がある。時間的には前者について最初に action を起こし、さらに後者に対して action を起こす。本来 2 つの異時点の連続問題を同時決定としてみなすことが不都合であるケ - スは、先ず不確実性などの存在が挙げられるよう。時間的に後方において起こす行動は将来の環境に制約を受けるため、その解となる行動も不確実性を含む。前方の行動を起こす際には、将来の環境及び後方の行動も情報として問題に組み込まれるため、この問題定式化の際には不確実性に対して何らかの対処をする必要がある。次に、時間それ自体に対する主体の選好や機会費用を明確にせねばならない。目的関数の値は、前方後方の両問題においてとられる action の時間が異なるため、割り引いて基準を統一する必要がある。

一方で、本論では少々視点の変化を試みたい。MPEC の定義は均衡制約条件付数値最適化問題に他ならない。これは Stackelberg ゲ - ム構造を必然として内包する。Stackelberg ゲ - ムの典型例では、先ず主体が複数あり、それぞれの主体が action を起こす手番は異なるものと設定される。ある主体の最適化行動は他の主体にとっては情報集合として織り込み済みであり、通称反応関数と呼ばれる主体的均衡条件がそのまま他主体の最適化問題における制約条件として取り込まれる。一方で、他の主体にとってはある主体の行動は与件として現れ、またこの時ある主体の戦略は前もってコミットしているとされる（清野（1993）、

その意味では同時手番ゲ - ムでは Stackelberg 均衡はありえない）。必然的に発生する情報の非対称性によって、場合によっては、leader は follower から搾取することが可能となる。資源配分上の問題としては、このような搾取は戦略による歪みとなって、社会的最適配分からの乖離する原因の一端を担う。

1 節にて紹介するように、2 段階最適化問題に帰着できる MPEC 問題は、Luo・Pang・Ralph(1997)によって、後方問題を単独で解いた際の一階条件・Lagrangian 未定乗数を含んだ形での相補性条件と、及び両問題における制約条件を制約条件集合とし、前方問題の目的関数をそのまま目的関数として留保した、等価な MPEC 問題として定式化できることが証明されている。一方土木計画学としては、立地市場も含めた一般均衡型地域経済モデルにおいて、その市場均衡条件によって決定される各地域の居住効用に応じて居住地選択が図られる、いわば人口移動も含めた立地・土地利用モデルが多段階型最適化問題の代表例といえる。通例では、人口移動に際してはランダム効用モデルを適用することによって確率的に配分されるが、この時の居住効用の水準は前方問題主体にとっては外生的に与えられている。すなわち、人口移動を今しようとする当人は、その選択がどのように時間的な後方において当人あるいは社会に影響をもたらす、そのことまで予見して行動すべきかを考慮していない。従って、前方問題の主体は後方問題の主体に対して何ら戦略的な働きかけはできないことを想定している。この処理法は現実を描写する上で慎重になるべきかと思われる。Stackelberg ゲ - ム構造を必然的に持つ MPEC 解法では、後方問題の主体が前方問題においての解を与件として最適化し、前方問題の主体はそれを知って最適化する。しかし、その事自体について後方問題主体は考慮しない。すなわち、後方問題の主体は前方問題の主体に対して戦略的な働きかけはできない。本論 3 節では内在的

な Stackelberg ゲ - ム構造が資源配分の歪みをもたらしてしまう MPEC 問題について、構造を鑑みながら言及する。

1. MPEC 問題の基本構造

以降では扱う対象の連続的最適化問題は 2 段階までとする。Luo・Pang・Ralph(1996)によると、均衡条件制約つき数理最適化問題 (MPEC) の典型は以下のように記述できる。

<MPEC-typical、上位問題>

$$\begin{aligned} \min_y f(x, y) \\ \text{s.t. } (x, y) \in Z \quad x \in S(y) \end{aligned}$$

本論を通じて、上記の MPEC は 2 段階の最適化問題とどのように対応するかを常に念頭に置き、変数や式の説明を行う。つまり、ここでの解釈では、 x は下位問題の、 y は上位問題の操作変数ベクトル、 f は上位の最適値目的関数、 Z は結合制約条件となる。 S は以下のような変分不等式問題 (VIP; variational inequality problem) の解集合である。

<下位問題: VIP 形式>

$$\begin{aligned} \text{find } x \in X \text{ such that satisfies the inequality below:} \\ (v - x)^T F(x, y) \geq 0 \quad \text{for all } v \in C(y) \end{aligned}$$

C は下位問題での制約条件である。以下の最適化問題は上述の VIP 形式下位問題と等価の解を与えるものとするが、ここでの F が、その目的関数の操作変数に対する一階偏微分と対応している。

<下位問題: 直接最適化問題形式>

$$\begin{aligned} \min_x \theta(x, y) \quad \text{equals that;} \\ \text{s.t. } x \in C(y) \end{aligned}$$

$$\arg \min \{ \theta(x, y) : x \in C(y) \} \subseteq S(y) \quad F(x, y) = \nabla_x \theta(x, y)$$

さらに以下のような定理が成立するが、本章では特に証明なしでこれを与えよう。

—定理 1—

今、下位問題における制約条件を $g(x, y) \leq 0$ と置く。上述の一連の最適化問題は、下位問題における Karush-Kuhn-Tucker 条件を上位問題の制約条件に据え置いた形の問題と等価である。

$$\begin{aligned} \min_{x, y} f(x, y) \\ \text{s.t. } (x, y) \in Z \quad F(x, y) + \sum_{i=1} \lambda_i \nabla_x g_i(x, y) = 0 \\ \lambda \geq 0 \quad g(x, y) \leq 0 \quad \lambda^T g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

λ は直接最適化問題形式である下位問題を単独に解いた際に導出されるラグランジュ未定乗数であり、上添え付き文字 T は転置行列を示す。ここでは全ての変数はベクトルで表記されるため、 i はその次数の分だけ存在する。制約条件はそれ自体が連立不等式であり、下位問題に等価の解を与える相補性問題 (complementarity problem) を形成する。

2. MPEC の型と自由市場及び社会的最適計画のギャップ

上記の問題において、 x 、 y についてはそれぞれ 1 次元の変数と定め、1 階条件を導出する。ただし、下位問題には現れず、MPEC に対してのみ固有の制約条件 $h(x, y) = 0$ を新たに定める。これを <MPEC-1 問題> と称し、その Karush-Kuhn-Tucker 条件は定理 1 の元で以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} L^{MPEC-1} = f + \mu_1(\theta_x + \lambda g_x) + \mu_2 h + \mu_3 g + \mu_4 \lambda + \mu_5 \lambda g \\ \text{F.O.C.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x, y, \mu_1, \mu_5} = 0 \quad \left(\frac{\partial L}{\partial h, g, \lambda} \right) (h, g, \lambda) = 0 \\ h \leq 0 \quad g \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \mu_2, \mu_3 \leq 0 \quad \mu_4 \geq 0 \quad F + \lambda g_x = 0 \quad \lambda g = 0 \end{aligned}$$

本章では内点解が成立する場合のみを想定し、議論を進める。この時には、上の <MPEC-1 問題> は以下のように置かれる。

$$\begin{aligned} \text{F.O.C.} \quad \begin{aligned} f_x + \mu_1(\theta_{xx} + \lambda g_{xx}) + \mu_2 h_x + \mu_3 g_x &= 0 - \\ f_y + \mu_1(\theta_{xy} + \lambda g_{xy}) + \mu_2 h_y + \mu_3 g_y &= 0 - \\ \theta_x + \lambda g_x &= 0 - \quad g = 0 - \quad h = 0 - \end{aligned} \end{aligned}$$

上の <MPEC-1 問題> において、下位問題では操作変数 y を所与として x を最適化する、すなわち $x(y)$ なる反応関数が導かれる。<MPEC-1 問題> では固有の制約条件 $h(x, y) = 0$ の他に、この反応関数を制約条件として y を最適化することになる。この問題はいわゆる Stackelberg ゲ - ムの典型であり、反応関数を制約条件として代入した形の、以下の <STG-1 問題> と等価である。

<STG-1 問題>

$$\begin{aligned} \max_y f(x(y), y) \\ \text{s.t. } g(x(y), y) = 0 \quad h(x(y), y) = 0, \end{aligned}$$

一階条件は

$$f_y + f_x \frac{dx}{dy} + \phi(h_y + h_x \frac{dx}{dy}) = 0 \quad g = 0 \quad h = 0$$

{証明: MPEC STG}

内点解成立より $g(x, y) = 0$ よって $g_x dx + g_y dy = 0$

また より $(\theta_{xx} + \lambda g_{xx})dx + (\theta_{xy} + \lambda g_{xy})dy = 0$

$\mu_1 \neq 0$ 、 $+$ 、 $-$ 、より が導かれる。//

次に、自由放任経済における均衡状態の資源配分上の効率性を問うてみよう。上述のような２段階最適化モデルの社会的最適性を問う場合、上位問題と下位問題における主体の目的関数の集計可能性を考える必要がある。今、社会的厚生関数を V として定義し、上位主体と下位主体も社会に代表的個人が一人だけいるケ - スを想定しよう。

社会的最適化問題 <SO-1 問題>、及びその内点解成立時の一階条件は以下になる。

<SO-1 問題>

$$\max_{x,y} V(x,y)$$

$$\text{s.t. } g(x,y) = 0 \quad h(x,y) = 0,$$

F.O.C.

$$V_x + \omega_1 g_x + \omega_2 h_x = 0 \quad V_y + \omega_1 g_y + \omega_2 h_y = 0 \quad g = 0 \quad h = 0$$

ここで得られる一階条件と <MPEC-1 問題>のそれとを比較しよう。そのためには以下の２つの条件に留意する必要がある。

第一条件

<SO-1 問題>と <MPEC-1 問題>の一階条件では目的関数が異なるため、直接的には比較しえない。両主体の目的関数が集計可能でかつ極端な例では、 f と θ が等しい場合がある。また、完全に f と θ が必ずしも同等である必要はなく、 f と θ のいずれかが V に一致し、かつ両者が x と y に関して相似拡大的である場合には、両一階条件の比較において目的関数の異質性を考慮する必要がない。

第二条件

制約条件のかかり方が異なっていることに注目する。上述の <MPEC-1 問題>に即していえば、以下の定理が成立する。

—定理 2—

f と θ と V が一致し、目的関数の相違に MPEC-1 問題と SO-1 問題の解比較に支障がない場合を考える。この時、上位問題の操作変数の変化が、下位問題の目的関数及び固有制約条件に影響をもたらさない（完全独立のケ - ス、 θ_y 、 $g_y=0$ ）あるいは下位問題の目的関数及び固有制約条件の下位問題操作変数に対する一階導関数に影響をもたらさない（ θ_{xy} 、 $g_{xy}=0$ ）とすれば、両問題の解は内点解成立時には恒等である。

{証明}

いずれの場合でも、 $\theta_{xy} + \lambda g_{xy} = 0$ また、より $(\theta_{xx} + \lambda g_{xx})dx + (\theta_{xy} + \lambda g_{xy})dy = 0$ かつ第 2 条件成立時には、 $\theta_{xx} + \lambda g_{xx} = 0$ 、よって、SO-1 問題の一階条件 と MPEC-1 問題の一階条件は完全に一致する。//

上の定理は、上位と下位の主体の目的関数が一致する特殊な Stackelberg ゲ - ム構造をもつ上述の MPEC 問題では、上位が下位の行動を見越して戦略を先んじてうつというメリットがない場合、完全競争型同時決定ゲ - ムと変わらないことを意味する。

3. いくつかの MPEC 解法例

立地問題は立地あるいは居住すること自体が主体にとっての目的ではなく、立地後、居住後の行動を見据えて、自分にとっての最も利するパターンを探索することが典型であろう。その意味においては、時間的に後者に当たる問題が何らかの立地後の市場均衡条件・主体的均衡条件を示すとすれば、立地行動は全て本質的には多段階問題の典型である。ただし、上述の解法での MPEC 問題の定式化を図ると、Stackelberg 的なゲ - ム構造、戦略的な歪みが生じることは事実である。これは

・ 場を正確に定式化しえていない場合

・ そうしても差し支えない場合

・ 歪みそのものが既に考慮にいられた目的である場合

に分けられよう。 の場合には、上位問題において下位問題の操作変数をやはり所与とし、２つの独立かつ同時決定的な問題として扱い、Nash 解を探索することで上述の歪みは回避できる。また、ここで目的関数がほぼ上位と下位において同質的ならば、それは一つの問題を全ての制約条件のもと、全ての操作変数において最適化することと変わりはない。誤った定式化の例として、Weber 問題に立ち返ろう。今、１次元指標で表される空間のみ考え、原材料（ m ）産地（ $y = 0$ ）と生産物（ M ）を販売する市場（ $y = 1$ ）の間でいずれかの地点において立地することを考える工場主体がいるものとする。原材料価格は q 、市場における生産物価格は p とし、これらについては競争市場によって工場にとっては与件である。工場の立地点までの原材料輸送費用は単位当たりで t_m 、市場までの生産物単位当たりの輸送費用は t_M とする。また、生産技術として $m = f(M)$ の関係が成立するものとしよう。この時、立地選択行動を上

位、原料調達・生産・出荷・販売活動を下位問題とすると、
<MSOP-W 問題>

- 上位問題（工場立地選択） -

$$\max_y \pi = PM - c$$

$$s.t. \quad 0 \leq y \leq l$$

- 下位問題（立地後の最適行動） -

$$\min_{m,M} c = t_M M(l - y) + (t_m y + q)m$$

$$s.t. \quad m \geq f(M)$$

同様に MPEC 的に解を求めている。内点解成立を前提とし、この問題に対して Lagrangean 関数を設定すると、

$$L^{MPEC-W} = PM - t_M M(l - y) - (t_m y + q)f(M) + \mu\{t_M(l - y) + (t_m y + q)f'(M)\}$$

同様に、社会的最適（あるいは単に両行動に時間、もしくは手番の順番がない場合）のケースを想定すると、

<SO-W 問題>

$$\max_{y,m,M} PM - t_M M(l - y) + (t_m y + q)m$$

$$s.t. \quad 0 \leq y \leq l \quad m \geq f(M)$$

この問題に対して Lagrangean 関数は、

$$L^{SO-W} = PM - t_M M(l - y) - (t_m y + q)f(M)$$

よって、明確に と比較して右辺第 4 項、下位問題における反応関数の分だけ制約が多い。この項の μ を除いた部分は下位問題の一階条件であり、これを全微分しても と が恒等になる条件は導かれない。それは定理-2 で伺えたように、下位問題の目的関数の下位問題操作変数に対する一階導関数に上位問題の操作変数が影響する理由による。従って、ここでは二つの問題は完全に同一主体の同一目的であることから、MPEC 定式化は誤った方向に向かっている。つまり、戦略的な歪みを元々記述する必要がないならば、上位、下位問題は同時手番として扱うべきである。

は前節でその類型について既に述べられた。においては、例えば負の外部経済が既に社会に存在し、税の最適化問題を解くとし、最適ビッグ - 税や直接数量規制が困難な場合、戦略的な歪みが過剰な生産量・消費量を抑止することが可能な場合などが想定されよう。よって、この時には戦略的な歪みそのものが上位主体においての目的・政策足りうる。あるいは社会において寡占・独占が支配的な場合、戦略的にその生産量を拡大せしめることが考えられる。例えば、独占企業の利潤最大化問題が下位で、政府主体が独占企業生産物 (y) から生ずる消費者余剰を最大化す

ることを上位問題とする。独占価格 (p) 以外の価格 (費用関数 c など) 需要関数 ($p(y)$) は全て外部から与えられる。また、政府主体の政策変数 (x) は T なる実施費用がかかるものとする。定式化すれば、

<上位問題（政府）>

$$\max_x \int_0^{y^*(x)} p(y)dy - \int_0^{y^*(x)} (\partial c(y)/\partial y)dy - T(x)$$

<下位問題（独占企業）> $\max_y p(x, y)y - c(x, y)$

下位主体は標準的な独占利潤最大化問題に従い、限界利潤と限界費用が一致するように生産量を決定する。

$$p(x, y) + \frac{\partial p}{\partial y} y - \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

第 2 項は限界費用価格形成との乖離分であり、 d と表記する。また、この等式を満たす任意の x に対する y の関数 (反応関数) を $y^*(x)$ と表記しよう。ここで、政府の政策は需要関数や費用関数に直接的に与える影響は十分に小さいものとする。前節の <STG-1 問題>と同様に MPEC 解を導くと、 $\partial T(x)/\partial x = -d$ が導かれる。政府は間接的に独占企業を限界費用価格形成に近い水準まで生産させることを意図とする。政策実施には費用がかかるので、政策実施限界費用と政策実施の限界的効果 (d の減少分) が一致する点で最適となる。このような例は、価格の歪みに対して正反対ベクトルに是正手段を講じることのできる従量税等の政策的裁量が不可能な場合、次善的最適解を探索する際典型である。政府は先手番という立場を利用して、戦略的に自己の目的を達成するよう、独占企業を導くことができる。このように、MPEC 解法の建設的な活用例の一つとしては、戦略的歪みそのものが政策的な意味合いで用いられること、当初から社会の存在する資源配分上の歪みが存在し、これを直接的に相殺する手段が皆無の場合、補助的な手段として戦略的な歪みを用いることがあげられる。

<参考文献>

Luo, Z.Q., J.S. Pang. and D. Ralph. (1996), 'Mathematical Programs with Equilibrium Constraints', Cambridge.

清野一治(1993) '規制と競争の経済学', 東京大学出版会