

サンク費用を考慮したプロジェクトの事前・再評価モデル^{*}

Pre- and Re-Evaluation Model of Infrastructure Projects with Sunk Cost^{*}

織田澤利守^{**}・小林潔司^{***}

by Toshimori OTAZAWA^{**} and Kiyoshi KOBAYASHI^{***}

1. はじめに

公共プロジェクトの評価制度として、時間軸上で展開する事前、再、事後評価の3時点における評価手法の導入が進められている。再評価の実施は、時間の経過とともに実現する新しい状況の下でその後のプロジェクトのあり方について見直すことであり、プロジェクトに関する意思決定の柔軟性を確保するという役割を担う。このような再評価は一種の Real Option であり、事前・再評価間を動学的に関連づけるものとして評価に組み入れられなければならない。また、現時点においてプロジェクトを実施すべきか否かは、情報価値の概念を導入した上で検討する必要がある。従来の費用便益分析では、こうしたリスクや将来のオプションに関する価値を評価することはできない。

本研究では、プロジェクトの事前・再評価問題に Real Option Approach¹⁾(以下、ROA)を導入することにより、事前・再評価間の動学的な関連性とプロジェクトをとりまくリスクに対するプレミアムを同時に考慮に入れた動学的なプロジェクト評価手法を提案するとともに、プロジェクト評価の考え方を整理する。

2. 本研究の基本的な考え方

従来の費用便益分析は、プロジェクト評価に関して暗黙のうちに非常に強い前提を設けている。ひとつには、公共プロジェクトへの投資が不可逆性を有

するものであることを無視している点である。一般に、公共プロジェクトへ投入した費用はサンク費用となり、その全てを回収することはできない。このため、再評価時点における意思決定は、初期費用がすでにサンクしている下で行われる。こうした場合、初期の投資行動が続いて行う投資行動に影響を及ぼすという事前・再評価間の動学的な関連性が存在することとなるが、従来の費用便益分析ではこれを適切に考慮することはできない。いまひとつは、「プロジェクトを今実施するか、もしくは2度と実施しないか」という「now-or-never 原則」に基づき、評価が行われるという点である。このため、プロジェクトの実施時期に関する評価やプロジェクトをとりまくリスクに対するプレミアムを考慮できないという限界がある。

本研究では、公共プロジェクトの評価問題を初期投資及び追加的投資の2段階投資に関する意思決定問題として扱う。意思決定主体はある時点において事前評価時点を行い、プロジェクトへ初期投資を実施するか否かを決定し、その後、一定期間が経過した時点に実現する状況のもとで再評価を行い、プロジェクトを継続するか中止するかを決定するものとする。本研究において提案する ROA に基づく評価手法では、事前・再評価間の動学的な関連性を考慮した上で、プロジェクトをとりまくリスクの大きさをプロジェクトの採択基準に反映することが可能となる。

3. 事前・再評価モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

意思決定主体は、初期時点 $t = 0$ において事前評価を行い、初期投資として費用 kC ($0 \leq k \leq 1$) を投入するかどうかを決定する。プロジェクトが採択された場合、一定期間 t' が経過した時点 $t = t'$ に再評価

^{*}キーワード：公共事業評価法，サンク費用

^{**}学生員 工修 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073)

^{***}フェロー 工博 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5071)

を行い、プロジェクトを継続するか、中止するかについて意思決定を行うものとする。継続する場合は追加的費用 $(1-k)C$ が、中止する場合はスクラップ費用として S が必要となる。建設工期は T ($> t'$) である。プロジェクトが実施される場合、時刻 $t = T$ に工事が完了し、施設供用が開始される。プロジェクトにより発生する便益のフローは時間軸上において確率過程に従って変化する。建設が完了し、供用が開始された場合にどれだけの便益（以下、初期便益と呼ぶ）が得られるかは評価時点でのみ観測可能であるとする。再評価時点 $t = t'$ において観測される初期便益のもとでプロジェクトの継続が正当化された場合、建設は時刻 $t = T$ に完了し、その時点で初期便益が発生する。施設共用開始後に発生するプロジェクト便益は初期便益を初期値とする確率過程に従う。簡単化のため、投資費用は時間を通じて一定とし、工期、費用には不確実性は介在しないものとする。

(2) 便益過程の定式化

事前評価時点 $t = 0$ から建設完了時点 T までの期間 $[0, T)$ を第0期、時刻 T 以降の期間 $[T, \infty)$ を第1期と定義する。第0期の任意の時刻 $t \in [0, T)$ における初期便益 $B^\circ(t)$ が幾何ブラウン過程

$$dB^\circ(t) = \mu^\circ B^\circ(t)dt + \sigma^\circ B^\circ(t)dW(t) \quad (1)$$

に従うと仮定する。初期便益の実現値は、事前評価時点 $t = 0$ および再評価時点 $t = t'$ においてのみ観測可能であり、事前評価時点における観測値 $\hat{B}^\circ(0)$ ($\hat{B}^\circ$ は便益 B° の観測値（確定値）であることを現す）を初期値として確率過程 (1) に従う。次に、再評価によってプロジェクトが実施される場合に、第1期の任意の時刻 $t \in [T, \infty)$ において発現するプロジェクト便益を $B(t)$ は、時刻 T における初期便益 $B^\circ(T)$ を初期値とし、幾何ブラウン過程

$$dB(t) = \mu B(t)dt + \sigma B(t)dW(t) \quad (2)$$

に従うと考える。ただし、 $\mu^\circ, \sigma^\circ, \mu, \sigma$ はプロジェクト便益の増加率およびボラティリティを表し、定数であるとする。また、 $W(t)$ は標準ブラウン運動に従うと仮定する。プロジェクトの供用開始時点 T において、プロジェクト便益の初期値が $B^\circ(T)$ であるとき、プロジェクトより将来にわたって獲得される期待総便益の当該期価値 $V_T(B^\circ(T))$ は、

$$V_T(B^\circ(T)) = E_{B^\circ(T)} \left[\int_T^\infty B(\tau) \exp\{-\rho(\tau - T)\} d\tau \right]$$

$$= \frac{B^\circ(T)}{\rho - \mu} \quad (3)$$

と定義される。ただし、積分 (3) は平均値収束の意味で定義される。また、記号 $E_{B^\circ(T)}[\cdot]$ はプロジェクト便益の初期値 $B^\circ(T)$ のもとでの確率過程 (2) に関する期待値操作を表す。一方、再評価において中止が決定された場合にはプロジェクト便益は発生しない。

(3) 再評価を考慮しない費用便益ルール

再評価を実施しない場合のプロジェクト評価を考える。事前評価時刻 $t = 0$ において初期便益の初期値 $\hat{B}^\circ(0)$ のもとでプロジェクトの初期投資を実施することによって獲得できる期待純便益の当該期価値は、

$$\begin{aligned} G(\hat{B}^\circ(0)) &= E_{\hat{B}^\circ(0)}[V_T(B^\circ(T))]e^{-\rho T} - (1-k)Ce^{-\rho T} \\ &= \frac{\hat{B}^\circ(0)e^{(\mu^\circ - \rho)T}}{\rho - \mu} - (1-k)Ce^{-\rho T} \end{aligned} \quad (4)$$

である。ここで、 ρ は社会的割引率であり、 $E_{\hat{B}^\circ}[\cdot]$ は、初期便益の観測値 $\hat{B}^\circ$ のもとでの確率過程 (1) に関する条件付き期待値操作を表す。再評価を実施しない場合、費用便益分析に基づき事前評価時点における初期投資が正当化されるのは、 $G(\hat{B}^\circ(0)) - kC \geq 0$ が成立するときである。したがって、初期投資の実施に関する臨界初期便益 $\tilde{B}_{C_n}^\circ$ は次のように表される。

$$\tilde{B}_{C_n}^\circ = \{(1-k)e^{-\rho t'} + k\}(\rho - \mu)Ce^{(\rho - \mu^\circ)T} \quad (5)$$

(4) 中止オプションを考慮した費用便益ルール

再評価の実施が生み出す中止オプションの価値を考慮した費用便益ルールを定式化する。まずはじめに、再評価問題を考える。再評価問題は、時刻 t' における初期便益の観測値 $\hat{B}^\circ(t')$ のもとでプロジェクトを継続するか中止するかについて意思決定する問題と定義できる。プロジェクトへ追加的投資を投入した場合に獲得できる期待便益の当該期価値は、 $E_{\hat{B}^\circ(t')}[V_T(B^\circ(T))]e^{-\rho(T-t')} - (1-k)C$ である。一方、プロジェクトを中止する場合は、スクラップ費用として S が必要となる。従って、時刻 t' 以降、プロジェクトによってもたらされる期待純便益 $\Phi_{t'}(\hat{B}^\circ(t'))$ は、以下のように定式化できる。

$$\Phi_{t'}(\hat{B}^\circ(t')) = \max \left\{ E_{\hat{B}^\circ(t')}[V_T(B^\circ(T))]e^{-\rho(T-t')} - (1-k)C, \quad -S \right\} \quad (6)$$

意思決定主体は2項のうち大きな値を示す行動を選択する．再評価時点 t' においてプロジェクト継続が正当化される初期便益観測値の集合は， $C_{t'} = \{\hat{B}^\circ(t') | E_{\hat{B}^\circ(t')}[V_T(B^\circ(T))]e^{-\rho(T-t')} - (1-k)C \geq -S\} = \{\hat{B}^\circ(t') | \hat{B}^\circ(t') \geq \bar{B}^\circ\}$ と定義できる．ただし， $\bar{B}^\circ$ は追加的投資に関する臨界便益であり， $\bar{B}^\circ = \{(1-k)C - S\}(\rho - \mu)e^{(\rho - \mu^\circ)(T-t')}$ である．したがって，時刻 t' において観測される初期便益 $\hat{B}^\circ(t')$ が臨界便益 $\bar{B}^\circ$ を上回る場合，追加的投資が実施されプロジェクトは継続される．一方，下回る場合，スクラップ費用が支払われプロジェクトは中止される．

次に，事前評価問題を考える．事前評価問題は，時刻0における初期便益の観測値 $\hat{B}^\circ(0)$ のもとでプロジェクトの初期投資を実施するか否かを決定する問題である．プロジェクトへ初期投資を投入した場合に獲得される期待総便益の現在価値 $\Phi_0(\hat{B}^\circ(0))$ は，

$$\begin{aligned}\Phi_0(\hat{B}^\circ(0)) &= E_{\hat{B}^\circ(0)}[\Phi_{t'}(B^\circ(t'))e^{-\rho t'}] \\ &= E_{\hat{B}^\circ(0)}\left[\max\left\{\frac{B^\circ(t')e^{(\mu^\circ - \rho)(T-t')}}{\rho - \mu} - (1-k)C, -S\right\}\right]e^{-\rho t'} \\ &= \bar{B}^\circ e^{-\rho T} N(-d_2) - \frac{\hat{B}^\circ(0)e^{(\mu^\circ - \rho)t'}}{\rho - \mu} N(-d_1) \\ &\quad + \frac{\hat{B}^\circ(0)e^{(\mu^\circ - \rho)T}}{\rho - \mu} - (1-k)Ce^{-\rho t'}\end{aligned}\quad (7)$$

である．記号 $E_{\hat{B}^\circ(0)}[\cdot]$ は，初期便益の観測値 $\hat{B}^\circ(0)$ のもとでの確率過程(1)に関する期待値操作を表し， $d_1, d_2, N(d)$ は次式で定義される．

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln[\hat{B}^\circ(0)/\bar{B}^\circ] + (\mu^\circ + \sigma^2/2)t'}{\sigma^\circ \sqrt{t'}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma^\circ \sqrt{t'} \\ N(d) &= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\end{aligned}$$

式(7)より， Φ_0 が再評価を考慮しない場合の期待総便益に中止オプションの価値を加えた値となる．中止オプションは， $B^\circ(t)/(\rho - \mu)$ を原資産とする，満期 t' ，行使価格 $\bar{B}^\circ$ のヨーロピアン・プットオプションと類似した構造をもつ．中止オプションの価値を考慮した費用便益分析に基づき，事前評価時点における初期投資が正当化されるのは $\Phi_0(\hat{B}^\circ(0)) - kC \geq 0$ が成立するときである．この不等式が等号で成立するとき，初期投資の実施に関する臨界初期便益 $\tilde{B}_{C_e}^\circ$ を得る．なお， Φ_0 は， B° に関して単調増加関数であるため，臨界初期便益 $\tilde{B}_{C_e}^\circ$ は一意に決まる．

(5) ROAを用いた最善ルール

プロジェクトの実施タイミングを選択できる能力は，プロジェクトを取り巻くリスクが大きい場合より大きな情報価値をもたらす．情報価値を考慮することにより，プロジェクトのタイミングやリスクに関するプレミアムについて検討することができる．いま，仮に意思決定主体が初期便益を常に観測でき，さらにプロジェクトへの初期投資に関して最適に制御することができるという仮定のもとにおける最善ルールを導出する．初期投資実施以前の任意の時刻 t において，初期便益 $\hat{B}^\circ(t)$ が観測されたとする．時刻 t 以降において，最適なタイミングで初期投資を実施した場合に獲得できる将来便益の時刻 t における期待該期価値 $F(\hat{B}^\circ(t))$ は

$$\begin{aligned}F(\hat{B}^\circ(t)) &= \max_{\theta} E\left[\{\Phi_0(B^\circ(\theta)) - kC\} \exp\{-\rho(\theta - t)\}\right] \\ \text{subject to } &\text{式(1) and } B^\circ(t) = \hat{B}^\circ(t)\end{aligned}\quad (8a)$$

と表すことができる．プロジェクトへの初期投資の最適実施時期 θ は初期便益過程(1)のサンプル経路ごとに定義される確率変数であり，記号 $E[\cdot]$ は初期投資の実施時刻 θ に関する期待値操作を表す．問題(8a)-(8b)は将来期待純便益が最大になるようなプロジェクトの最適初期投資タイミングを決定する最適インパルス制御問題となっている．Real Option理論に基づけば，問題(8a)-(8b)は2つの境界条件(Value Matching 条件，Smooth Pasting 条件)のもとで常微分方程式を解く問題へと帰着する．

$$\Psi F = 0 \quad (9a)$$

$$F(B^{\circ*}) = \Phi_0(B^{\circ*}) - kC \quad (9b)$$

$$\frac{dF(B^{\circ*})}{dB^\circ} = \frac{d\Phi_0(B^{\circ*})}{dB^\circ} \quad (9c)$$

なお， Ψ は微分演算子であり

$$\Psi = \mu^\circ \hat{B}^\circ \frac{d}{dB^\circ} + \frac{\sigma^{\circ 2}}{2} \hat{B}^\circ \frac{d^2}{d(B^\circ)^2} - \rho \quad (10)$$

と定義される．ここで， $\lim_{B^\circ \rightarrow 0} F(B^\circ) = 0$ を考慮すれば，式(9a)の一般解を次のように得る．

$$F(B^\circ) = \alpha B^{\circ \beta} \quad (11)$$

ここに， α は正の未定定数であり， $\beta = \{f + \sqrt{f^2 + 8\rho\sigma^{\circ 2}}\}/2\sigma^{\circ 2}$ ， $f = \sigma^{\circ 2} - 2\mu^\circ$ である．式(9b),(9c),(11)より最適臨界初期便益 $B_{R_f}^{\circ*}$ および未定定数 α が求まる．

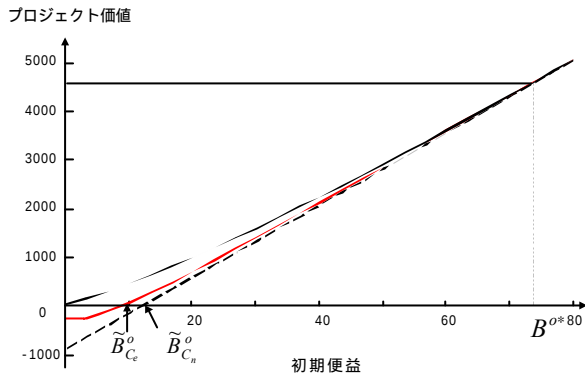


図 - 1 初期便益とプロジェクト価値

(6) ROAを用いた次善ルール

3.(5)では、初期便益は完全に観測可能であり、かつプロジェクトへの初期投資に関する意思決定のタイミングを自由に選択することができるという仮定のもとで議論が行われている。しかし、実際にプロジェクト評価を行う際には、こうした仮定が成立することは困難である。そこで、本節では下記に示すように仮定を緩和し、現行の公共プロジェクト執行システムの枠組みの中における次善のプロジェクト評価手法を提案する。初期便益は評価を実施したときにのみ観測可能であると、事前評価を一定期間 τ 毎に実施すると仮定する。 $k-1$ 回目の事前評価時点 $t_{k-1} = (k-1)\tau$ までプロジェクトが見送られ、 k 回目の事前評価時点 $t_k = k\tau$ において、初期便益 $\hat{B}^o(t_k)$ が観測された場合、時刻 t_k 以降に獲得できる将来便益の時刻 t_k における期待当該期価値 $\Omega_o(\hat{B}^o(t_k))$ は、

$$\begin{aligned} \Omega_o(\hat{B}^o(t_k)) = \max \{ & \Phi_o(\hat{B}^o(t_k)) - kC, \\ & E_{\hat{B}^o(t_k)}[\Omega(B^o(t_{k+1}))]e^{-\rho\tau} \} \quad (12) \\ \text{subject to} \quad & \text{式(1)} \quad \text{and} \quad B^o(t_k) = \hat{B}^o(t_k) \end{aligned}$$

と定式化できる。

4. 数値計算事例

簡単な数値計算事例を示す。以下では、表記の簡便化のため、3.で定式化した4つの評価手法を順にルール1, 2, 3, 4と呼ぶ。なお、各パラメータは $C = 1000, \rho = 0.04, T = 10$ 年, $t' = 5$ 年, $S = -300, \mu^o = 0.01, \mu = 0.03, \sigma^o = \sigma = 0.5, k = 0.5$ とする。図-1には、初期便益と各評価手法に基づき評価されたプロジェクト価値の関係を示す。意思決定の柔軟性をより確保する評価手法ほどプロジェクトをより高く評価している。ルール1と2の間の差は、中止オプシ

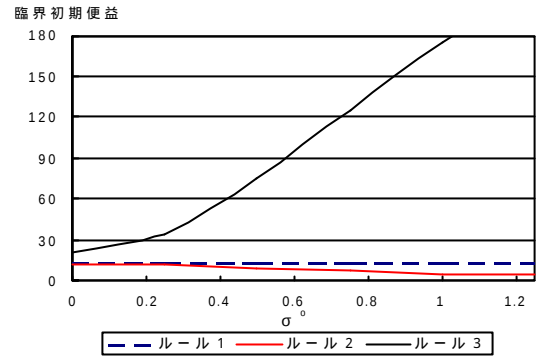


図 - 2 ボラティリティ σ^o と最適臨界初期便益

ンの価値を、ルール2と3の間の差は情報価値を表す。また、ルール1, 2においては、曲線の x 切片がそれぞれ臨界初期便益 $\tilde{B}_{C_n}^o$ および $\tilde{B}_{C_e}^o$ である。一方、ルール3では、ルール2の曲線との接点が最適臨界初期便益 B^{o*} である。次に、初期便益過程に内在する不確実性が初期投資に関する意思決定に及ぼす影響を考察しよう。図-2は、ボラティリティ σ^o と臨界初期便益の関係を表す。再評価を考慮しない費用便益ルールでは、リスクの大きさに関わらず、臨界初期便益は一定となる。一方、再評価の実施が生み出す中止オプションは、 σ^o の増大に伴いその価値は増加する。そのため、中止オプションを考慮した費用便益ルールでは σ^o の増大に伴い臨界初期便益が低下する。情報価値を考慮に入れたルール3では、いずれも σ^o の増大に伴い臨界初期便益は上昇しており、リスクのプレミアムを評価に反映していることがわかる。なお、本稿ではルール4については定式化に留めた。しかし、図-1,2において、ルール4の曲線がルール2と3の間にあることは容易に予想し得る。

5. おわりに

本研究では、プロジェクトの事前・再評価問題に関して4つのプロジェクト評価手法を定式化し、数値計算を通じて、プロジェクト評価の考え方を整理した。そこでは、プロジェクトの事前・再評価問題にReal Option理論を導入し、中止オプションと情報価値を同時に考慮に入れた動学的なプロジェクト評価手法を提案した。

参考文献

- 1) Dixit, A. K. and Pindyck, R.S. (1994) *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.