

動的システム最適配分の基本的特性に関する研究*

On Some Properties of Dynamic System Optimal Assignment *

棟方 章晴[†], 三浦 伸之[†], 赤松 隆[‡]

By Akiharu MUNAKATA[†], Nobuyuki MIURA[†], Takashi AKAMATSU[‡]

1 はじめに

本研究の目的は、動的システム最適(DSO:Dynamic System Optimal)配分の基本的な性質を明らかにすることである。解析の対象は、First-In-First-Out(FIFO)条件を満足するパラレルリンクネットワークである。

従来、DSO 配分に関していくつかの研究がある。Marchant ら [1] は一般的なネットワークに対する DSO 配分問題を数学的に定式化した。しかしこれは、FIFO 条件を無視している、もしくはリンク旅行時間と待ち行列の関係が但しく表現されていないという問題を含んでいた。また、Ziliaskopoulos ら [2] は、FIFO 条件を考慮し、DSO 配分を求める為の数値計算法を導出するのみであり、DSO 配分を持つ基本的な特性を明らかにするには至っていない。桑原ら [3] は、本研究と類似した方向の研究である。結論は概ね正しいが、その解析はヒューリスティクスを用いたものであり、数理的観点から見て疑問点が残されている。

本研究では、DSO 配分を状態方程式に微分不可能関数を含む最適制御問題として定式化し、2 リンクパラレルネットワークにおける最適制御パターンの定性的特徴を明らかにする。また、その最適制御問題がある種の線形計画問題と等価である事を証明し、 n リンクパラレルネットワークの最適制御を求める手段を与える。

2 動的システム最適配分の定式化

2.1 ネットワーク及び交通需要条件

本研究において対象とするネットワークは、ノードが2つ、OD ペアが1つ、リンクが並行に n 本存在するようなパラレルネットワークである。

DSO 配分とは、各リンク $i \in L$ の自由走行時間 $m_i(t)$ 、最大流出率 μ_i 、OD 需要 $q(t)$ を与件として、計画時間帯 $[0, T]$ でネットワーク全体で消費される旅行時間を最小化するような、各リンクへの流入率 $u_i(t)$ を求める問題である。

2.2 待ち行列モデル

本節では、本研究で前提とするリンクの待ち行列モデルについて説明を行なう。

リンク i の累積フロー流入量を $A_i(t)$ 、累積フロー流出量を $L_i(t)$ とする。また、リンク i へのフロー流入率を $u_i(t)$ 、フロー流出率を $v_i(t)$ とする。これらの変数間には以下の関係が成立する。

$$u_i(t) = dA_i(t)/dt, \quad v_i(t) = dL_i(t)/dt, \quad \forall i \in L \quad (1)$$

リンク i の待ち行列台数 $x_i(t)$ は、

$$x_i(t) = A_i(t) - L_i(t), \quad \forall i \in L \quad (2)$$

で与えられる。縦軸に累積交通量、横軸に時間を示したものが、図1に示す累積図である。

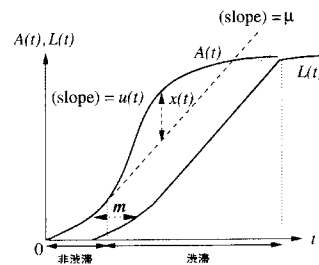


図1: 非渋滞及び渋滞時の累積図

本研究における待ち行列モデルでは、 $x_i(t) > 0$ の場合は $v_i(t) = \mu_i$ 、 $x_i(t) = 0$ の場合は $v_i(t) = u_i(t)$ と仮定する。これにより、リンク旅行時間 $c_i(t)$ は、以下の様に与えられる。

$$c_i(t) = x_i(t)/\mu_i + m_i(t), \quad \forall i \in L \quad (3)$$

$x_i(t) > 0$ である状態を渋滞、 $x_i(t) = 0$ である状態を非渋滞と定義する。非渋滞から渋滞へと状態が移る場合の累積図を図1に示す。図1から、渋滞時と非渋滞時に分けて議論する必要がある。更に、非渋滞時においても $u_i(t)$ と μ_i の関係により飽和、非飽和という状態を分けて議論する必要がある。各々の状態を以下に示す。

$$x_i(t) > 0 : \text{渋滞} \quad (4)$$

$$x_i(t) = 0 \text{ and } u_i(t) < \mu_i : \text{非飽和} \quad (5)$$

$$x_i(t) = 0 \text{ and } u_i(t) = \mu_i : \text{飽和} \quad (6)$$

非渋滞時において、 $u_i(t) < \mu_i$ であれば、リンク i は非飽和状態であるとする。非渋滞時において、 $u_i(t) = \mu_i$ であれば、リンク i は飽和状態であるとする。

*キーワード：交通制御、動的システム配分、最適制御理論、混雑料金

[†] 学生員、東北大学大学院情報科学研究科

[‡] 正会員、工博、東北大学大学院情報科学研究科

る. 図 1 においては, 非渋滞の時間帯で, 渋滞に切り換わる瞬間が飽和状態に相当し, それ以前の状態は非飽和状態に相当する.

待ち行列長の時間変化率を $dx_i(t)/dt = \dot{x}_i(t)$ と置く. $x_i(t)$ の定義より,

$$\dot{x}_i(t) = dA_i(t)/dt - dL_i(t)/dt \quad (7)$$

$$= u_i(t) - v_i(t) \quad (8)$$

となる. これに, 上述の結果を代入すれば, 各リンクの待ち行列の状態方程式は以下の様に与えられる.

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) - v_i(t), \quad \forall i \in L \quad (9)$$

$$v_i(t) = \begin{cases} \mu_i & \text{if } x_i(t) > 0 \text{ or } u_i(t) \geq \mu_i \\ u_i(t) & \text{if } x_i(t) = 0 \text{ and } u_i(t) < \mu_i \end{cases} \quad (10)$$

2.3 DSO 配分問題の定式化

前節までの議論に, 各変数の非負制約, 境界条件, フロー保存条件を付加する事により, 以下の DSO 配分問題 [DSO-parallel] を得る.

$$\min_{\mathbf{u}} \int_0^T \sum_{i \in L} c_i(t) u_i(t) dt + \Phi(\mathbf{x}(T)) \quad (11)$$

subject to

$$(3), (9), (10) \quad \text{and}$$

$$\sum_i u_i(t) = q(t) \quad (12)$$

$$x_i(t) \geq 0, \quad u_i(t) \geq 0, \quad \forall i \in L \quad (13)$$

$$x_i(0) = 0, \quad x_i(T) \text{ は自由}, \quad \forall i \in L \quad (14)$$

この問題は, 式 (10) が微分不可能な点を含むことに注意が必要である. このことは後述する様に, 最適制御に大きな影響を与える.

3 最適制御条件

本節では, まず, DP 原理を用いて Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式を導出する. 次に, HJB 方程式中の未知関数である $\partial V / \partial x_i$ を解析的に導出する. この結果を用いて, 時刻 t 毎の最適制御条件を求める. この各時刻 t の最適制御条件を HJB 方程式に代入し, それを時刻 $T \rightarrow 0$ と後ろ向きに解けば, 最適制御パターンを求める事が出来る.

3.1 HJB 方程式の導出

最適値関数 $V(t, \mathbf{x}(t))$ を

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \equiv \min_{\mathbf{u}(t) \in K(t)} \left[\int_t^T \sum_i c_i(s) u_i(s) ds + \Phi(\mathbf{x}(T)) \right] \quad (15)$$

と定義する. ここで,

$$K(t) = \left\{ \mathbf{u}(t) \mid \sum_i u_i(t) = q(t), \mathbf{u}(t) \geq \mathbf{0} \right\} \quad (16)$$

である. 式 (15) を区間 $[t, t + \Delta t]$ と $[t + \Delta t, T]$ に分割して, DP 原理を適用すると,

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \min_{\mathbf{u}(t) \in K(t)} \left[\sum_i c_i(t) u_i(t) \Delta t + V(t + \Delta t, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \right] \quad (17)$$

となる. $V(t, \mathbf{x}(t))$ が微分可能であると仮定すれば, 以下の HJB 方程式を得る.

$$-\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t) \in K(t)} \left[\sum_i c_i(t) u_i(t) + \sum_i \frac{\partial V(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad (18)$$

3.2 $\partial V / \partial x_i$ の導出

本節では, 式 (18) 中における $\partial V(t, \mathbf{x}) / \partial x_i$ という項が何を意味しているのかを明らかにする. $\partial V(t, \mathbf{x}) / \partial x_i$ は, 時刻 t における単位待ち行列台数の変化に対する最適値関数の変化である. 但し, これは待ち行列台数が増加する場合と減少する場合で異なる値を持つ.

$dx_i(t)$ だけ待ち行列が「増加する時」の $V(t, \mathbf{x}(t))$ の増加分を $\partial V(t, \mathbf{x}(t))_+ / \partial x_i$ と, 右側微係数を用いて書き, $dx_i(t)$ だけ待ち行列が「減少する時」の $V(t, \mathbf{x}(t))$ の増加分を $\partial V(t, \mathbf{x}(t))_- / \partial x_i$ と, 左側微係数を用いて書く事にすれば, $\partial V(t, \mathbf{x}) / \partial x_i$ は

$$\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial V(t, \mathbf{x})_+}{\partial x_i} = s_i(t) - t & \text{if } \dot{x}_i(t) \geq 0 \\ \frac{\partial V(t, \mathbf{x})_-}{\partial x_i} = \tau_i(t) - t & \text{if } \dot{x}_i(t) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

となる. ここで, $s_i(t)$ は時刻 t 以降の最初の飽和終了時刻, $\tau_i(t)$ は時刻 t 以降の最初の渋滞終了時刻である. ただし, $s_i(t), \tau_i(t)$ は, 制御の結果決定する内生変数である.

3.3 流入率 $u_i(t)$ の最適制御条件

時刻 t における最適流入率 $u_i(t)$ は, 式 (18) 右辺の最適化問題を解く事により求まる. 式 (18) の右辺を形式的に書き換えると, 以下の区分線形計画問題 [PLP(t)] を得る.

$$\min_{\mathbf{u}} Z(\mathbf{u}) \equiv \sum_i f_i(u_i(t)) \quad (20)$$

subject to

$$\sum_i u_i(t) = q(t), \quad \mathbf{u}(t) \geq \mathbf{0} \quad (21)$$

where

$$f_i(u_i(t)) \equiv c_i(t) u_i(t) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} (u_i(t) - v_i(t)) \quad (22)$$

式 (22) 第 2 項は, $v_i(t)$ が $u_i(t)$ に関して微分不可能となる. また, $\partial V(t, \mathbf{x}(t)) / \partial x_i$ は $u_i(t)$ の値に応じて, 値が異なる. ここで, この最適化問題に対する一般化された Kuhn-Tucker 条件は, 以下の様に与えられる.

if $x_i(t) > 0$

$$\begin{cases} m_i(t) + s_i(t) - t = \lambda(t) & \text{if } u_i(t) > \mu_i \\ m_i(t) + s_i(t) - t \geq \lambda(t) \geq m_i(t) + \tau_i(t) - t & \text{if } u_i(t) = \mu_i \\ m_i(t) + \tau_i(t) - t = \lambda(t) & \text{if } \mu_i > u_i(t) > 0 \\ m_i(t) + \tau_i(t) - t \geq \lambda(t) & \text{if } u_i(t) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

if $x_i(t) = 0$

$$\begin{cases} m_i(t) + s_i(t) - t = \lambda(t) & \text{if } u_i(t) > \mu_i \\ m_i(t) + s_i(t) - t \geq \lambda(t) \geq m_i(t) & \text{if } u_i(t) = \mu_i \\ m_i(t) = \lambda(t) & \text{if } \mu_i > u_i(t) > 0 \\ m_i(t) \geq \lambda(t) & \text{if } u_i(t) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{and } \sum_i u_i(t) = q(t), \quad u_i(t) \geq 0 \quad (25)$$

4 2リンクネットワークの最適制御

4.1 最適制御条件

本節では、前節で求めた最適制御条件を用いた最適制御パターンの解析結果を示す。紙面の都合上、ここでは $|L| = 2, m_2 = 0, \mu_2 \rightarrow \infty$ である2リンクパラレルネットワークの場合について述べる。また簡単のために、ここでは $s_i(t) = \tau_i(t)$ となるケースを示す。前節までで求めた最適制御条件に上述の状況を導入すると、最適制御条件は以下の様に求まる。

Case 1: if $x_1(t) > 0$ and $x_2(t) = 0$

$$\begin{cases} \lambda(t) = s_1(t) - t \leq m_2 & \text{if } u_1(t) = q(t), \\ & u_2(t) = 0 \\ s_1(t) - t \geq m_2 = \lambda(t) & \text{if } u_1(t) = 0, \\ & u_2(t) = q(t) \end{cases} \quad (26)$$

Case 2: if $x_1(t) = 0$ and $x_2(t) = 0$

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0 & \text{if } u_1(t) = q(t) < \mu_1, \\ & u_2(t) = 0 \\ \lambda(t) = s_1(t) - t \leq m_2 & \text{if } u_1(t) = q(t) > \mu_1, \\ & u_2(t) = 0 \\ s_1(t) - t \leq m_2 = \lambda(t) & \text{if } u_1(t) = \mu_1, \\ & u_2(t) = q(t) - \mu_1 \end{cases} \quad (27)$$

4.2 最適制御パターンの例

今、リンク1の飽和開始時刻を r_1 、終了時刻を s_1 と置く。この時、リンク2の自由旅行時間 m_2 の大きさによって、これらの時刻の間に以下の3つの関係が成立し得る。

$$0 \leq s_1 - m_2 \leq r_1 \leq s_1 \leq T \quad (28)$$

$$0 \leq r_1 \leq s_1 - m_2 \leq s_1 \leq T \quad (29)$$

$$0 \leq r_1 \leq s_1 - m_2 \leq T \leq s_1 \quad (30)$$

関係(28)が成立しているとする。この時、リンク1に全てのフローを流す事が最適である。また、関係(30)が成立しているとする。この場合の最適制御は目的関数内のペナルティ項がどのような性質を持つかに依存する。よって、この関係(30)が成立する場合は扱わない。結論として、関係(29)の成立を仮定した場合の最適制御は図2となる。

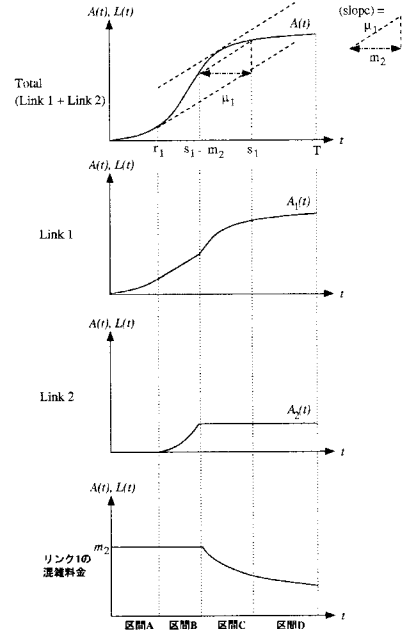


図2: 関係(29)の成立を仮定した場合の最適制御

図2に示す制御パターンは、式(26)、式(27)を各区間で満足するものである。ここでは例として、区間Cにおける最適制御が如何にして求まるかを解説する。区間Cにおいては、リンクは以下の状態にある。

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = 0, \quad \forall t \in (\text{区間C}) \quad (31)$$

また、区間Cでは、 $s_1 - t \leq m_2$ である。これは、前節で導出した最適条件 **Case 2** の第2式に当てはまる。これにより、最適制御は、 $u_1(t) = q(t) > \mu_1, u_2(t) = 0$ と求まる。従って、区間Cにおいてはネットワーク全体への累積流入曲線 $A(t)$ とリンク1への累積流入曲線 $A_1(t)$ が等しくなっている。また、リンク2への累積流入曲線 $A_2(t)$ は傾きが0となっている。

5 動的な混雑料金の導入

DSO 配分では、現実には不可能な、管理者による $u_i(t)$ の操作を仮定しており、DSO 配分を実現する事は不可能である。しかし、混雑料金を導入する事で、利用者の自由な経路選択、即ち DUE 配分の結果として、DSO 配分が得られる。

リンク i に時刻 t において混雑料金 $e_i(t)$ を付加すると、その場合の DUE 配分条件は以下の様に与えられる。

$$\begin{cases} c_i(t) + e_i(t) = \lambda(t) & \text{if } u_i(t) > 0 \\ c_i(t) + e_i(t) > \lambda(t) & \text{if } u_i(t) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

この式は、以下の様に書き換えられる。

$$\begin{cases} e_1(t) = \lambda(t) - x_1(t)/\mu_1 & \text{if } u_1(t) > 0 \\ e_1(t) > \lambda(t) - x_1(t)/\mu_1 & \text{if } u_1(t) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} e_2(t) = \lambda(t) - m_2 & \text{if } u_2(t) > 0 \\ e_2(t) > \lambda(t) - m_2 & \text{if } u_2(t) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

DSO 配分の最適制御条件である式 (26), 式 (27) から導出される $\lambda(t)$ の値を式 (33), 式 (34) に代入する事で, DUE 配分を実現する混雑料金 $e_i(t)$ が求まる。

図 2 において, リンク 1 に付加する混雑料金を示す。ここでは例として, 区間 C における混雑料金が如何にして求まるかを解説する。区間 C においては, 前述の最適制御の結果により, リンクは以下の状態にある。

$$x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, u_1(t) > 0, u_2(t) = 0, \forall t \in (\text{区間 C}) \quad (35)$$

この状態は式 (33) の第 1 式, 式 (34) の第 2 式に相当する。ここで, $s_1(t) - t \geq m_2 = \lambda(t)$ であるので, $\lambda(t)$ の値を用いて,

$$e_1(t) = s_1(t) - t - \frac{x_1(t)}{\mu_1}, e_2(t) > s_1(t) - t - m_2 \quad (36)$$

と求まる。この時, $e_1(t)$ は一意に定まるが, $e_2(t)$ には自由度がある。

6 n リンクネットワークへの拡張

前節までは, 2 リンクネットワークにおける最適制御について論じてきた。これを n リンクネットワークの場合に拡張しようとする時, 式 (23), 式 (24) に対応する場合分けが膨大になる。また, [DSO-parallel] での状態方程式 (10) は, 非飽和・飽和の境界で微分不可能となる。これらの状況では, n リンクネットワークにおいて一般的な制御ルールを導出する事は困難である。本節では, 扱い容易な別のアプローチを示す: 即ち, 時刻を離散化した [DSO-parallel] は, 以下の線形計画問題 [DSO-parallel-LP] と等価である。

$$\min_{\mathbf{u}} \sum_{t=0}^T \sum_{i \in L} (x_i(t) + m_i(t)u_i(t)) + \Phi(\mathbf{x}(T)) \quad (37)$$

subject to

$$x_i(t) - x_i(t-1) = u_i(t) - v_i(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \forall i \in L \quad (38)$$

$$v_i(t) \leq \mu_i, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T-1, \quad \forall i \in L \quad (39)$$

$$\sum_i u_i(t) = q(t), \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (40)$$

$$x_i(t) \geq 0, \quad u_i(t) \geq 0, \quad v_i(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad \forall i \in L \quad (41)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad x_i(T) \text{ は自由}, \quad \forall i \in L \quad (42)$$

[DSO-parallel] と [DSO-parallel-LP] で異なる個所は, [DSO-parallel] の式 (9), 式 (10) と, [DSO-parallel-LP] の式 (38), 式 (39), 式 (41) の対応である。以下では, [DSO-parallel] と [DSO-parallel-LP] の等価性を証明する。まず, 以下の補題が成立する [5]。

Lemma 1 [DSO-parallel-LP] の目的関数 (37) は, $v_i(t)$ に関して単調減少である。□

この Lemma 1 を用いて, [DSO-parallel] の式 (9), 式 (10) と, [DSO-parallel-LP] の式 (38), 式 (39), 式 (41) の組み合わせが等価である事を示し, 両最適化問題の等価性を証明する。

$x_i(t) = 0, u_i(t) < \mu_i$ である時, [DSO-parallel-LP] の式 (38), 式 (39), 式 (41) の組み合わせから $u_i(t) \geq v_i(t)$ が成立する。最適解で $u_i(t) > v_i(t)$ である場合, $x_i(t) > 0$ を得る。Lemma 1 より, この事は, 目的関数値を $u_i(t) = v_i(t)$ の場合と比較して増加させる。故に, $u_i(t) \geq v_i(t)$ が実行可能領域である場合に, $u_i(t) > v_i(t)$ である事は有り得ない。よって,

$$u_i(t) = v_i(t), \quad \text{if } x_i(t) = 0 \text{ and } u_i(t) < \mu_i \quad (43)$$

を得る。これは式 (10) の第 2 式と一致する。

$x_i(t) > 0$ である場合もほぼ同様に, Lemma 1 から,

$$v_i(t) = \mu_i, \quad \text{if } x_i(t) > 0 \text{ or } u_i(t) \geq \mu_i \quad (44)$$

を得る。これは式 (10) の第 1 式と一致する。

よって, [DSO-parallel] の式 (9), 式 (10) と, [DSO-parallel-LP] の式 (38), 式 (39), 式 (41) の組み合わせが等価である事が示された。

7 おわりに

本研究では DSO 配分を状態方程式に微分不可能関数を含む最適制御問題として定式化し, 2 リンクパラレルネットワークにおける最適制御パターンの定性的特徴を明らかにした。また, その最適制御問題と等価な線形計画問題を定式化し, n リンクパラレルネットワークの最適制御を求める手段を与えた。線形計画問題を定式化した事により, n リンクパラレルネットワークにおける一般的な制御ルールを導出する事は, 今後の重要な課題である。

参考文献

- [1] D.K.Merchant and G.L.Nemhauser, "A Model and an Algorithms for the Dynamic Traffic Assignment Problem," *Transportation Science*, Vol. 12, pp.183-199, 1978.
- [2] A.K.Ziliaskopoulos, "A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem," *Transportation Science*, Vol. 34, pp.1-12, 2000.
- [3] 桑原雅夫, 吉井稔雄, 熊谷香太郎, "動的システム最適配分とランプ流入制御に関する研究 - 簡略ネットワークにおける基礎的分析 -, " *土木学会論文集*, No.667/IV, pp.59-71, 2001.
- [4] 三浦 伸之, "動的システム最適配分の基本的特性に関する研究", *東北大学情報科学研究科修士論文*, 2001.
- [5] 棟方 章晴, "動的システム最適配分と線形計画問題," *東北大学情報科学研究科ワーキングペーパー*, 2001.