【土木計画学研究・講演集 No. 24(1) 2001年11月】

物量的結合生産を持つ動的産業連関モデルとその特性*

Dynamic Input-Output Model with Physical Joint-Production and Its Property*

加河茂美**・森口祐一***・稲村肇****

By Shigemi KAGAWA**・Yuichi MORIGUCHI***・Hajime INAMURA****

1. はじめに

長期経済成長が一体どのようなメカニズムの下で成り立っているのか，という疑問に対して数多くの経済学者が実に様々な経済模型や経済仮説をうち立ててきた．Wassily Leontief[1),2)]によって開発された 動的産業連関モデルもその経済模型の一つであると言える．

この動的 産業連関モデルは現在までに数多くの修正，追加が行われ，その有用性，汎用性は高まっている．例えば，Morishima[3)]やSolow[4)]による斉一成長経路の安定性条件に関する議論に加えて，Jorgenson[5)]の二重安定性定理はインフレーションの理論に一定の切り口を与えているし，Johansen[6)]，Åberg & Persson[7)]の資本設備の装着に関する潜伏期間を明示的に扱った修正動的産業連関モデルは多部門動学分析の幅を大きく広げている．また，ten Raa[8)]は投入係数行列が時間を超えた分配によって与えられる最も一般的なタイムラグモデルを提案している．最近では，内生的成長理論を動的産業連関理論に帰着させようとする研究が盛んになされている(Kurz & Salvadori[9)], Los[10)]を参照されたい)．

しかしながら不幸にも，これらのモデルは全て*Single Product Model*であり本質的な問題を有している．それは，結合生産の問題である．結合生産の問題となると，自然とSraffa-von Neumann型の*Multi Product Model*に入り込み，斉一利潤率の下での均衡価格の存在意義についての議論に巻き込まれる(例えば，Steedman[11)]を参照されたい)．この議論は当然重要な事ではあるが，産業連関分析でしばしば採用される技術諸仮説の下で経験分析を積み重ねていくことも必要である．静的な経験分析の観点からは，Gigantes[12)]やten Raa et al.[13)]などによって議論がなされてきたが，動的な観点からは不幸にも今まで議論がなされてこなかった．

過去ある いは将来の廃棄物問題を考える上では，主生産物・副次生産物の産出成長と連動して屑・副産物，廃棄物等の結合生産がどのような成長軌道を描くのかという問いが決定的に重要となることは言うまでもない．

そこで本 研究では，屑・副産物，廃棄物などのような物量的な結合生産を持つ単純な動的産業連関モデルを提案し，そのいくつかの特性を探ることを目的とする．

2. 物量的結合生産を持つ動的産業連関モデル

本研究では，離散的な経済変動を想定し動的産業連関モデルを組み立てていく．まず，Leontiefの動的方程式が

$$q_{it}^{p}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{p}q_{jt}^{p}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{p}\left(q_{j,t+1}^{p}-q_{jt}^{p}\right)+f_{it}^{p}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

として定式化されることは良く知られている．ここで，q_{it}^{p}と$q_{i,t+1}^{p}$はそれぞれt期，$t+1$期における主生産物・副次生産物iの総生産量(金銭ベース;100万円)を表している．a_{ij}^{p}とb_{ij}^{p}はそれぞれ対応する投入係数及び資本係数を表している．f_{it}^{p}はt期における主生産物・副次生産物iの最終需要である．また，上付記号のpは主生産物・副次生産物を表している．

*Key Word：環境計画，地球環境問題

** 正会員 博(学) 国立環境研究所
***正会員 工博 国立環境研究所
(〒305-0053 茨城県つくば市小野川 16-2
TEL. 0298-50-2843, E-mail. kagawa.shigemi@nies.go.jp, moriguti@nies.go.jp)
****フェロー会員 工博 東北大学大学院教授 情報科学研究科
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06
TEL. 022-217-7497, E-mail. inamura@plan.civil.tohoku.ac.jp)

式(1)からも明らかなように中間財，資本財に関する技術進歩については考慮していない．

さらに本研究では，t期における物量ベースでの結合生産物の投入産出バランス式を

$$q_{it}^{b}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{b}q_{jt}^{p}+f_{it}^{b}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2}$$

として定式化する．ここで，q_{it}^{b}はt期における屑・副産物iの総生産量(物量ベース;トン)を表している．a_{ij}^{b}は，主生産物・副次生産物jを1単位生産するために必要とされる屑・副産物iの投入量(トン)を示しており，従って$\sum a_{ij}^{b}q_{jt}^{p}$は$t$期における屑・副産物$i$の中間投入を表している．$f_{i}^{b}$は結果的に$t$期における屑・副産物$i$の最終処分に相当するものを表している(このアイデアは，Kagawa et al.[14]によって提案されているものと同じである)．また，上付記号bは屑・副産物を表しているので注意されたい．

物量的結合生産を持つ動的産業連関モデルは式(1)と式(2)を帰着させることによって得られる．そこで本研究では，混合技術仮説を採用して両方の方程式を結び付ける．主生産物・副次生産物iと屑・副産物iのマーケットシェアが産業横断的，時間的に十分に安定的であると仮定すると，

$$q_{it}^{b}=\varphi_{i}q_{it}^{p}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

の関係が成り立つ．式(1)の右辺を式(2)の右辺第一項に代入し，その後，式(3)をq_{it}^{p}について解いた関係式を代入すると，

$$\begin{aligned}q_{it}^{b}=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{b}a_{jk}^{p}\varphi_{k}^{-1}q_{kt}^{b}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{b}b_{jk}^{p}\varphi_{k}^{-1}q_{k,t+1}^{b}\\&-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{b}b_{jk}^{p}\varphi_{k}^{-1}q_{kt}^{b}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{b}f_{it}^{p}+f_{it}^{b}\end{aligned}\tag{4}$$

を求めることができる．上式(4)が物量的結合生産を持つ動的産業連関モデルの基本方程式になる．この要素単位での方程式では見にくいため，行列とベクトルを用いて表現する．

$$\mathrm{q}_{t}^{b}=\mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{p}\Lambda^{-1}\mathrm{q}_{t}^{b}+\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1}\mathrm{q}_{t+1}^{b}-\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1}\mathrm{q}_{t}^{b}+\mathrm{A}^{b}\mathrm{f}_{t}^{p}+\mathrm{f}_{t}^{b}\tag{5}$$

この基本方程式から，2種類の動学モデルを導出することが可能である．すなわち，後方タイムラグモデル(*Backward Time Lag Model*)と前方タイムラグモデル(*Forward Time Lag Model*)である．それぞれ，

$$\mathrm{q}_{t}^{b}=(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{p}\Lambda^{-1}+\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1})^{-1}\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1}\mathrm{q}_{t+1}^{b}\tag{6}$$

$$\mathrm{q}_{t+1}^{b}=\Lambda\mathrm{B}^{-p}\mathrm{A}^{-b}(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{p}\Lambda^{-1}+\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1})\mathrm{q}_{t}^{b}\tag{7}$$

として定式化できる．ここで，Iは$(n\times n)$型の単位行列を表しており，B^{-p}はB^{p}の逆行列を表している．Kendrick[15]が資本係数行列の特異性について指摘し，行列分割法による回避方法を提案しているように，一般的にはB^{p}は一意な逆行列を持たないことに注意されたい．本研究では，極めて特殊ではあるがこの資本係数行列が逆行列を持つという想定に立って議論を進めている．またこの段階では，f_{t}^{p}とf_{t}^{b}については無視されていることに注意されたい．このとき，この動的方程式の斉一成長経路上の安定性を決定するものは，$\mathrm{D}=(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{p}\Lambda^{-1})^{-1}\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1}$の固有値である．特に，$(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{p}\Lambda^{-1})$がHAWKINS-SIMONの条件を満たしていると想定してください．そのとき，$(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{p}\Lambda^{-1})^{-1}\geq 0$が明らかに成立し，$\mathrm{A}^{b}\mathrm{B}^{p}\Lambda^{-1}\geq 0$の条件とから，Dが非負行列であることが分かる．従ってFROBENIUSの定理から，Dは最大非負固有値$\mu(\mathrm{D})=\mu_{1}$とそれに対応する固有ベクトルu_{1}を有する．最大非負固有値以外の固有値$\mu_{i=2,\cdots,n}$は一般的には複素数になる可能性が高いがその絶対値で見れば，以下のような大小関係を導きだすことができる．

$$\mu(\mathrm{D})\geqq|\mu_{2}|\geqq|\mu_{3}|\geqq|\mu_{3}|\geqq\cdots\geqq|\mu_{n}|\tag{8}$$

当然，これらの固有値に対応する固有ベクトルもそれぞれ$u_{i=2,\cdots,n}$として求められる．これらの固有ベクトルを用いて式(7)をスペクトル分解すると

$$z_{i,t+1}^{b}=\left(\frac{\mu_{i}+1}{\mu_{i}}\right)z_{it}^{b}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{9}$$

が得られる．z_{it}^{b}はそれぞれ対応する固有ベクトル上のスペクトルノルムを示している．上式(9)から基本的にはSolow[4]によって複素平面上で分類分けされた通常の動的産業連関モデルの安定性条件$|(\mu_{i}+1)/\mu_{i}|\leqq 1$で同様に説明ができる．式(9)における初期値を$z_{i0}^{b}$とすると，その解は

$$z_{it}^{b}=z_{i0}^{b}\left(\frac{\mu_{i}+1}{\mu_{i}}\right)^{t}\quad(0\leqq t<+\infty)\tag{10}$$

となる．次に，式(5)から導かれる前方タイムラグモデルの一般解を求めよう．今，固有ベクトル$u_{i=1,2,\cdots,n}$からなる正規直交行列をUが存在し，主生産物・副次生産物の最終需要によって得られる$\Lambda\mathrm{B}^{-p}\mathrm{f}_{t}^{p}$と屑・副産物の最終処分によって得られる

$\Lambda B^{-p}A^{-b}f_t^b$がそれぞれ，この正規直交行列によって$w_{it}^p$と$w_{it}^b$として完全に分解されたとする．そのとき，それぞれの初期値w_{i0}^p，w_{i0}^bと式(10)から

$$z_{it}^b=\left(z_{i0}^b+w_{i0}^p+w_{i0}^b\right)\cdot\left(\frac{\mu_i+1}{\mu_i}\right)^t \quad (0\leqq t<+\infty) \quad (11)$$

を得ることができる．この式(11)が資本の蓄積に伴って結合生産される屑・副産物に関する斉一成長経路の安定性に重要な役割を果たしている．

3．主生産物・副次生産物の斉一成長経路と屑・副産物の斉一成長経路の比較

通常の動的産業連関モデルの安定性条件においては，$(I-A^p)^{-1}B^p$の固有ベクトル$\lambda_{i=1,2,\cdots,n}$とそれに対応する固有ベクトル$v_{i=1,2,\cdots,n}$が重要な役割を果たすことは良く知られている．今，以下の通常の前方タイムラグモデル

$$q_{t+1}^p=B^{-p}\left(I-A^p+B^p\right)q_t^p-B^{-p}f_t^p \quad (12)$$

が固有ベクトル$v_{i=1,2,\cdots,n}$からなる正規直交行列Vによってスペクトル分解されたとすると，

$$z_{i,t+1}^p=\left(\frac{\lambda_i+1}{\lambda_i}\right)z_{it}^p \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (13)$$

が得られる．従って，式(10)と同様に，式(13)に示される動的方程式の初期値をz_{i0}^pとすると，

$$z_{it}^p=z_{i0}^p\left(\frac{\lambda_i+1}{\lambda_i}\right)^t \quad (0\leqq t<+\infty) \quad (14)$$

として解を求めることができる．式(11)の所でも説明がされたように，もし，$B^{-p}f^p$が正規直交行列Vによって，正規直交基底上でc_{it}^pとして完全に分解されたとするならば，それぞれの初期値c_{i0}^pから方程式(12)は最終的に

$$z_{it}^p=\left(z_{i0}^p+c_{i0}^p\right)\cdot\left(\frac{\lambda_i+1}{\lambda_i}\right)^t \quad (0\leqq t<+\infty) \quad (15)$$

という一般解を持つ．

式(15)に示される主生産物・副次生産物に関する斉一成長経路と式(11)に示される屑・副産物に関する斉一成長経路を比較することによって，いくつかの特性を導き出すことが可能である．今，式(11)及び式(15)の解が$t\to+\infty$に対して十分に安定的であるということを想定させてください．つまり，数学的に言えば，Solow[4]の安定性条件に従い，複素平面上に描かれる中心(−1,0)，半径が$|1+1/\mu_1|$あるいは$|1+1/\lambda_1|$の円の閉集合の中にその他全ての固有値の逆数$1/\mu_{i=2,\cdots,n}$, $1/\lambda_{i=2,\cdots,n}$が入るものとしてください．このとき，式(11)と式(15)のベクトルノルムはそれぞれ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(z_{it}^b\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(z_{i0}^b+w_{i0}^p+w_{i0}^b\right)^2\cdot\left(\frac{\mu_i+1}{\mu_i}\right)^{2t}} \quad (16)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(z_{it}^p\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(z_{i0}^p+c_{i0}^p\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_i+1}{\lambda_i}\right)^{2t}} \quad (17)$$

として定式化される．上式(16)と(17)から，主生産物・副次生産物の産出成長率γ^pと屑・副産物の産出成長率γ^bの比を求めると，

$$\frac{\gamma^b}{\gamma^p}=\frac{d\left[\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(z_{it}^b\right)^2}\right]\Big/dt}{d\left[\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(z_{it}^p\right)^2}\right]\Big/dt} \quad (18)$$

となる．我々が頻繁に使う"経済成長"という言葉の正確な含意は正確には主生産物・副次生産物に関する実質GDPの伸び率あるいは商品産出の伸び率を表しており，特に後者に焦点を当てればそれは式(18)の分母に相当するであろう．式(18)の分子は結合生産に伴う屑・副産物の産出伸び率を表しており，その値を主生産物・副次生産物の産出伸び率で除すことによって屑・副産物の相対的な産出成長率を求めることができる．この相対的な産出成長率が経済成長と屑・副産物，廃棄物の排出変化を議論する上で重要な指標となることは言うまでもない．次に，この指標を用いてどのようなことが議論できるのか具体的に探っていく．議論を簡潔に進めていくために，FROBENIUS根のみに焦点を当てる．このとき，式(18)は，

$$\frac{\gamma^b}{\gamma^p}=\left|\frac{z_{10}^b+w_{10}^p+w_{10}^b}{z_{10}^p+c_{10}^p}\right|\cdot\frac{\log\sigma_1}{\log\pi_1}\cdot\left(\frac{\sigma_1}{\pi_1}\right)^t \quad (19)$$

として表すことができる．ここで，$\sigma_1=(\mu_1+1)/\mu_1$，$\pi_1=(\lambda_1+1)/\lambda_1$．この式(19)から次のような命題を得ることができる．

命題1

$\left|\frac{z_{10}^b+w_{10}^p+w_{10}^b}{z_{10}^p+c_{10}^p}\right|\cdot\frac{\log\sigma_1}{\log\pi_1}>1$，$\sigma_1<\pi_1$が成り立つとき，

$\gamma^{b^*}/\gamma^{p^*}=1$ となるような点が必ず存在する．この点は主生産物・副次生産物の産出成長率と屑・副産物の産出成長率が一致する特殊な点である．

証明

$\sigma_1<\pi_1$ が成り立つので式(19)は明らかに単調減少関数である．従って閉じた定義域$0\leqq t\leqq\alpha$ 上においては$t=0$のとき最大値$\left|\dfrac{z_{10}^b+w_{10}^p+w_{10}^b}{z_{10}^p+c_{10}^p}\right|\cdot\dfrac{\log\sigma_1}{\log\pi_1}$ を持つので$\left|\dfrac{z_{10}^b+w_{10}^p+w_{10}^b}{z_{10}^p+c_{10}^p}\right|\cdot\dfrac{\log\sigma_1}{\log\pi_1}>\dfrac{\gamma^{b^*}}{\gamma^{p^*}}=1$（∵仮定）となるような$\beta$ $(0\leqq\beta\leqq\alpha)$が存在する．式(19)から

$$\beta=\log\left[\left|\frac{z_{10}^p+c_{10}^p}{z_{10}^b+w_{10}^p+w_{10}^b}\right|\cdot\frac{\log\pi_1}{\log\sigma_1}\right]\cdot\log\left[\frac{\pi_1}{\sigma_1}\right] \quad (20)$$

を導き出すことができる．

命題2

$0<\left|\dfrac{z_{10}^b+w_{10}^p+w_{10}^b}{z_{10}^p+c_{10}^p}\right|\cdot\dfrac{\log\sigma_1}{\log\pi_1}<1$，$\sigma_1>\pi_1$ が成り立つとき，$\gamma^{b^*}/\gamma^{p^*}=1$ となるような点が必ず存在する．この証明は，式(19)の単調増加性を用いて命題1の方法と全く逆のやり方をすれば容易にできる．

この命題1,2を図で示すとそれぞれ**図-1**と**図-2**のように示される．**図-1**の区間ABはγ^b/γ^pの値が1よりも大きな領域を示しており，この領域の中では常に屑・副産物の産出増加率が主生産物・副次生産物の産出増加率を上回っている．区間ABを過ぎ，区間BCの領域に入ると今度は屑・副産物の産出増加率が主生産物・副次生産物の産出増加率を下回るようになる．この逆の現象も起こりえる．**図-2**がそれを示している．最初の区間DEの領域では屑・副産物の産出増加率が主生産物・副次生産物の産出増加率を下回っており，点Eを通り過ぎてからはその勢いを増して屑・副産物の産出増加率は主生産物・副次生産物の産出増加率を急速に上回っていく．

4．おわりに

本論文では，屑・副産物の物量バランス式をLeontiefの動的方程式に帰着させることにより，物量的結合生産を持つ単純な動的産業連関モデルを提案することができた．また，そのモデルからいくつかの特性も導出することができた．

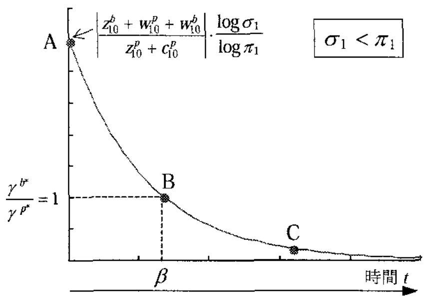

図-1　屑・副産物の産出成長率の変動パターンI

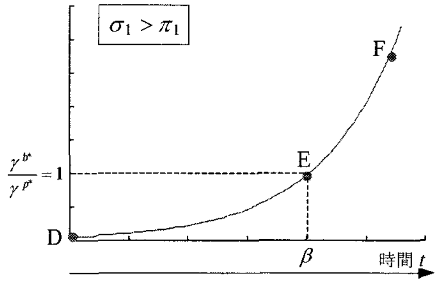

図-2　屑・副産物の産出成長率の変動パターンII

［参考文献］

1) Leontief, W. : Dynamic Analysis, in *Studies in the Structure of the American Economy*, Chapter 3, New York: Oxford University Press, pp.53-90 and 486-493, 1953.
2) Leontief, W. : The Dynamic Inverse, in A. P. Carter and A. Brody (eds), *Contributions to Input-Output Analysis*, Chapter 1, Amsterdam, North Holland Publishing Company, pp.17-46, 1970.
3) Morishima, M. : Prices, Interest and Profits in a Dynamic Leontief System, *Econometrica*, Vol.26 (3), pp.358-380, 1958.
4) Solow, R. : Competitive Valuation in a Dynamic Input-Output System, *Econometrica*, Vol.27 (1), pp.30-53, 1959.
5) Jorgenson, D. : Stability of a Dynamic Input-Output System, *Review of Economic Studies*, Vol.28, pp.105-116, 1961.
6) Johansen, L. : On the Theory of Dynamic Input-Output Models with Different Time Profiles of Capital Construction and Finite Life-Time of Capital Equipment, *Journal of Economic Theory*, Vol.19, pp.513-533, 1978.
7) Åberg, M. & Persson, H. : A Note on a Closed Input-Output Model with Finite Life-Times and Gestation Lags, *Journal of Economic Theory*, Vol.24, pp.446-452, 1981.
8) Ten Raa, Th. : Dynamic Input-Output Analysis with Distributed Activities, *Review of Economics and Statistics*, Vol.68, pp.300-310, 1986.
9) Kurz, H. & Salvadori, N. : The Dynamic Leontief Model and the Theory of Endogenous Growth, *Economic Systems Research*, Vol.12, pp.255-265, 2000.
10) Los, B. : Endogenous Growth and Structural Change in a Dynamic Input-Output Model, *Economic Systems Research*, Vol.13, pp.3-34, 2001.
11) Steedman, I. : Positive Profits with Negative Surplus Value, *Economic Journal*, Vol.85, 114-123, 1975.
12) Gigantes, T. : The Representation of Technology in Input-Output Systems, *Contributions to Input-Output Analysis*, Chapter 14, Amsterdam: North-Holland Publishing, pp.270-290, 1970.
13) Ten Raa, Th., Chakraborty, D. & Small, J. A. : An Alternative Treatment of Secondary Products in Input-Output Analysis, *Review of Economics and Statistics*, Vol.66, pp.88-97, 1984.
14) Kagawa, S : Demand & Supply-Driven Allocation Model Based on a Hybrid Rectangular Input-Output Framework with Physical Joint-Production and Its Structural Change, Working paper, 2001.
15) Kendrick, D. : On the Leontief Dynamic Inverse, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.86, pp.693-696, 1972.