【土木計画学研究・講演集 No. 24(1) 2001年11月】

予算制約を考慮した道路舗装の修繕ルール*

THE REPAIRING RULES FOR PAVEMENTS UNDER BUDGET CONSTRAINTS *

田村謙介**・慈道充***・小林潔司****
by Kensuke TAMURA**, Mitsuru JIDOU*** and Kiyoshi KOBAYASHI****

1. はじめに

道路舗装の修繕投資は，社会的費用を含むライフサイクルコストが最小になるタイミングで行われることが望ましい．実際，近年導入されてきている舗装管理システム(Pavement Management System:PMS)の概念ではライフサイクルコストを最小にするように舗装の設計，維持修繕を行うことを理想としている．しかし，現状では，多くの道路管理者において，修繕投資を行う区間の優先順位を決めて，限られた各年度の予算制約の中で優先順位の高い区間から修繕を行うという方法が取られており，ライフサイクルコストの最小化は図られていない．

一方，筆者らは，ある単一の道路区間を対象として道路舗装の劣化過程の不確実性を考慮した最適修繕ルールを求める方法論を提案した[1)]．しかし，この方法論は修繕予算を自由に調達できるという条件の下で開発されたものである．現実には，道路管理者は限られた予算の中で，多くの道路区間を対象とした道路舗装を行うことを余儀なくされている．このような状況の下で，道路網全体における道路舗装の劣化過程を考慮しながら，望ましい舗装修繕予算や修繕順序を決定するための実用的な舗装管理システムを構築することが求められている．

本研究は，道路舗装の管理システムの設計を念頭におきながら，道路舗装の合理的な修繕順位を決定する実用的なルールを開発することを目的とする．そのため，まず修繕予算が十分にある場合を想定し，ライフサイクル費用を最小にするような道路舗装の修繕順位を決定するモデルを提案する．その上で，道路管理者に修繕予算制約の中で，ライフサイクルコストを可能な限り小さくしうるような修繕順位決定ルールを求める実用的な方法を提案する．

2. 劣化過程のモデル化

道路管理者は，初期時点から無限に続く時間軸上でN個の管理道路区間の物理的サービス水準(以下，機能水準)と需要水準を観察しながら，舗装の機能水準を回復するために修繕投資を行う区間を決定する．道路舗装の機能水準が低下すれば，可変費用が増加する．舗装の機能水準は交通需要に影響を及ぼさないと仮定する．各区間の交通需要はある定常過程に従って変動すると仮定する．一方，道路舗装の機能水準は交通需要や自然的劣化により時間を通じて低下していく．したがって，道路舗装の劣化過程は累積交通量，自然的劣化という２種類の不確実性に直面する．各道路区間$i(i=1,2,\cdots,N)$の初期時点から時刻tまでの累積需要を$s_i(t)$と表す．累積交通需要は伊藤過程

$$ds_i(t) = \beta_i dt + \sigma_{i1} dW_{i1}(t) + \cdots + \sigma_{in} dW_{in}(t) \quad (1a)$$
$$s_i(0) = s_{i0} \quad (1b)$$

に従うと考える．ここで$W_{i1}(t),\cdots,W_{in}(t)$は互いに独立なウィナー過程である．ウィナー項により各道路区間の交通需要の確率的相関を表現する．時刻tにおける交通需要は$ds_i(t)$と表される．

次に，道路区間iの道路舗装の機能水準の修繕過程をモデル化しよう．道路舗装の機能水準を一次元的に表すパラメータzが，区間$(0,Z)$で定義されているとする．修繕投資が時刻$0 \leq \theta_{i1} < \theta_{i2} < \cdots <$

*キーワード：土木施設維持管理
**学生員　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL・FAX 075-753-5073)
***正員　理修　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073)
****正員　工博　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL・FAX 075-753-5071)

$\theta_{ij} < \cdots$において実施され，時刻θ_{ij}に道路舗装の機能水準が所与の値$\bar{Z}_i$に改善されると考える．修繕投資後の機能水準はある値$\bar{Z}_i$に固定されていると考える．修繕投資直前の機能水準を$z(\theta_{ij}^-)$と表す．以上のような修繕投資が行われる場合，道路区間iの舗装の機能水準は確率過程

$$dz_i(t) = -\rho_i ds_i(t) - \delta_i dt - \eta_i dq_i(t) + \sum_{j\geq 1}\{\bar{Z}_i - z_i(\theta_{ij}^-)\}\iota(t-\theta_{ij}) \tag{2a}$$

$$dq_i(t) = \begin{cases} u_i & (\text{確率 } \lambda_i dt) \\ 0 & (\text{確率 } 1-\lambda_i dt) \end{cases} \tag{2b}$$

$$z_i(0) = z_{i0} \tag{2c}$$

に従うと仮定する．$\iota(\cdot)$はディラックの測度(Dirac measure)であり，$t = \theta_{ij}$の時にのみ確率測度1を，それ以外の時は確率測度0を与える．右辺第1項は交通需要による劣化，第2項は自然的劣化のトレンド，第3項は自然的劣化による不確実性を表している．第3項は強度がλ_i，ジャンプの大きさがu_iのポアソン過程を示している．u_iは確率変数である．

3. 最適修繕ルールの定式化

(1) 最適修繕問題

修繕予算が十分にある場合，各道路区間の修繕ルールは他の道路区間の修繕ルールに影響を及ぼさない．したがって，道路管理者は期待ライフサイクルコストが最小になるように各道路区間の修繕を行うことにより，管理道路全体のライフサイクルコストを最小化できる．各区間のライフサイクルコストは可変的用者費用と修繕投資費用で構成される．機能水準がzの時の利用者1台により生じる可変的費用を$c(z)$と表す．よって，時刻tにおける区間iの可変的費用は$c(z_i(t))ds_i(t)$と表される．一方，時刻θ_{ij}において機能水準が$z(\theta_{ij}^-)$である道路に対して修繕投資により機能水準を$\bar{Z}_i$まで改善する場合を考えよう．オーバーレイ，切削オーバーレイ，打ち換えなどの修繕工法のうち，修繕直前の機能水準$z(\theta_{ij}^-)$により実施工法が決定されるとする．さらに，1つの工法については修繕費用が一定であると仮定する．したがって，修繕費用$F(z(\theta_{ij}^-))$は，修繕工法の数に対応したいくつかの値のみをとる．いま，管理主体は全道路区間の現在価値に割り引いた期待ライフサイクルコストの合計の最小化を試みると考える．管理主体が最小化を試みる汎関数は，

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{V}) &= \sum_i E_{V_i}\Big[\int_0^\infty c(z_i(t))\exp(-\alpha t)ds_i(t) \\ &\quad + \sum_{i\geq 1} F(\theta_{ij}^-)\exp(-\alpha\theta_{ij})\Big] \\ &= \sum_i J_i(V_i) \end{aligned} \tag{3}$$

と定義される．ただし，$V_i = \{\theta_{ij} | j \geq 1\}$はインパルス制御変数であり，$\boldsymbol{V} = \{V_1, V_2, \cdots, V_N\}$である．$\alpha$は瞬間的割引率である．修繕予算に制約がない場合には，管理主体は期待ライフサイクルコスト$J_i(V_i)$を最小化するように各道路区間の舗装を修繕することにより，全体のライフサイクルコスト$J(\boldsymbol{V})$の最小化を達成できる．すなわち，管理主体が最小化を試みる汎関数は

$$\begin{aligned} J_i(V_i) &= E_{V_i}\Big[\int_0^\infty c(z_i(t))\exp(-\alpha t)ds_i(t) \\ &\quad + \sum_{i\geq 1} F(\theta_{ij}^-)\exp(-\alpha\theta_{ij})\Big] \end{aligned} \tag{4}$$

である．したがって，道路管理者が解くべき問題は次式で表される．

$$\left.\begin{array}{l} \min_{V_i}\{J(V_i)\} \\ \text{subject to} \\ eqs.(1a),(1b),(2a),(2b), \text{ and } (2c) \end{array}\right\} \tag{5}$$

以上の問題は，システムの状態が離散的な瞬間的時刻におけるジャンプ（インパルス）で制御される最適インパルス制御問題となっている．本研究で定式化した問題では，インパルス時刻（「いつ修繕投資を実施するか」）が制御変数となる．時刻tの機能水準を$z_i(t) = z_i$と表そう．区間iの最適値関数$\Phi_i(z_i)$を時刻tから最適インパルス制御を行使することで達成可能な区間iの最小期待総費用により定義しよう．時刻tの現在価値で評価した最適値関数は

$$\begin{aligned} \Phi_i(z_i) = \min_{V_i} E\Bigg[&\int_t^\infty c(z_i(u))\exp\{-\alpha(u-t)\}ds_i(u) \\ &+ \sum_{j\geq j_t+1} F(z_i(\theta_{ij}))\exp\{-\alpha(\theta_{ij}-t)\}\Bigg] \end{aligned} \tag{6}$$

と定式化できる．ただし，$u \geq t$は時刻，j_tは初期時点から時刻tまでに修繕投資を行った回数を表す．したがって，任意の$j \geq j_t + 1$に対して$\theta_{ij} \geq t$が成立する．最適値関数は期待総費用の最小値を表していることより，一般的に

$$\Phi_i(z_i) - \{F(z_i(\theta_{ij})) + \Phi_i(\bar{Z}_i)\} \leq 0 \tag{7}$$

が成立する．時刻tにおいて修繕投資が行われるのは，その時刻に修繕投資を行うことにより，期待総

費用が最小化される時のみであり，その時式(7)は等号で成立する．その時の機能水準z_i^*を最適臨界機能水準と呼ぶと，機能水準$z_i(t)$がz_i^*を上回っている間は修繕を見送り，最適臨界機能水準z_i^*まで低下したら修繕を行うことで最適修繕が実現される．

(2) モンテカルロシミュレーション

式(5)で表現された最適修繕問題を解析的に解くことはできないので，モンテカルロシミュレーションにより解を導出する．単位期間をΔtとし，各期$t = t_k$における各道路区間の累積需要，機能水準を

$$s_{ik} = s_i(t_k), z_{ik} = z_i(t_k),$$
$$t_k = k\Delta t; k = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

と表す．(1a)式，(2a)式を離散近似すると

$$s_{i(k+1)} = s_{ik} + \beta_i \Delta t + \sigma_{i1}\epsilon_{i1}(t_k) + \cdots + \sigma_{in}\epsilon_{in}(t_k) \tag{9}$$

$$z_{i(k+1)} - z_{ik} = -\rho_i\{s_{i(k+1)} - s_{ik}\} - \delta_i \Delta t - \Delta q_i(t_k) \tag{10}$$

$$\Delta q_i(t_k) = \begin{cases} u_i & (\text{確率 } \lambda_i \Delta t) \\ 0 & (\text{確率 } 1 - \lambda_i \Delta t) \end{cases} \tag{11}$$

と表される．式(10)はインパルス発生時刻以外での離散近似を表す．$\epsilon_{i1}(t_k), \cdots, \epsilon_{in}(k = 0, 1, 2, \cdots)$は正規分布$N(0, \Delta t)$に従う確率変数で，互いに独立である．前節の議論より区間iの最適修繕ルールは機能水準がある値z_i^*以下になったらただちに修繕を行うという形で表現できる．この値z^*を最適臨界機能水準と呼ぶ．臨界機能水準z_i^j(機能水準がz_i^j以下まで小さくなったらただちに修繕を行うというルール)のもとで機能水準の初期値がz_{i0}のときの目的関数値を$J(z_{i0}; z_i^j)$と表すと，目的関数の再帰的な性質より次式が成立する．

$$J_i(\bar{Z}_i; z_i^j) = E_0\left[\sum_{k=0}^{\frac{\theta_{i1}}{\Delta t}-1} c(z_{ik})(s_{i(k+1)} - s_{ik}) \times \frac{1}{(1+\alpha)^{t_k}} + \frac{F(z_i^j)}{(1+\alpha)^{\theta_{i1}}} + \frac{J_i(\bar{Z}_i; z_i^j)}{(1+\alpha)^{\theta_{i1}}}\right] \tag{12}$$

右辺$E_0[\quad]$内の第1項は時刻$t = 0$から時刻$t = \theta_{i1}$までの可変的費用の現在価値を表しており，第2項は時刻$t = \theta_{i1}$で行われる修繕投資費用の現在価値を表し，第3項は時刻$t = \theta_{i1}$以降にかかる総費用の現在価値を表している．これを項$J_i(\bar{Z}_i; z_i^j)$に関して整理することにより，

$$J(\bar{Z}_i; z_i^j) = \left\{1 - E_0\left[\frac{1}{(1+\alpha)^{\theta_{i1}}}\right]\right\}^{-1} \times \left\{E_0\left[\sum_{k=0}^{\frac{\theta_{i1}}{\Delta t}-1} c(z_{ik})(s_{i(k+1)} - s_{ik})\frac{1}{(1+\alpha)^{t_k}}\right] + E_0\left[\frac{F(z_i^j)}{(1+\alpha)^{\theta_{i1}}}\right]\right\}$$

を得る．いま，モンテカルロシミュレーションによって累積需要，機能水準のヒストリカルな1つのパスを発生させることにより，確率変数$s_{ik}, z_{ik}, \theta_{i1}$は1つの実現値をもつ．上式の右辺は，パスの発生回数Mを十分大きくすれば，パスの発生によって得られる各項の実現値の平均値によって求められる．したがって，十分多くのパスを発生させることにより$J_i(\bar{Z}_i; z_i^j)$の値が求められることになる．様々な値のz_i^jに対して，この方法を繰り返し適用し，1次元探索法により$J_i(\bar{Z}_i; z_i^j)$が最小となる最適修繕ルールz_i^*を求めることができる．

以上の方法では，十分な精度で解を求めるためにはパスの発生回数Mを十分大きくする必要があり，大きなネットワーク上の各区間の最適修繕ルールを求める場合には，膨大な計算を要する．そこで，累積交通需要及び機能水準の期待値パスを用いてより簡単に最適修繕ルールを求める方法を提案する．累積交通需要と機能水準のそれぞれの各期の期待値を連ねたパスを期待値パスと呼ぶ．いま，累積交通需要と機能水準がこれらの期待値パスに従って推移すると仮定した場合に生じるライフサイクルコストを最小化する問題を考える．この問題で最小化すべき汎関数J_i'は次式で表される．

$$J_i'(\bar{Z}_i; z_i^j) = \sum_{k=0}^{\frac{\theta'_{i1}}{\Delta t}-1} c(E[z_{ik}])(E[s_{i(k+1)} - s_{ik}]) \times \frac{1}{(1+\alpha)^{t_k}} + \frac{F(z_i^j)}{(1+\alpha)^{\theta'_{i1}}} + \frac{J_i'(\bar{Z}_i; z_i^j)}{(1+\alpha)^{\theta'_{i1}}} \tag{13}$$

ただし，θ'_{i1}は機能水準の期待値パスにおける第1回目の修繕時刻である．$E[z_{ik}$, $E[s_{i(k+1)} - s_{ik}]$は容易に計算できるため，このような問題を考えた場合には容易に最適臨界機能水準$z_i'^*$を求めることができる．この期待値パスによる最適臨界機能水準$z_i'^*$は厳密解z_i^*と厳密に一致はしないが，過去の数値計算によりさまざまなパラメータに対してこれらが高い精度で一致することが確かめられている．

4. 予算制約下での修繕ルール

道路管理者に各期の予算制約がある場合，３．で求めた最適修繕ルールに従って管理道路の道路舗装を修繕できない可能性がある．ここでは，予算制約の中でライフサイクルコストを可能な限り小さくしうるようなヒューリスティックな修繕ルールを提案する．道路管理者の各期$k(t_k \leq t \leq t_{k+1})$の予算制約は

$$\sum_i \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{\delta}(t-\theta_{ij}) F_i(z_i(\theta_{ij}^-)) dt \right\} \leq Y_k \tag{14}$$

と表される．Y_kはk期の予算であり，$\hat{\delta}$はδ関数

$$\hat{\delta}(t-\theta_{ij}) = \lim_{\Delta t \to 0} \hat{\delta}_{\Delta t}(t-\theta_{ij}) \tag{15}$$

$$\hat{\delta}_{\Delta t}(t-\theta_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & (t=\theta_{ij}, j=1,2,\cdots) \\ 0 & (t \neq \theta_{ij}, j=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{16}$$

である．したがって，道路管理者が解くべき問題は次式で表される．

$$\left.\begin{array}{l} \min_V \{J(V)\} \\ \text{subject to} \\ eqs.(1a),(1b),(2a),(2b),(2c), \text{ and } (14) \end{array}\right\} \tag{17}$$

この問題の管理道路全体の最適値関数は，各道路区間の機能水準$\boldsymbol{z}=\{z_1,z_2,\cdots,z_N\}$と現時点からの各年度の予算制約$\boldsymbol{Y}=\{Y_0,Y_1,\cdots\}$に依存する．したがって，予算制約がない場合と同様の方法で，この問題の最適解を求めることは不可能である．３．で求めた最適補修情報に基づいて，予算制約の下での修繕順序を求める以下の実用的なルールを提案する．

１）計算期間を設定する

２）修繕を行うべき最低レベルの機能水準$\underline{z}$を設定

３）全ての道路区間iについて，単位修繕費用あたりの修繕をj期遅らせた時のライフサイクルコストの損失K_iを計算する．$j=1,2,\cdots,n$で，nは機能水準の期待値パスが最低水準$\underline{z}$に達する期である．

$$K_{ij} = \frac{\hat{J}_i(z_i,j) - \hat{J}_i(z_i,0)}{F_i(z_i)} \tag{18}$$

$$\hat{J}_i(z_i,j) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{c(E[z_{ik}])(E[s_{i(k+1)}-s_k])}{(1+\alpha)^{t_k}} + \frac{F_i(E[z_{ij}])}{(1+\alpha)^{t_j}} + \frac{\Phi_i(\bar{Z}_i)}{(1+\alpha)^{t_k}} \tag{19}$$

であり，$\hat{J}_i(z_i,j)$はj期後に修繕を行い，以後最適に修繕を行った場合のライフサイクルコスト，$\hat{J}_i(z_i,0)$は直ちに修繕を行い，以後最適に修繕を行った場合のライフサイクルコストを表している．最適修繕ルールを用いたライフサイクルコストは予算制約がある場合のライフサイクルコストと厳密には一致しない．しかし，予算制約がある場合に最適修繕を行う場合のライフサイクルコストを求めることは極めて困難である．さらに，将来時点における不確実性があっても，現在価値に換算した場合，その差異は微小なものにとどまることが期待できる．

４）任意の区間i,i'について，すべてのjに対して$K_{ij} \leq K_{i'j}$となる場合には，区間i'は区間iよりも当該期の修繕の優先順位が高いとする．$K_{ij} \geq K_{i'j}$となるjが存在する場合，区間iの優先順位が高い，区間i'の優先順位が高いという両方のシナリオを仮定し，それぞれ別個に計算を進める．

５）以上より決定した優先順位に基づいて，予算制約の範囲内で修繕を行う区間を決定．

６）修繕を行った後の，次の期の各区間の機能水準，次の期までの可変的用者費用を計算．

７）次の期について，4)で仮定した各シナリオに対し2)～6)の計算を再び行う．これを1)で設定した計算期間が終了するまで繰り返す．

８）計算期間終了後は最適に修繕が行われると仮定し，4)で設定した各シナリオについてライフサイクルコストを計算する．最小のライフサイクルコストを与えるシナリオが，最適修繕戦略となる．

以上の方法で，予算制約がある場合の最適修繕ルールを近似的に求めることができる．また，予算制約がある場合の将来のライフサイクルコストを推計することができる．

5. おわりに

本研究では道路舗装の実用的な修繕順位決定ルールを提案した．紙面の制約上，本稿では現実のデータを用いた実証分析の結果やモデルの拡張に関する議論を割愛せざるを得ないが，その詳細は講演時に発表する．今後の課題としては，道路舗装水準の持続的維持のための必要となる予算額を決定する方法論を開発する必要がある．さらに，道路舗装の点検情報に基づいて，逐次補修の優先順位や将来の舗装水準の持続性を検討できるような管理システムの開発が必要である．

参考文献

1) 栗野盛光，田村謙介，小林潔司，2000，不確実性下における道路舗装の最適補修ルール，土木計画学研究・講演集，Vol.23(2)，pp. 55-58.