【土木計画学研究・講演集 No. 24(1) 2001年11月】

段階的整備プロジェクトの経済便益評価：リアルオプションアプローチ *

ECONOMIC EVALUATION OF STAGE-WISED FACILITY PROVISION: A REAL OPTION APPROACH*

織田澤利守**・横松宗太***・小林潔司****
by Toshimori OTAZAWA**, Muneta YOKOMATSU*** and Kiyoshi KOBAYASHI****

1. はじめに

社会資本整備は，国や地域の経済成長過程に影響を及ぼし，その効果は長期に及ぶ．しかし、社会資本の整備には多くの不確実性が介在する．社会資本がもたらす効果(便益)は，国や地域の経済状況等の様々な要因に影響を受け，大きな不確実性を有する．時間軸上の個々の時点で発生する効果を投資の意思決定時点で正確に予想することは不可能である．

費用便益分析は社会資本の経済評価方法として、実務においても幅広く採用されるようになった。また、複数のプロジェクトの優先順位を決定するための手法としても重要な役割を担っている．しかし，費用便益分析では、着目する社会資本の整備が経済に及ぼす影響のみが計測される。当該プロジェクトの実施により、将来時点でさらに追加的なプロジェクトを実施する可能性が生まれる。費用便益分析では、このような発展可能性オプションやタイミング・オプションの経済価値を考慮できない。

本研究は，ある大規模な施設の段階的整備問題をとりあげる。その際、初期の社会資本整備が、それに続く追加的な社会資本整備の可能性を創り出したという経済価値を積極的に考慮した社会資本の便益評価モデルを定式化する。社会資本がもたらす便益過程に多大なリスクが存在するような大規模プロジェクトをとりあげ、時間軸上におけるプロジェクトの効率的な動学的投資決定ルールを導出する。

*キーワーズ：多段階整備，計画手法論，整備効果計測法
**学生員　工修　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL・FAX 075-753-5073)
***正員　鳥取大学工学部社会開発システム工学科
(〒680-8552 鳥取市湖山町南4-101　TEL 0857-31-5311・FAX 0857-31-0882)
****正員　工博　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL・FAX 075-753-5071)

2. 本研究の基本的な考え方

施設整備がもたらす効果には，個々の施設が単独で生みだす効果と複数の施設が同時に存在することで相乗的に発生する効果がある．例えばA市・B市・C市が直線的に連結された線形都市システムを考えよう。A・B市の間に道路α，B・C市の間に道路βを整備する計画があるとする．いま，道路αが最初に整備されるとしよう．道路αの整備は，A・B市間の所要時間の短縮をもたらし，長期的には両市の経済成長に影響を与える．つぎに、道路βが整備されたとしよう．B・C市においても同様の効果が発生する．以上は個々の道路整備が単独にもたらす効果である．その一方で，道路αが既に整備されている条件の下で道路βを整備することによって現れる効果もある．例えばA・C市の間の所要時間の大幅な短縮や3市がひとつの地域圏となってより生じる経済成長効果である．従来，このような「2つの道路が存在することによる効果」は，2番目の道路（この場合は道路β）が整備された時点で発生するという理由で，1番目の道路（道路α）の建設の意思決定の際には，道路αの整備がもたらす効果として評価されてこなかった．しかし，1番目の道路αを整備するということは，将来2番目の道路βを整備すれば，その時点で「2つの道路が存在することによる効果」を得られるという機会も同時に獲得していることになる．道路αの整備の意思決定の際には，道路αのみが整備された時点で得られる効果に加えて，上記の機会も的確に評価されなければならない．

3. モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

2段階の施設整備に関する意思決定問題を定式化

し，２つの施設整備の効果や最適整備タイミングを同時に考慮し得るような意思決定ルールを提案する．ある単一の意思決定主体が２つの投資を行う権利を保有している状況を想定する．２つの施設はどちらを先に整備してもいい。簡便化のために施設施設は瞬時に完了するものとする．２つの施設を、それぞれα，βと表そう．施設α，βの双方が整備された時に発生する便益は，それらが整備された時点に依存すると仮定する．すなわち、ある時点において，２つの施設が同時に整備された場合の便益と，一方の施設が整備されてからある時間が経過してからもう一方の施設を整備された場合の便益は異なる．無限の将来に亘る時間軸上で、施設α、βにより発生する便益のフローは確率過程に従って変化する．ある施設を時刻tで整備した場合にどれだけの便益（初期便益）が得られるかは、当該時刻になった時点で確実に知ることができる．各時点で意思決定主体は施設を整備した場合に生起する初期便益を確認した上で，その時刻に施設整備を行うか否かを決定する．施設整備を行った場合、整備は瞬時に終了し，その時点で初期便益が発生する。施設整備後は、初期便益を初期値として当該の施設は便益を発生する。施設整備後に実現する便益も確率過程に従うと考える。また意思決定問題の最終時刻は無限遠とする。簡単化のために，投資費用は時間を通じて一定と仮定する。

(2) 便益過程の定式化

施設の整備状態を状態変数$s(s=o,\alpha,\beta,\alpha\beta)$により表そう．ここに，状態$s=o$はいずれの施設も存在しない状態を，状態$s=\alpha$は施設$\alpha$のみが存在する状態を，状態$s=\beta$は施設$\beta$のみが存在する状態を，状態$s=\alpha\beta$は双方の施設が存在する状態を表す．いま、初期時点$t=0$から状態変数の推移を表す過程を$s(t)$ $t\in[0,\infty)$と表そう。初期時点$t=0$において施設が整備されておらず$s(0)=o$が成立する。初期時点から最初に施設α、もしくはβが整備される時刻θ_1までの期間$[0,\theta_1)$を第０期と定義する。さらに、αもしくはβが整備され、時刻θ_2に残りの施設が整備され状態$\alpha\beta$に以降するまでの期間$[\theta_1,\theta_2)$を第１期、残りの期間$[\theta_2,\infty)$を第２期と定義する。ある時刻に２つの施設が同時に整備された場合、第１期の期間長が0であると考える。

時刻tにおいて施設の状態変数が$s(t)=s$であり、当該の施設がもたらす便益を$B_s(t)$ $(s=\alpha,\beta,\alpha\beta)$と表す。施設の便益は基準状態$s(t)=o$との社会厚生の差で定義されている。したがって、$s(t)=o$の場合、便益は常に$B_o(t)=0$が成立する。また、時刻$t$に施設の投資$x$ $(x=\alpha,\beta)$を行った場合を考えよう。この場合、システムの状態は、1)oからα、2)oからβ、3) αから$\alpha\beta$、4)βから$\alpha\beta$に変化する。いま、施設整備を行った時刻に獲得できる便益を初期便益と呼び、４つのケースそれぞれに対して初期便益をB^0_α、B^0_β、$B^0_{\alpha\beta}$、$B^0_{\beta\alpha}$と表そう。

第０期$[0,\theta_1)$に着目しよう。第０期の任意の時刻tにおいて施設αあるいはβが整備される場合に、その時刻において生起する初期便益B^0_α, B^0_βは不確実に変化する。それぞれの施設が整備された時点に生起する初期便益が幾何ブラウン過程

$$dB^0_\alpha(t)/B^0_\alpha(t)=\mu^0_\alpha dt+\sigma^0_\alpha dW(t)+\eta^0_\alpha dW_\alpha(t) \quad (1)$$
$$dB^0_\beta(t)/B^0_\beta(t)=\mu^0_\beta dt+\sigma^0_\beta dW(t)+\eta^0_\beta dW_\beta(t) \quad (2)$$

に従うと仮定する。ただし、$W(t)$，$W_\alpha(t)$，$W_\beta(t)$は互いに独立な標準ブラウン運動である．$B^0_\alpha(t)$と$B^0_\beta(t)$は，例えば一国の景気を表すようなマクロな確率変数$W(t)$を介して相関している．それに対して$W_\alpha(t)$，$W_\beta(t)$は施設に特有な確率変動である．μ^0_α, μ^0_β, σ^0_α, σ^0_β, η^0_α, η^0_βは定数である．

つぎに、第１期$[\theta_1,\theta_2)$に着目しよう。状態s $(s=\alpha,\beta)$の生起後に発生する便益$B_s(t)$ $(s=\alpha,\beta)$の成長過程は、時刻θ_1において実現した潜在便益$B^0_\alpha(\theta_1)=\hat{B}^0_\alpha$、あるいは$B^0_\beta(\theta_1)=\hat{B}^0_\beta$を初期値とし、それ以降幾何ブラウン過程

$$dB_\alpha(t)/B_\alpha(t)=\mu_\alpha dt+\sigma_\alpha dW(t)+\eta_\alpha dW_\alpha(t) \quad (3)$$
$$dB_\beta(t)/B_\beta(t)=\mu_\beta dt+\sigma_\beta dW(t)+\eta_\beta dW_\beta(t) \quad (4)$$

に従うと考える。ここに，トレンドを表すパラメータμ_s及びボラティリティーを表すパラメータσ_s,η_s $(s=\alpha,\beta)$は定数である．次に、第１期の任意の時刻において残りの施設が整備され施設α、βが完成した場合に獲得できる潜在便益$B^0_{\alpha\beta}$を考える。施設α、βの内、いずれが先に整備されたかによって潜在便益は異なる。いま、第１期に施設αが先に整備され、時刻tに施設βを整備した場合に生じる第２期の初期便益を$B^0_{\alpha\beta}(t)$、その逆の場合の初期便益を$B^0_{\beta\alpha}(t)$と表す。

ここで，初期便益$B^0_{\alpha\beta}$、$B^0_{\beta\alpha}$が次のような過程で変動すると仮定する．

$$B^0_{\alpha\beta}(t) = B_\alpha(t) + \lambda_{\alpha\beta} B^0_\beta(t) \quad (s(t) = \alpha\text{のとき}) \tag{5}$$
$$B^0_{\beta\alpha}(t) = B_\beta(t) + \lambda_{\beta\alpha} B_\alpha(t) \quad (s(t) = \beta\text{のとき}) \tag{6}$$

に従う。ここで，初期便益$B^0_{\alpha\beta}$、$B^0_{\beta\alpha}$はそれぞれ$B^0_\alpha(t) + \lambda_{\alpha\beta} B^0_\beta(t)$，$B^0_\beta(t) + \lambda_{\alpha\beta} B^0_\alpha(t)$を初期値とする．最後に、第２期における便益$B_{\alpha\beta}(t)$の変動過程は次の幾何ブラウン運動に従うと仮定する．

$$dB_{\alpha\beta}(t)/\ B_{\alpha\beta}(t) = \lambda_{\alpha\beta} dt + \delta_{\alpha\beta} dW(t) + \xi_{\alpha\beta} dW_\alpha(t) + \zeta_{\alpha\beta} dW_\beta(t) \tag{7}$$

(3) 第２期問題の定式化

時刻θ_1に施設αが整備され、ついで時刻θ_2に施設βが完成したとしよう。時刻 θ_2における初期便益を$B^0_{\alpha\beta}(\theta_2) = \hat{B}_{\alpha\beta}$と表す。反対に、時刻$\tilde{\theta}_1$に先に施設$\beta$が整備され、時刻$\tilde{\theta}_2$に施設$\alpha$が完成したとしよう。時刻 $\tilde{\theta}_2$における初期便益を$\hat{B}_{\beta\alpha}(\tilde{\theta}_2) = \hat{B}_{\beta\alpha}$と表す。時刻$t \geq \theta_2$以降、施設便益は便益過程(7)に従って変化する。したがって、時刻θ_2の当該期価値で評価した将来純便益の期待値は

$$F_{\alpha\beta}(\hat{B}_{\alpha\beta}) = E\left[\int_{\theta_2}^{\infty} B_{\alpha\beta}(t) \exp\{-\rho(t-\theta_2)dt\right] - I_\beta \tag{8}$$

と定義される。記号$E[\cdot]$は確率過程(7)に関する期待値操作を表す。

(4) 第１期問題の定式化

第１期の問題は一方の施設αあるいはβのみが整備されている状態の下で、もう一方の施設の最適整備時刻を決定する問題である。いま、施設αが先に整備されている状況を考えよう。時刻θ_1に施設αが整備され、初期便益$B^0_\alpha(\theta_1) = \hat{B}_\alpha$ を初期値として、施設αによる便益が式(3)に従って変化していると考えよう。この時、施設βの最適実施時刻を決定する問題は

$$F_\alpha(B_\alpha(t), B^0_{\alpha\beta}(t)) = \max_{\theta_2}\left\{E_{\theta_2}\left[\int_t^{\theta_2} B_\alpha(\tau)\exp\{-\rho(\tau - t)\}d\tau + F_{\alpha\beta}(B^0_{\alpha\beta}(\theta_2))\exp\{-\rho(\theta_2-\tau)\}\right]\right\} \tag{9}$$

と表せる。記号E_{θ_2}は第１期の終端時刻θ_2に関する期待値操作を表す．式(9)を$B_\alpha(t)$のみの関数$G_1(B_\alpha(t))$と$B^0_\beta(t)$のみの関数$G_2(B^0_\beta(t))$の和によって書き表すことができる．

$$F_\alpha(B_\alpha(t), B^0_\beta(t)) = G_1(B_\alpha(t)) + G_2(B^0_\beta(t)) \tag{10}$$
$$G_1(B_\alpha(t)) = E\left[\int_t^\infty B_\alpha(\tau)\exp\{-\rho(\tau-\theta_1)\}d\tau\right]$$
$$G_2(B^0_\beta(t)) = \max_{\theta_2}\left\{\int_{\theta_2}^\infty E_{\theta_2}\left[\lambda_{\alpha\beta}B^0_\beta(\theta_2) \times \exp\{-\rho(\theta_2 - t)\}\right]\right\}$$

$E[\cdot]$は確率過程(3)に関する期待値操作を表す．第１期の任意の時刻$t \geq \theta_1$において、施設βを整備するか否かを考える。このとき、$G_1(B_\alpha(t))$は施設βに関する投資意思決定に無関係であり，$G_2(B^0_\beta(t))$に関する最適制御問題のみを考察すればよい．問題(9)より

$$G_2(B^0_\beta(t)) = \max\left[\hat{G}_\beta(\lambda_{\alpha\beta}B^0_\beta(t)) - I_\beta,\ E[G_2(B^0_\beta(t+dt))\exp(-\rho dt)]\right] \tag{11}$$

と書き換えることができる。なお、$\hat{G}_\beta(\lambda_{\alpha\beta}B^0_\beta(t)) = E[\int_{\theta_2}^\infty\{B_{\alpha\beta}(t) - B_\alpha(t)\}\exp\{-\rho(t-\theta_2)\}dt]$である。

時刻tで施設整備を実施することが最適な場合、

$$G_2(B^0_\beta(t)) = \hat{G}_\beta(\lambda_{\alpha\beta}B^0_\beta(t)) - I_\beta \tag{12}$$

が成り立つ．一方，時刻tで施設整備を見送ることが最適な場合、

$$G_2(B^0_\beta(t)) = E[G_2(B^0_\beta(t+dt))\exp(-\rho dt)] \tag{13}$$

が成立する。式(13)の右辺を$B^0_\beta(t)$の近傍でTaylor展開し、伊藤のレンマを適用すれば、

$$G^0_2(B^0_\beta) \leq \exp(-\rho dt)\left[G^0_2(B^0_\beta) + \mu_\beta B^0_\beta \frac{dG_2}{dB^0_\beta}dt + \frac{\sigma^2_\beta}{2}{B^0}^2_\beta \frac{d^2G_2}{d{B^0}^2_\beta}dt\right] + o(dt) \tag{14}$$

となる．ただし$o(dt)$は高次の微小項である．両辺をdtで割り$\lim_{dt\to 0}$の極限をとると，常微分方程式

$$\Psi G_2(B^0_\beta) = 0 \tag{15}$$

を得る．ここで，Ψは微分演算子であり

$$\Psi = \mu_\beta B^0_\beta \frac{d}{dB_\beta} + \frac{\sigma^2_\beta}{2}B^2_\beta\frac{d^2}{dB^2_\beta} - \rho \tag{16}$$

である．さらに、2つの最適値関数 $G_2(B^0_\beta)$ と $\hat{G}_\beta(\lambda_{\alpha\beta}B^0_\beta(t))-I_\beta$ が臨界便益 B^{0*}_β において滑らかに接続するためのsmooth pasting条件

$$\frac{dG_2(B^{0*}_\beta)}{dB^0_\beta}=\frac{d\hat{G}_\beta(\lambda_{\alpha\beta}B^{0*})}{dB^0_\beta} \tag{17}$$

が成立する。したがって，プロジェクトの最適実施戦略は境界条件(12)，(17)のもとで常微分方程式(15)を解くことにより，最適値関数 $G_\beta(B^0_\beta)$ と臨界便益 B^{0*}_β を求める問題に帰着する．

(5) 第0期問題の定式化

第0期の任意の時刻 $t\in[0,\theta_1)$ に着目しよう。時刻 t において、施設 α,β を整備することにより得られる潜在的初期便益を $B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t)$ と表そう。さらに、初期便益 $B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t)$ の下で、時刻 t 以降最適なタイミングで施設整備を行った時に得られる期待最大便益を最適値関数 $F_0(B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t))$ を用いて表現しよう。この時、最適値関数を再帰方程式

$$\begin{aligned}F_o(B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t))=\max\Big[&F_\alpha(B^0_\alpha(t),B^0_\beta)\\&-I_\alpha,F_\beta(B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t))-I_\beta,\\&E[F_o(B^0_\alpha(t+dt),B^0_\beta(t+dt))]\exp(-\rho dt)\Big]\end{aligned} \tag{18}$$

で表現しよう。ただし、$E[\cdot]$ は時刻 t における潜在便益の実現値 $B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t)$ を与件とした条件付き期待値操作を表す．上式の右辺第1式は時刻 t に施設 α を整備し、その後最適な時刻に施設 β を整備することにより獲得できる最大便益の期待値の当該期価値を表す．第2項は施設 β を整備した場合に獲得できる最大期待便益の当該期価値を表す。第3項は施設 α と β の整備を微少期間 dt だけ先送りした場合における期待便益の当該期価値を表している．時刻 t における潜在便益 $B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t)$ を考慮した上で，3つの項のうち最も大きな値を示す項に対応する行動が選択される．

時刻 t において施設 s の整備が最適となる場合を考えよう。式(18)より次式が成立する。

$$F_o(B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t))=F_s(B^0_\alpha,B^0_\beta(t))-I_s \tag{19}$$

施設 s を整備することが最適であるためには、

$$F_s(B^0_\alpha,B^0_\beta(t))-I_s\geq F_{s'}(B^0_\alpha,B^0_\beta(t))-I_{s'} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}F_s(B^0_\alpha,B^0_\beta(t))\geq E\Big[&F_o(B^0_\alpha(t+dt),\\&B^0_\beta(t+dt))\Big]\exp(-\rho dt)\end{aligned} \tag{21}$$

が成立しなければならない。ここで，式(20)は時刻 t 時点において，施設 s を整備することによって将来にわたってもたらされる期待総便益が，もう一方の施設 s' の整備によって得られるそれと同じもしくは大きくなるという境界条件である．式(18)より次式が得られる．

$$\begin{aligned}&F_o(B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t))\\&=E\Big[F_o(B^0_\alpha(t+dt),B^0_\beta(t+dt)\Big]\exp(-\rho dt)\end{aligned} \tag{22}$$

上式の右辺を $B^0_\alpha(t),B^0_\beta(t)$ の近傍でTaylor展開し，伊藤のレンマを適用すれば，偏微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{(\sigma^0_\alpha)^2+(\eta^0_\alpha)^2\}(B^0_\alpha)^2F^{\alpha\alpha}_o+(\sigma^0_\alpha\sigma^0_\beta)B^0_\alpha B^0_\beta F^{\alpha,\beta}_o\\&+\frac{1}{2}\{\sigma^2_\beta+(\eta^0_\beta)^2\}(B^0_\beta)^2F^{\beta\beta}_o+\mu^0_\alpha B^0_\alpha F^\alpha_o\\&+\mu^0_\beta B^0_\beta F^\beta_o-\rho F_o=0\end{aligned} \tag{23}$$

を得る。ただし F の上付添え字は当該変数に関する偏微分を表している．最適値関数 $F(\cdot)$ が各 $B_s(t)$ に関して単調増加関数であると仮定しよう．$F(\cdot)$ を定義する便益のうち，着目する要素を $B_s(t)$ としよう．他の要素 $B_{s'}(t)$ $(s'\neq s)$ を所与とすると，$B_s(t)$ の大きさがある境界値 B^*_s を越えたときに最適行動が変化するような値 B^*_s が存在する．最適値関数 $F_o(\cdot)$ は，境界条件

$$F_o(B^*_\alpha,B^*_\beta)=F_s(B^*_\alpha,B^*_\beta)-I_s \tag{24}$$

$$\frac{\partial F_o(B^*_\alpha,B^*_\beta)}{\partial B_s}=\frac{\partial F_s(B^*_\alpha,B^*_\beta)}{\partial B_s} \tag{25}$$

$$\frac{\partial F_o(B^*_\alpha,B^*_\beta)}{\partial B_s}=\frac{\partial F_{s'}(B^*_\alpha,B^*_\beta)}{\partial B_s} \tag{26}$$

$$(s,s'=\alpha,\beta;s\neq s')$$

の下で偏微分方程式(23)を解くことにより求めることができる。

4. おわりに

本研究では社会資本の2段階整備問題をとりあげ、発展可能性オプションやタイミング・オプションを考慮した段階整備の方法を分析する方法を提案した。紙面の都合上、本稿では分析枠組みを示したにとどまる。具体的な計算法やケースステディに関しては講演時に紹介したいと考える。