【土木計画学研究・講演集 No.23 (2) 2000年11月】

容量パラドクス理論に基づくランプ流入制御ルール*

Effective Ramp Metering Rules derived from "Capacity Paradox" Theory

赤松 隆**・長江 剛志***・長野 修****

1. はじめに

高速道路のランプ流入制御は，古くから実施されている渋滞緩和策の一つである．しかし，これは，通常，高速道路の混雑状態改善のみを目的としたものである．そのため，一般道も含めたネットワーク全体の利用効率性（状態改善度）から考えた場合，この方策の有効性を疑問視する議論も多い．

一方，ランプ流入制御等によるリンク容量の減少(増加)がネットワーク全体の利用効率性を改善(悪化)しうることは，"容量パラドクス"として知られている．この現象は古くから多くの研究がなされ，近年では，渋滞を明示的に考慮した動的枠組で，その特性が明らかにされつつある．特に，赤松等[2),4)]は，動的利用者均衡 (DUE: *Dynamic User Equilibrium*) 配分下で，容量パラドクス発生の必要十分条件を導いた．

本研究は，この結果を利用し，高速道路のみならずネットワーク全体の効率性改善を保証できる動的なランプ流入制御ルールを提案する．具体的には，まず，上記容量パラドクス問題とランプ流入制御問題の関係を整理する．そして，ネットワーク全体の利用効率性を改善する流入制御ルールが時々刻々の渋滞パターン情報のみを用いて構成できることを議論する．さらに，渋滞パターン情報に基づいたランプ流入制御の有効性判定をさらに簡便化しうる規則性を（計算機を用いた）数式実験によって見出す．

2. モデルの定義

本章では，次章以降で用いるネットワークの表現，記号の定義，および動的利用者均衡配分の基本的な性質[1),3)]を簡単にまとめておく．

2.1 ネットワークと記号の定義

本研究のモデルはリンク集合 L (要素数L)，ノード集合 N (要素数N)，OD ノードペア集合 W から構成される1起点・多終点の交通ネットワーク上で定義される．ネットワークの構造は $(\mathrm{N}-1)\times\mathrm{L}$ の既約接続行列（ノード･リンク接続行列の起点に対応する行を削除した行列）$\mathbf{A}$ で表される．また，本稿では行列 $\mathbf{A}$ の+1要素を全て0にして得られる行列 $\mathbf{A}_-$ も適宜利用する．

2.2 動的利用者均衡配分

本研究では，リンクの通過･渋滞の表現には，FIFO (First-In-First-Out)原則と Point Queue 概念に基づいたモデルを採用する．そして，ネットワーク・フローは DUE 配分によって表現されると仮定する．ここで，DUE 状態とは，どの時刻においても，どの利用者も自分だけが経路を変更しても自分の経験する所要時間を改善できない状態である[1),3)]．

従来の研究[3)]により，FIFO を満たすリンクモデルに基づいた1起点・多終点の DUE 配分は，出発時刻別に分解できることが知られている．そして，出発時刻 s 毎に分解されたDUE配分は，2種類の変数 (y_{ij}^s, τ_i^s) のみを用いて表現できる: y_{ij}^s は起点出発時刻 s に関する(均衡) リンク交通流率である．また，τ_i^s は起点を時刻 s に出発した利用者のノード i への（均衡）最早到着時刻である．リンク (i,j) の容量を μ_{ij} で表し，起点を時刻 s に出発した利用者の各リンクの通過コストを c_{ij}^s で表す．なお，起点を時刻 s に出発し終点が d の車の累積台数 $Q_{od}(s)$ は分析対象の全ての s, W について与件とする． 以降では，要素 y_{ij}^s をもつ L 次元列ベクトルを $\mathbf{y}(s)$， 要素 $d\tau_i^s/ds$ をもつ N-1 次元ベクトルを $\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)$，要素 dQ_{od}/ds をもつ N-1 次元ベクトルを $\dot{\mathbf{Q}}(s)$ と書く．

3. 容量パラドクスの検出方法

本章では，従来の研究[1),2),4)]で明らかにされた容量パラドクス検出方法を簡単にまとめておく．まず，準備として，"飽和ネットワーク"における DUE 配分の解析解，および，容量パラドクス生起条件を解説する．ここで，"飽和ネットワーク"とは，以下の2つの条件を満たすネットワークである： (*a*)全てのリンクのフロー $\mathbf{y}(s)$ が正，(*b*)全てのリンクで渋滞が発生．次に，より一般的なネットワークの場合についても，簡単なネットワーク変換によって，飽和ネットワーク上の問題に帰着することを示す．

---

* Keywords: 流入制御，渋滞，容量，動的配分
** 正会員 工博 東北大学・大学院情報科学研究科
*** 学生会員 東北大学・大学院情報科学研究科
**** 学生会員 豊橋技術科学大学・知識情報工学専攻

3.1 飽和ネットワークでの容量パラドクス生起条件

単一の渋滞したリンクでは，図 3-1 に示されるように，単位時間内の流入台数と流出台数の間で保存則が成立する．従って，渋滞リンクでの遅れ時間の変化は，よく知られた以下の関係式によって評価できる：

$$\Delta\tau = \mu^{-1}\Delta Q \tag{3.1}$$

これと同様，飽和ネットワーク上の DUE 配分では，式(3.1)をネットワーク全体の問題に拡張したと解釈できる(注) 以下の関係が成立する [1), 4)]：

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) = \mathbf{V}^{-1}\,\dot{\mathbf{Q}}(s) \tag{3.2}$$

ここで，$\mathbf{V} \equiv \mathbf{AMA}_{-}^{T}$，$\mathbf{M}$ は a 番目対角要素にリンク a の容量 μ_a をもつ L×L 対角行列である［(注) 式(3.2)は，ベクトル変数 $\boldsymbol{\tau}$,$\mathbf{Q}$ をスカラー変数 τ,Q に，“ネットワーク容量行列” $\mathbf{V}$ をリンク容量 μ に，各々置きかえれば，式(3.1)に帰着する．厳密な導出は文献 1), 4)を参照］．さらに，飽和ネットワークにおける DUE リンク・フロー・ベクトル $\mathbf{y}(s)$ は，次式によって解析的に与えられる [1), 4)]：

$$\mathbf{y}(s) = -\mathbf{MA}_{-}^{T}\,\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) \tag{3.3}$$

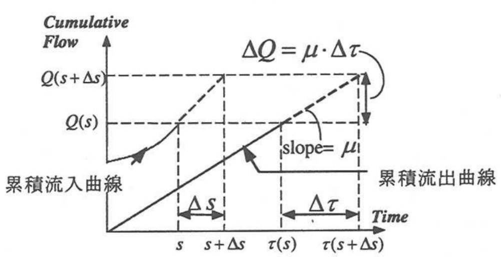

図 3-1 単一リンクでのフロー保存則

DUE配分の解が式(3.2), (3.3)で与えられることを利用すれば，“容量パラドクス” の生起条件が容易に得られる．ここで，容量パラドクスとは，リンク a の容量 μ_a を増加（減少）させても，ネットワーク総走行費用 TC：

$$TC \equiv \int_0^T \mathbf{y}(s)^T \mathbf{c}(s)\,ds = \int_0^T \dot{\mathbf{Q}}(s)^T(\boldsymbol{\tau}(s) - s\mathbf{1})\,ds \tag{3.4}$$

が減少（増加）しない現象である．つまり，容量パラドクス生起 $\Leftrightarrow \partial TC/\partial\mu_a \ge 0$ である．$\partial TC/\partial\mu_a$ は，式(3.2), (3.3) を式(3.4)に代入すれば解析的に求めることができ，以下の命題が得られる [2),4)]：

命題 1 飽和ネットワークのリンク(i, j)で容量パラドクスが生起するための必要十分条件は，

$$-\int_0^T \sum_k \dot{Q}_{ok}(s)\,(v_{kj}^{-1} - v_{ki}^{-1})\,(\tau_j(s) - \tau_j(0))\,ds \ge 0 \tag{3.5}$$

ここで，v_{ij}^{-1} は行列 $\mathbf{V}^{-1}$ の (i,j)要素である．

この命題を応用すると，OD 需要パターン $\mathbf{Q}$，容量パターン $\mathbf{M}$ が不明の場合についても有用な知見が得られる．すなわち，以下の命題に示されるように，ネットワークの構造のみから容量パラドクスの生起を判定できる場合がある [2),4)]．

命題 2a 次の条件を満たす飽和ネットワークのリンク (i, j)では，容量パラドクスは<u>決して起こらない</u>：(*a*) ノード i はどの終点からも到達不可能で，(*b*) ノード j は少なくとも一つの終点 d から到達可能である．

命題 2b 次の条件を満たす飽和ネットワークのリンク (i,j)では，容量パラドクスが<u>必ず起こる</u>：(*a*) ノード j は，ノード i を通る経路を除くと，どの終点からも到達不可能で，(*b*) ノード i は少なくとも一つの終点 d から到達可能である．

3.2 一般ネットワークでの容量パラドクス生起条件

非渋滞リンクも含む“非飽和ネットワーク”に対する容量パラドクス問題は，以下に述べる“縮約ネットワーク”を構築することで，前節の解析に帰着できる．

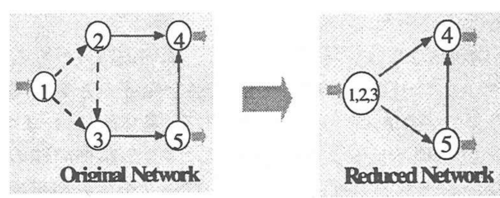

図 3-2 非飽和ネットワークの縮約

縮約ネットワークとは，非飽和ネットワーク上の各非渋滞リンクの両端点を1つのノードに集約して構成されるネットワークである．例えば，図3-2 左のネットワークからは，右図の縮約ネットワークが得られる：左図の非渋滞リンク (1,2), (1,3), (2,3)（それ以外のリンクは渋滞リンク）の両端ノード1, 2, 3 が，右の縮約ネットワークでは1つのノードに集約される．

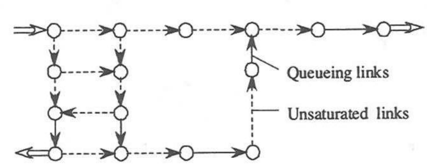

図 3-3a 非飽和ネットワークの例

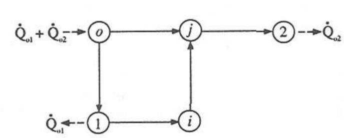

図 3-3b 縮約ネットワーク

さて，非渋滞リンクでは容量パラドクスは決して起こらない[2),4)]．従って，一般的な非飽和ネットワークでの容量パラドクス生起判定は，その縮約ネットワークに対して行えば十分である．さらに，縮約ネットワークは，その定義より必ず飽和ネットワークとなっているから，前節で示された命題をそのまま適用できる．例えば，図3-3aのような非飽和ネットワークでパラドクスが生起するか否かの判定は，このネットワークを縮約して得られる図3-3bの飽和ネットワークを考えるだけで十分である．前節の命題により，このネットワーク（渋滞パターン）では，リンク(i,j)において容量パラドクスが必ず生起することがただちにわかる．

4．ランプ制御ルールの構築

4.1 ランプの動的流入制御と容量パラドクス

３章の理論は，様々なタイプの道路容量制御問題へ応用できる．ここで，容量パラドクスの生起は，あるリンクの容量を減少させた場合に，ネットワーク利用効率が改善されるという事実も意味することに注意しよう．従って，容量を変更するリンクを高速道路のランプとみなせば，パラドクスの生起判定は，ランプ流入制御策の有効性判定にもつながることがわかる．

その簡単な例として，図 4-1a に示されるような構造のネットワークを考えてみよう．ここで，リンク 1, 2 は高速道路，4 は(集約表現された)一般街路，3,5 は各々高速道路オフ・ランプ，オン・ランプである．

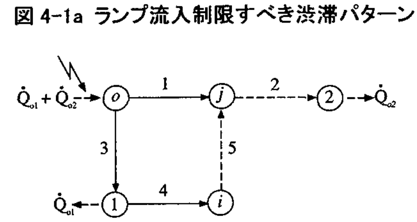

図 4-1a ランプ流入制限すべき渋滞パターン

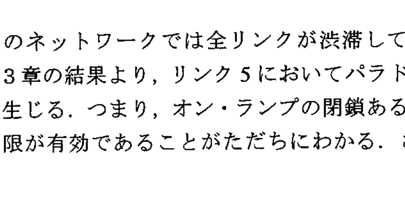

図 4-1b ランプ開放すべき渋滞パターン

このネットワークでは全リンクが渋滞しているから，３章の結果より，リンク 5 においてパラドクスが必ず生じる．つまり，オン・ランプの閉鎖あるいは容量制限が有効であることがただちにわかる．さらに，時間が経過して渋滞パターンが 図 4-1b のように変化（リンク 1, 4 のみ渋滞）したとしよう．このネットワークでは，3 章の結果より，パラドクスは生じない．従って，この渋滞パターンでは，オン・ランプの閉鎖／容量制限はもはや有効ではなく，ランプを開放すべきことがわかる．このように，容量パラドクスの理論を応用すれば，時々刻々の渋滞パターンの変化情報に基づいた動的なランプ流入制御ルールを構成することができる．

4.2 流入制御有効性判定ルールの探索

前節で述べた様なランプ制御の有効性判定は，３章の理論を適用すれば，原理的には任意のネットワークで可能である．本研究では，より深い洞察とより簡便で実用的な規則性を発見するために，図 4-1 の例を一般化し，複数のオフ・ランプ，オン・ランプが交互に存在する図 4-2 のような梯子型ネットワークにおけるランプ制御の有効性判定法を検討した．具体的には，以下の手順の実験を行った：

1) 与えられた梯子型ネットワークにおいて可能な全ての渋滞パターンを列挙する．
2) 各渋滞パターンに対して容量パラドクス生起判定式 $\partial TC/\partial \mu_a$ を解析的に求める．
3) （OD 需要 $\mathbf{Q}$，リンク容量 $\mathbf{M}$ によらない）判定式の符号別に渋滞パターンを分類する．

この実験で発見したいのは，ランプ制御の有効性判定を簡便化しうる何らかの規則性である．より具体的には，渋滞パターン（をさらに圧縮した）情報のみからランプ制御の有効性を判定しうる規則性を発見することが目的である．そのためには，$\partial TC/\partial \mu_a$ の定符号性が特定の（$\mathbf{Q},\mathbf{M}$）の数値に対して成立するのではなく，恒等的に成立する条件を探索する必要がある．そこで，上の実験では，全渋滞パターンに対する $\partial TC/\partial \mu_a$ の導出と符号判定を，数式処理 *software* を用いて，網羅的に行った．実験で用いたネットワークの起点ノードは上流に 1 つ，終点ノードは任意のノードとし，流入制御を行うオン･ランプは１つのみとした．

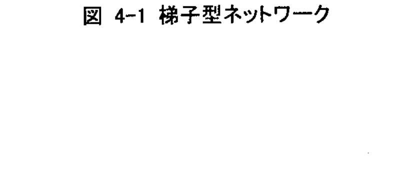

図 4-1 梯子型ネットワーク

4.3 実験結果

こうして分類した渋滞パターンの特徴を調べることによって，流入制御の有効性判定に関して以下の4つの規則性が成立することが明らかになった：

規則1：制御リンク(i,j)より下流の渋滞パターンは，ランプ流入制御の有効性とは無関係である．図4-2の例では制御リンクより上流の斜線部のみに着目すればよい．

規則2："連結点"より上流の渋滞パターンは，流入制御の有効性とは無関係である．ここで，連結点とは，縮約ネットワークにおいて上流からのフローを全て集約する(i.e. 全フローが必ず通る)ノードである．図4-3の例では，ノード1，2が縮約され，連結点となるのでここから下流の斜線部のみに着目すればよい．

規則3：制御リンクまでの高速道路が全て通過ノードであれば，流入制限は必ず有効となる．図4-4の例では，ノード1, 2が連結点となるので，制御リンクより上流の高速道路上のノード3, jに着目する．ここでは，どちらも通過ノード(OD需要が0)であるため，流入制限が有効である．

規則4:制御リンクの下流ノードが連結点であれば，流入制限は必ず有効となる．図4-5の例では，ノード1, 2, jが縮約されて連結点となるため，流入制限が有効である．

これらの規則は，ネットワーク全体の効率性を改善するランプ流入制御有効性の判定であっても，ネットワークのフロー(渋滞)・パターン全てを見る必要は無いことを述べている．すなわち，梯子型構造ネットワークに限定すれば，有効なランプ流入制御は，必要な情報を大幅に減らした(ある程度)局所的な情報のみで比較的容易に行えることがわかる．

5．おわりに

本研究では，高速道路と一般道路の両方を含むネットワーク全体の利用効率性を向上させるようなランプ流入制御ルールを構築した．この制御ルールは，空間的には，ネットワーク全体の総走行費用を必ず改善するという"大域的"制御である．しかし，時間軸方向に関しては，ある渋滞パターンが続いている時間帯内での総走行費用改善しか保証していない．すなわち，このような "近視眼的"な制御が，複数の渋滞パターンにまたがる時間帯全体を通じた総走行費用を"大域的"に最小化する保証はない．この問題点についての検討結果は，講演会にて報告する予定である．

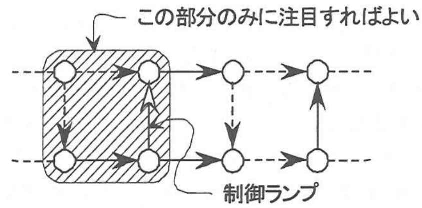

図 4-2 規則 1

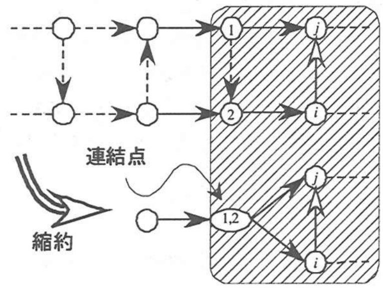

図 4-3 規則 2

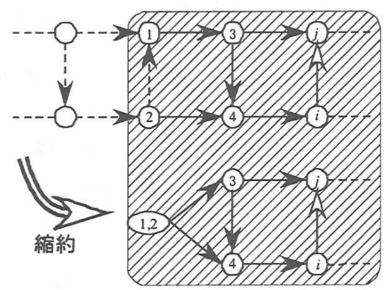

図 4-4 規則 3

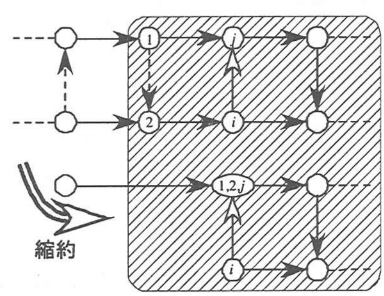

図 4-5 規則 4

参考文献

1) Akamatsu, T., "A Dynamic Traffic Assignment Paradox", *Transportation Research* **34B**, pp.515-531, 2000.
2) Akamatsu, T. and Heydecker, B., "Some methods for detecting a capacity paradox in dynamic traffic assignment", submitted to *Transportation Science*, 1999.
3) 赤松隆・桑原雅夫, "渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分", 土木学会論文集, **IV-23**, pp.21-30, 1994.
4) 赤松隆・長江剛志・高橋栄行, "渋滞ネットワークにおける容量パラドクスの検出法", 土木計画学研究・講演集, No22, pp.607-610, 1999.