【土木計画学研究・講演集 No.23(2) 2000年11月】

空間回帰分析への最尤法適用に関する考察[1]

A study on the application of maximum likelihood method to spatial regression analysis

中川 善典[2]・堤 盛人[3]・清水 英範[4]

By Yoshinori NAKAGAWA, Morito TSUTSUMI and Eihan SHIMIZU

1 はじめに

地価や人口などを回帰モデルによって分析(空間回帰分析)する際に生じることの多い、誤差項の空間的な系列相関に対しては、しばしば、誤差項に対して何らかの追加的なモデル化がほどこされ、最尤法によってパラメタが推定される。周知のように、最尤法が一般的に用いられるのは、主としてその漸近的な性質に基づくものである。ところが空間回帰分析においては通常の時系列分析などで想定されている状況とは大きく異なるため、漸近的な性質が必ずしも保証されない。

一方 Heijmans & Magnus (1986a) では、空間回帰分析を含む一般の場合に最尤法が、通常の意味で統計学的に望ましい性質をもつ条件を示している。

本研究では地価などの分析を目的とした空間回帰モデルのパラメタ推定における最尤法適用について Heijmans & Magnus (1986a) との関係を考察し、これを満足する枠組みを提示する。次にこの枠組みが実際の分析に活用し得ないかを検討する。

2 空間回帰分析と最尤法

空間回帰分析の手順の概略は以下の通りである。

まず地価データなど予測したい変数 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)'$ を未知パラメタ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_m)'$ の関数として、説明変数 x_{ij} を用いて次のような線形回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i (1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

を作成する。ε_i は誤差項である。これを行列を用いて $\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ とかく $(X = (x_{ij}))$。

誤差項の空間的な相関を考慮したモデル化としては (A) 空間的移動平均モデル (Spatial Moving Average Model)、(B) 空間的自己回帰モデル (Spatial Auto Regressive Model)、(C) Spatial Correlation Model などがある。これらにおいては誤差ベクトルの各成分 ε_i の期待値が 0 となり、共分散行列は

(A) $\Sigma_A(p,q) = q(I+pW)(I+pW)'$

(B) $\Sigma_B(p,q) = p\{(I-qW')(I-qW)\}^{-1}$

(C) $\Sigma_C(p,q) = pWW' + qI$

のようになる (Anselin (1986) など)。

ここで p, q は推定するべきパラメータ、またこの W は空間重み行列と呼ばれ、N 次元正方の既知定行列であり、その ij 成分は二地点 i, j 間の距離の関数で与えられる。この W は各地点間の空間的相互依存性の度合いを表すためのものである。

未知パラメタ $\boldsymbol{\beta}, p, q$ の推定には最尤法を用いるのが一般的である。$\boldsymbol{\theta} = (p, q)$ とおき、$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}$ が多次元正規分布 $\mathcal{N}(\mathbf{o}, \Sigma(\boldsymbol{\theta}))$ に従うと仮定すると、$\boldsymbol{y}$ の確率密度関数は

$$f(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma(\boldsymbol{\theta})|^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})'\Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})\right] \quad (2)$$

であるから、これを $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}$ の関数とみて、これを最大化する $\widehat{\gamma} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ が最尤推定量である。

一般に同一の確率密度関数に従う互いに独立な(スカラーまたはベクトルの)観測量をもとに最尤法を適用するとき、緩い条件の下で最尤推定値が観測数の増加とともに「よい」性質を獲得することがよく知られている。この種の最尤法を本研究では

---

[1]キーワード：地価分析、空間回帰分析

[2]学生会員、東京大学大学院

[3]正員、博(工)、同上

[4]正員、工博、同上(東京都文京区本郷7-3-1, Tel 03-5841-6128, Fax 03-5841-7453)

「複数観測の最尤法」と呼んでおく。

ところが、空間回帰分析においては、観測された n 個のデータ $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ の各成分が互いに独立であると見なせないばかりか、同一の確率密度関数に従うとも考えられない。すなわち一時点を対象とする空間回帰分析においては多次元の観測データが 1 セットしかないと考えられる。この種の最尤法を本研究では「単数観測の最尤法」と呼ぶことにする。

複数観測の最尤法と単数観測のそれとは明確に区別するべきである。単数観測の最尤法による推定値は、複数観測の最尤推定値が「よい」性質をもつ条件とはまったく別の条件を付け加えた上で「よい」性質を持つことが保証される。

定理 (Heijmans & Magnus 1986a) 確率変数 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ が n 次元正規分布

$$\mathcal{N}\big(X_n\beta_0, \Sigma_n(\boldsymbol{\theta}_0)\big)$$

に従うとする。各 $\boldsymbol{y}_i$ はスカラーである。ここで推定するべき真の未知パラメタ $\gamma_0 = (\beta_0, \boldsymbol{\theta}_0)$ の次元は n によらない定数である。そして以下の条件が成り立つと仮定する。

1. γ_0 の属するパラメタ空間は有界閉集合である。
2. $\Sigma_n(\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ の連続関数であり、全ての $\boldsymbol{\theta}$ と自然数 n とについて正数 ψ_1, ψ_2 が存在して
$$0 < \psi_1 \leq \lambda_t\big(\Sigma_n(\boldsymbol{\theta})\big) \leq \psi_2 < +\infty, t = 1, \cdots, n \tag{3}$$
が成り立つ[5]。
3. $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{\theta}$ をみたす任意の $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta}$ に対して
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{\mathrm{tr}\Sigma_n{}^{-1}(\boldsymbol{\psi})\Sigma_n{}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) - \log \Sigma_n(\boldsymbol{\theta}) + \Sigma_n(\boldsymbol{\psi}) - n\} > 0 \tag{4}$$
が成り立つ。
4. 行列 $Q_n = \dfrac{1}{n}X_n'X_n$ が逆行列を持つような自然数 n が存在して
$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{tr}Q_n < +\infty \tag{5}$$
が成り立つ。

[5] $\lambda_t(A)$ は行列 A の t 番目の固有値である。

5. 全ての $\boldsymbol{\theta}$ に対して $M(\boldsymbol{\theta}) = 0$ をみたす$\boldsymbol{\phi}$ の関数 $M(\boldsymbol{\phi})$ が存在し
$$\limsup_{n\to\infty} \max_{1\leq t\leq n} |\lambda_t(\Sigma_n(\boldsymbol{\psi}) - \Sigma_n(\boldsymbol{\theta}))| \leq M(\boldsymbol{\phi}) \tag{6}$$
が成り立つ。
6. すべての $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_0$ に対して、$M_*(\boldsymbol{\beta}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{\alpha}$ の連続関数 $M_*(\boldsymbol{\alpha})$ が存在し、すべての $\boldsymbol{\alpha}$ に対して
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})'Q_n(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'Q_n(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)} \leq M_*(\boldsymbol{\alpha}) \tag{7}$$
が成り立つ。

以上の条件が成り立つとき、最尤推定量 $\widehat{\gamma}_n = (\widehat{\beta}_n, \widehat{\theta}_n)$ が存在し、真値に確率収束する。■

一時点の空間回帰分析で使うのは単数観測の最尤法であり、その妥当性を次章においてこの定理との比較で考察する。

なお、この定理は単数観測の最尤法の一致性に関するものであるが、このほかにも多くの条件を加えることにより漸近有効性、漸近正規性も成り立つことが分かっている (Heijmans & Magnus (1986b))。空間回帰分析で使用されている検定のほとんどは推定値の漸近正規性の仮定の上に成り立っているが、実際の分析の際にはその仮定自体が成り立つかどうかが重大な問題であり、本研究の問題意識もそこにある。

3 空間回帰分析における最尤法の妥当性検討の枠組み

空間回帰分析における最尤法を前章の定理の前提条件の観点から考察する。

正規分布 $\mathcal{N}\big(X^{(n)}\boldsymbol{\beta}_0, \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)\big)$ に従って N 次元確率変数 $\boldsymbol{y}^{(n)}$ が発生したとする $(n = 1, 2, \cdots)$。ここで $\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\theta}_0$ は n によらない次元を持つ定ベクトルである。各 n について $\boldsymbol{y}^{(n)}, X^{(n)}$ を観測して $\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\theta}_0$ を最尤法で推定して推定値 $\widehat{\gamma}^{(n)} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(n)}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)})$ を得る。

こうしてつくられた $\widehat{\gamma}^{(n)}$ は、$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}$ の関数列 $\{\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta})\}_{n=1,\cdots,+\infty}, \{X^{(n)}\boldsymbol{\beta}\}_{n=1,\cdots,+\infty}$ が前章で示した条件を満たすときに真値 γ_0 に確率収束する。

ところが空間回帰分析で最尤法を適用する場合にはこの系列は存在せず、観測点数に対応するただ一つの $\Sigma^{(N)}(\boldsymbol{\theta}), X^{(N)}\beta, \hat{\gamma}^{(N)}$ があるだけである。すなわち、確率収束の概念のもととなる数列 $\{\hat{\gamma}^{(n)}\}_{n=1,\cdots,\infty}$ が存在しない. この点に、空間回帰分析への最尤法適用を Heijmans & Magnus の定理の枠組みの中で議論することの困難さがある。

そこで、いろいろな n に対して $\hat{\gamma}^{(n)}$ をつくることを試みる。観測地点が N 個あり、$(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ というデータが観測されたとする。まず行列 $X^{(N)}$ の第1行から第 m 行までをそのまま切り出して並べた行列を $X^{(m)}$ と定義する. これは最初から観測データが y_1 から y_m までしかなかったとしてつくった説明変数行列と全く同じものである。これにより $\boldsymbol{y}^{(m)}$ の平均ベクトルが $X^{(m)}\beta$ になる。

つぎに共分散行列についてである。$\boldsymbol{y}^{(N)}$ に共分散の構造を仮定し、$\Sigma^{(N)}(\boldsymbol{\theta})$ というモデルを選んだとする。このとき $(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1})$ のデータセットに対しても誤差要素モデルから共分散行列の構造 $\Sigma^{(N-1)}(\boldsymbol{\theta})$ を導入してしまうと、一つの共分散を二通りに定義したことになり論理的に矛盾が生じてしまう[6]。

そこでまず N 個のデータセット $\boldsymbol{y}^{(N)} = (y_1, y_2, \cdots, y_N)'$ に対して誤差要素モデルから共分散行列の構造 $\Sigma^{(N)}(\boldsymbol{\theta})$ を仮定する. すなわち

$$\boldsymbol{y}^{(N)} \sim \mathcal{N}\bigl(X^{(N)}\beta, \Sigma^{(N)}(\boldsymbol{\theta})\bigr)$$

である。つぎに $\bigl(\Sigma^{(N)}(\boldsymbol{\theta})\bigr)_{ij}$ をならべてつくった m 次正方行列を $\Sigma^{(m)}(\boldsymbol{\theta})$ とする。すると m 個のデータセット $\boldsymbol{y}^{(m)} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)'$ に対して必然的に

$$\boldsymbol{y}^{(m)} \sim \mathcal{N}\bigl(X_m\beta, \Sigma_m(\boldsymbol{\theta})\bigr) \tag{8}$$

となる。これは多次元正規分布の周辺分布はまた多次元正規分布であるという事実より、$\boldsymbol{y}^{(m)}$ が多次元正規分布に従うからである。

以上より $X^{(n)}, \boldsymbol{y}^{(n)} (n = 1, \cdots, N)$ をもとに $\hat{\gamma}^{(n)}$ をつくることができる。

こうして数列 $\{\hat{\gamma}^{(n)}\}, \{X^{(n)}\}, \{\Sigma^{(n)}\}$ を定義することができた。この $\{\hat{\gamma}^{(n)}\}$ が Heijmans & Magnus (1986a) の定理中の $\{\hat{\gamma}_n\}$ に対応するものであると考えると、もしも $n = N$ という観測数が最尤法適用に十分な数であればその付近の $\hat{\gamma}^{(n)}$ はほぼ一定の値をとっているであろう。逆に言えば、分析を行ったときに数列 $\{\hat{\gamma}^{(n)}\}$ をつくり、それが一つの値に落ち着く様子が見受けられれば $\hat{\gamma}^{(N)}$ は真値に十分近いことが期待される。もちろん論理的にそうなるとは言えないが、こうした判断が妥当なことが多いことをシミュレーションによって確かめている。

しかしながら前章の一致性に関する定理の仮定の中には $\liminf$ や $\limsup$ で表される、無限番目の項まで数列が定義されていないと確かめようのない条件が多く含まれいた。にもかかわらずここでは数列 $\{\hat{\gamma}^{(n)}\}, \{X^{(n)}\}, \{\Sigma^{(n)}\}$ は有限の番号までしか定義されていないので、定理の仮定を満たしているかどうかを考えることができない。というよりもむしろ、確率収束とは無限に関する概念であるから、有限個の観測データをもとにした最尤推定値が一致性をもつことなど、そもそもありえないのである。それゆえ上記の「方法」自体が妥当であることは論理的に裏付けることはできない。

4　前章の枠組みに基づく考察

これまでは空間回帰分析において誤差項の共分散行列の形が分かった上での議論をしてきたが、実際の分析においてはどの誤差要素モデルを使用するかはあらかじめ分かっていない。

前章で述べた方法が妥当なことは論理的に裏付けることはできないものの、これを空間回帰分析における誤差要素モデルの選択に応用し得ることを示唆する結果がシミュレーションから得られた。その詳細を以下に述べる。

地価の分析を想定し[7]、説明変数行列、重み行列を以下のように作成する。

- 説明変数行列 X については各行ごとに
  1列目：60,90,120,150,180,210
  2列目：500,1000,1500,2000,2500,3000
  3列目：0,3,6,9,12,15
  4列目：60,90,120,150,180,210
  の中からランダムに一つを選ぶ[8]。

[6] 例えば $\Sigma^{(N)}(\theta)$ の (1,2) 成分によって y_1 と y_2 との共分散が θ の関数として表されている。$\Sigma^{(N-1)}(\theta)$ を新たに導入すれば y_1 と y_2 との共分散を別の関数としたことになる。なぜなら $\Sigma^{(N)}$ の (1,2) 成分と $\Sigma^{(N-1)}$ のそれとは一般に異なった θ の関数だからである。$\Sigma^{(N)}$ の (1,2) 成分は y_N の存在に影響を受けている。

[7] 説明変数行列とパラメタの値は堤 他 (1998) を参考にした。

[8] 1列目は地積 (m^2)、2列目は最寄り駅までの距離 (m)、3列

- $\beta^* = (\beta_0^*, \cdots, \beta_4^*)$ をある定ベクトルとして設定する。ここでは $\beta^* = (300000, 200, -20, -2000, 200)$ とした。

- 重み行列については、ある正方形領域に二次元一様分布により N 点を発生させ、その i 番目と j 番目の点の距離を d_{ij} とする。そして

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} 1/d_{ik}} \qquad (9)$$

を ij 成分にもつ行列を重み行列 W とする。

真値 p^*, q^* をある定数として設定し(ここでは $p^* = 0.5, q^* = 5 * 10^8$)、誤差の共分散行列として

$$\Sigma_A(p, q) = q(I + pW)(I + pW)' \qquad (10)$$

を使用する。また多次元正規分布 $\mathcal{N}(X\beta^*, \Sigma_A(p^*, q^*)$ に従って Mathematica で乱数 $\boldsymbol{y}$ を発生させ、それを観測したとしてモデルAを用いてパラメタ β, p, q の最尤推定値 $\hat{\gamma}_A^{(N)}$ を求める。また3章の方法でその系列 $\{\hat{\gamma}_A^{(i)}\}_{i=1,\cdots,N}$ をつくる。その一方で、この $\boldsymbol{y}$ が Σ_A から発生したことを知らないと上でモデルCでパラメタ β, p, q の推定値 $\hat{\gamma}_C^{(N)}$ を求め、3章の方法でその系列 $\{\hat{\gamma}_C^{(i)}\}_{i=1,\cdots,N}$ をつくる。

このような実験を繰り返すと、$\{\hat{\gamma}_A^{(i)}\}$ が $i = N$ 付近でほぼ一定の値に落ち着いているならば(経験的にそこは真値に近いことが多い)、「$\{\hat{\gamma}_C^{(i)}\}$ の分散パラメタの一つの成分が一定値に落ち着かない」という傾向が見受けられた。その一例を図1,2に示す。正しい共分散行列の構造で推定を行った方が(図1)、3章の意味での推定値の系列が一定の値に落ち着きやすいのである。乱数 $\boldsymbol{y}$ を $\Sigma_C(p, q)$ に基づき発生させたときにも同様のことが言えた。

このような結果から実際の分析の際にいくつかの共分散構造の候補があるとき、それぞれを適用して3章の意味での推定値列をつくり、その値の落ち着き具合をみることが、共分散構造を決定する一助となり得ることが示唆される。

5 おわりに

本研究では地価などの分析を目的とした空間回帰モデルのパラメタ推定における最尤法適用について

目はそこから主要駅までの時間(分)、4列目は容積率(%)を想定している。

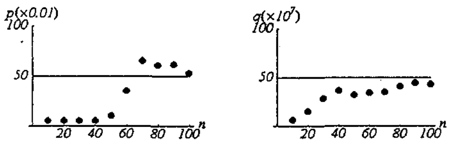

図 1: モデル A で推定した分散パラメタ

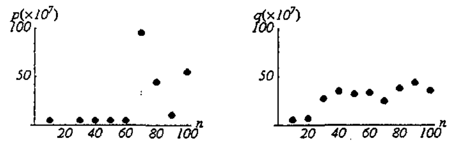

図 2: モデル C で推定した分散パラメタ

Heijmans & Magnus (1986a) との関係を考察し、これをこれを満足する枠組みを提示した。次にこれを誤差要素モデルの選択に活用し得ないかを検討した。

参考文献

1) Anselin,L. (1988), *Spatial Econometrics : Methods and models*, Kluwer Academic Publishers.

2) Heijmans,R.D.H. and Magnus,J.R. (1986a), Consistent maximum-likelihood estimation with dependent observations : the general (non-normal) case and the normal case, *Journal of Econometrics 32*, 169–88.

3) Heijmans,R.D.H. and Magnus,J.R. (1986b), On the first-order eficiency and asymptotic normality of maximum likelihood estimators obtained from dependent observations, *Statistica Neerlandica 40*, 253–85.

4) 堤 盛人・清水 英範・福本 潤也・井出 裕史(1998), 誤差項に空間的自己相関が存在する回帰モデルのパラメータ推定手法に関する考察, 土木計画学研究・論文集, No.15, 49–56.