

ロジットモデルによる経路選択を前提とした

交通ネットワーク改善プロジェクトにおける利用者便益のリンク別内訳計算法*

Estimation of Link-Based User Benefit in Transport Networks under Logit Based Route Choice

家田 仁**, ファン レ ビン***

By IEDA Hitoshi and PHAN Le Binh

1.はじめに*

各種交通施設のプロジェクト評価に当たっては通常、費用対効果分析が用いられる。その際、便益の大宗を占める利用者便益は、交通ネットワーク上のODペア毎にHarbergerの台形公式により算出し、その総和を取ることで推計するのが普通である^{1),2)}。一方、都市鉄道プロジェクトに代表される公共交通プロジェクトでは、ネットワーク上の経路選択モデルとして、操作性に優れたロジットモデルが用いられることが非常に多く、上記の台形公式を適用する際には、ODペア毎にログサム変数による期待最大効用値が用いられる。

ところがこの場合、後述のように交通ネットワークにおける利用者便益のリンク別の内訳を算出する方法が開発されていないため、あるプロジェクトが隣接する路線や周辺の区間の利用者にもたらす便益を推定するとか、時間や費用などの効用アイテム別の内訳を推計するとか、あるいは新設リンクにおける利用者便益を推計する、といったプロジェクトの計画と評価における実務ニーズに十分に答えきれていなかった。本稿は、こうした背景を踏まえて、ロジットモデルをベースとして、理論的にも問題が少なく、なおかつ実用に耐える、利用者便益のリンク別内訳の計算法を提案する。

2.問題の所在

利用者便益 B は、プロジェクトのwithケースとwithoutケースにおける交通需要 Q^w, Q^0 と効用(一般化費用) U^w, U^0 を用いて、Harberger台形公式と呼ばれる以下の式により近似的に推計される³⁾。

$$B = \frac{1}{2}(U^w - U^0)(Q^w + Q^0) \dots\dots\dots(1)$$

交通ネットワークのプロジェクトでは、上記の B を各ODペア毎に算出し、その総和を取るのが一般

的である。こうして算出される利用者便益をここでは「ODベース利用者便益」と呼ぶ。一方、上記の B をネットワークの各リンク毎に算出し、その総和を取ることで種類別の値が得られる。これをここでは「リンクベース利用者便益」と呼ぶ。

この両者の関係は、リンクの効用が確定的であるか、確率的に変動するものであるのかによって変化する。All-or-nothing配分や利用者均衡配分法および分割配分法などのように、効用が確定的な場合には、それがフロー依存性であるか否かにかかわらず、ODベース利用者便益とリンクベース利用者便益は一致し、本稿で取り上げるリンク別内訳の問題は生じない。(Appendix参照)。

ところがリンクの効用が確率的に変動する場合には、リンクの効用値の与え方によって上記の2つは必ずしも一致しない。したがって、ODベース利用者便益を基本とする以上、そのリンク別の内訳は、自明な方法によっては算出できないこととなる。

ここではリンクの効用 U が、確定項 V と、ガンベル分布に基づいて変動する確率項 ϵ の和によって構成されるロジットモデルの場合に、両者が必ずしも一致しないことを簡単な例によって示す。図1のように2つのリンク(即ち、この場合2つのパス)から構成される最も単純な交通ネットワークを想定する。

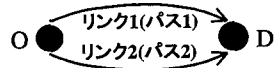


図1 最も単純な交通ネットワーク

このネットワークの各リンクにおける貨幣単位で計測された効用の確定項をwithケース、withoutケースの別に、 $V_1^w = V_1^0 = V^0$, $V_1^w = V_2^0 = V^0$, $V_2^w = V^w > V^0$ 、とする。OD交通量を $Q^w = Q^0 = Q$ とする。また、バス選択を規定するロジットモデルのパラメータを θ とする。さて、withケース、withoutケースそれぞれにおける、ODペア間の期待最大効用は、ログサム変数 $1/\theta \cdot \ln(\sum e^{\theta V_k})$ によって求められる⁴⁾ので、ODベース利用者便益 $\sum B_{OD}$ は(1)式より、

*キーワード：費用便益分析、利用者便益、交通ネットワーク
 **正会員、工博、東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻教授
 113-8656 東京都文京区本郷7-3-1、TEL03-5841-6117
 FAX03-5841-8506
 ***学生会員、工修、東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻

$$\sum B_{od} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\theta} \cdot \ln \left(\sum_{\tau} e^{\theta v_{\tau}^w} \right) + \frac{1}{\theta} \cdot \ln \left(\sum_{\tau} e^{\theta v_{\tau}^0} \right) \right] \cdot (Q^w + Q^0) \dots\dots (2)$$

となる。今、

$$e^{\theta v_{\tau}^w} = \alpha \cdot e^{\theta v_{\tau}^0} \quad (\alpha > 1) \dots\dots\dots (3)$$

と置き、(2)式を変形すると

$$\sum B_{od} = \frac{Q}{\theta} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{2} \right) \dots\dots\dots (4)$$

となる。

パス k の選択確率 p_k は with ケース、without ケースの別に、

$$p_k^w = \frac{e^{\theta v_k^w}}{\sum_{\tau} e^{\theta v_{\tau}^w}}, \quad p_k^0 = \frac{e^{\theta v_k^0}}{\sum_{\tau} e^{\theta v_{\tau}^0}} \dots\dots\dots (5)$$

により求められる。ここで、各リンクにおける効用の確定項 V と各リンクの交通量を用いて、台形公式により各リンクの利用者便益を計算し、その総和をとったものをリンクベース利用者便益 $\sum B_{link}$ としてみよう。すると、

$$\sum B_{link} = \sum_{\tau} \frac{1}{2} (V_{\tau}^w - V_{\tau}^0) (p_{\tau}^w \cdot Q^w + p_{\tau}^0 \cdot Q^0) \dots\dots\dots (6)$$

となる。前述のいくつかの仮定を取り入れて、(6)式を変形すると、

$$\sum B_{link} = \frac{Q \ln \alpha}{2\theta} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} + \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (7)$$

となる。よって、

$$\sum B_{link} - \sum B_{od} = \frac{Q}{\theta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} + \frac{1}{2} \right) \ln \alpha - \ln \frac{\alpha + 1}{2} \right] \dots\dots\dots (8)$$

となる。大カッコ内の式の符号を $\alpha > 1$ の領域について調べると負であることが簡単に確認できる。これより、この単純なケースでは、

$$\sum B_{link} \neq \sum B_{od} \dots\dots\dots (9)$$

であること、即ち、(2)式による OD ベース利用者便益と、(6)式によるリンクベース利用者便益とは必ずしも一致するものではないことが確認される。

この不一致の本質は次のように理解されよう。今、利用者の前に A と B の2つの選択肢があり、その効用 U_A 、 U_B が確率的に変動しているとする。これに伴って両者の効用の差 $U_A - U_B$ も確率的に変動する。この時、 $U_A - U_B > 0$ となる人は A を選択し、 $U_A - U_B < 0$ となる人は B を選択する。選択する前の利用者全員にとって、選択肢 A の効用の期待値は $E(U_A)$ で与えられるが、 A を選択した人にとっての期待値は $U_A - U_B > 0$ という条件付きで、 $E(U_A | U_A - U_B > 0)$ となる。この両者は一般的には

一致しない。 B についても同様である。もう少し言い換えてみよう。利用者はそれぞれ効用を最大化するべくパスを選択している。あるパスの選択を決定した人にとってみれば、そのパスの効用が他のパスの効用よりも高いと認知したからこそ、そのパスを選択したわけである。従って、そのパスを選択した人々にとって、そのパスの事後的な効用の期待値(その全てのパスについての効用の期待値、即ち期待最大効用がログサム変数で与えられる)は、選択以前に前提されているパスの効用の確定項とは必ずしも一致しないわけである。

3.利用者便益のリンク別内訳の計算法

(1)問題の定式化

以上のように、パス k の事後的な効用の期待値 \bar{V}_k は、効用の確定項 V_k と必ずしも一致しない。通常、パス効用はパスを構成するリンク効用の総和として定式化されるので、本稿では上記の不一致に伴う偏差 ΔV_k を、各リンクにおける事後平均効用と効用の確定値の偏差 ΔV_a に帰着されるものと解釈し、

$$\bar{V}_k = V_k + \Delta V_k = \sum_a (V_a + \Delta V_a) \cdot \delta_k^a \dots\dots\dots (10)$$

と表すことにする。ここで a はリンクを表す。また、 δ_k^a は、リンク a がパス k 上にあるか否かを示すクロネッカー記号である。本稿では、こうした事後的な偏差を考慮に入れた効用の期待値を利用している人々たちにとっての効用という意味で、「事後平均効用」と呼ぶことにする。

さて、任意の OD ペア間の期待最大効用は、前述のようにログサム変数によって算出されるが、上記の各パスの事後平均効用をパスの選択率で加重平均した値は、理論的に算出される期待最大効用値と一致しなければならない。よって、 $p_{rs,k}$ を OD ペア rs におけるパス k の選択率、 $\delta_{rs,k}^a$ を OD ペア rs についてのクロネッカー記号とすると、次式が成り立たねばならない。

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{\tau} p_{rs,\tau}^w \cdot \left[\sum_a (V_a^w + \Delta V_a^w) \cdot \delta_{rs,\tau}^w \right] &= \frac{1}{\theta} \ln \left(\sum_{\tau} e^{\theta v_{\tau}^w} \right) \text{ for } \forall r, s \\ \sum_{\tau} p_{rs,\tau}^0 \cdot \left[\sum_a (V_a^0 + \Delta V_a^0) \cdot \delta_{rs,\tau}^0 \right] &= \frac{1}{\theta} \ln \left(\sum_{\tau} e^{\theta v_{\tau}^0} \right) \text{ for } \forall r, s \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (11)$$

さて、OD ベース利用者便益 $\sum_{rs} B_{od}$ は、ログサム変数を用いて以下のように算出される。

$$\sum_{rs} B'_{OD}{}^s = \sum_{rs} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\theta} \cdot \ln \left(\sum_k e^{\theta V_{rs}^k} \right) - \frac{1}{\theta} \cdot \ln \left(\sum_k e^{\theta V_{rs}^k} \right) \right] (Q_{rs}^w + Q_{rs}^0) \quad (12)$$

一方、前述の各リンクの事後平均効用を用いて、同じく台形公式により利用者便益を算出すると、

$$\sum_a B_{link}^c = \sum_a \frac{1}{2} [(V_a^w + \Delta V_a^w) - (V_a^0 + \Delta V_a^0)] (Q_a^w + Q_a^0) \dots (13)$$

となる。この両者は、実用上一致する必要があるので、

$$\sum_a B_{link}^c = \sum_{rs} B'_{OD}{}^s \dots (14)$$

でなければならない。

(11)式及び(14)式において、未知数は各リンクについての事後平均効用と確定項の偏差 ΔV_a^0 と ΔV_a^w である。何らかの方法によってこれらを求めることができれば、(13)式の右辺の Σ の中の式を用いて、通常用いられる OD ベースでの利用者便益の値及び OD ペア毎の期待最大効用の値と整合させつつ、各リンクにおける利用者便益を算出することが可能となる。

(2) 偏差 ΔV_a^0 と ΔV_a^w の数値計算法

対象とする交通ネットワークにおける OD ペアの数を N 、リンクの数を L とすると、満足すべき方程式 (11)式と(14)式において、未知数 ΔV_a^0 と ΔV_a^w の数は $2L$ 、方程式の数は $2N + 1$ となる。多くの場合、

$$2L < 2N + 1 \dots (15)$$

となるので(ちなみに4章(1)の事例では $L = 10$ 、 $N = 12$)、本稿では、(14)式を制約条件として、(11)式を近似的に満足するような ΔV_a^0 と ΔV_a^w を求めることとする。この場合、(11)式の左辺と右辺の誤差の二乗和を目的関数、(14)式を制約条件とする最小化問題とすればよい。この問題に Lagrange 乗数法を適用すると、最終的には単なる連立一次方程式の問題に帰着され、簡単に解くことができる。

(3) 本方法の応用

(a) 新設リンクにおけるリンクベース利用者便益の算出法

この方法を用いると、ネットワークにリンクが新設される場合に、その当該リンクにおいて発生する利用者便益を算出することもできる。一般に台形公式を用いて利用者便益を求める場合、with ケースと without ケースの交通量と効用値を必要とする。With ケースにおいてリンクが新設される場合、without ケースにおける交通量はゼロとすればよい

が、without ケースにおける効用値をどのような値とすべきかについては、従来のところ十分説得力のある方法論がない。この場合、新設リンク a において、without ケースの偏差項 ΔV_a^0 を未知数とする代わりに、確定項と偏差項の和 $(V_a^0 + \Delta V_a^0)$ を未知数として、本稿の方法を適用すれば、既設のリンクの場合と同様に、新設リンクにおける利用者便益を算出することが可能となる。適用例を4章に示す。

(b) 利用者便益の効用アイテム別内訳の算出法

この方法を用いて、各リンクにおいて発生する利用者便益の、例えば時間短縮、費用節減、混雑緩和などの効用アイテム別の内訳を算出することも可能である。具体的には、リンクにおける効用の確定項 V_a を構成する各効用アイテムに偏差項 ΔV_a を適宜振り分けてやればよい。各効用アイテムの大きさに比例させて割り振るのが最も素直な方法であろう。

4. 仮想ネットワークへの適用例

(1) 既設ネットワークの改良の場合

本稿で提案する方法の適用例を以下に示す。ネットワークの構造は、図2に示す通りである。ノード4から2へ至る破線のリンクは次項(2)のリンクを新設する場合に該当する。

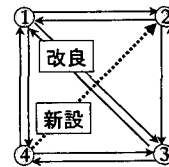


図2 適用例のネットワーク構造

まず、既設ネットワークのリンクの内、ノード1と3を結ぶリンクの効用を改善する事例を取り上げる。仮定した、各リンクの効用の確定項、OD 交通量(ここでは簡単のため、with, without 両ケースで不変とする。)を表1-1(2)と表1-2(2)にあげる。

ここで経路選択を表現するロジットモデルのパラメータを $\theta = 0.19$ とする。リンクフローとログサム変数は表1-1(5)と表1-2(3)のように計算される。本稿の方法によって事後平均効用 $(V_a + \Delta V_a)$ を算出し、利用者便益のリンク別の内訳を計算すると、表1-1(4)、(6)のようになる。この場合、(11)式の右辺と左辺の値の合致度を決定係数で示すと0.965となっており、概ね良好な結果となっている。OD ベース利用者便益とリンクベース利用者便益とは、当然ながら合致

する。効用の確定項が改良されたリンクのみならず、確定項が変化しない他のリンクでも利用者便益が生じているが、これは、利用者のランダムな選択行動を通じて、これらのリンクでも事後平均効用が改良されたためと解釈される。

表 1-1 既設ネットワークの改良ケース(1)

(1) link	(2) V_a		(3) ΔV_a		(4) $V_a + \Delta V_a$		(5) リンクフロー		(6) リンク別 便益
	without	with	without	with	without	with	without	with	
1 → 2	-10	-10	0.01	0.08	-9.99	-9.92	224	178	13.96
2 → 1	-10	-10	0.01	0.05	-9.99	-9.95	132	101	3.96
2 → 3	-5	-5	0.03	0.05	-4.97	-4.95	204	158	2.95
3 → 2	-5	-5	-0.03	0.04	-5.03	-4.96	312	282	21.15
3 → 4	-10	-10	-0.05	0.02	-10.05	-9.98	134	137	9.28
4 → 3	-10	-10	-0.02	0.00	-10.02	-10.00	132	133	2.28
4 → 1	-20	-20	0.21	0.34	-19.79	-19.66	48	47	6.22
1 → 4	-20	-20	0.18	0.37	-19.82	-19.63	116	113	22.37
1 → 3	-17	-14	2.77	1.98	-14.23	-13.02	31	79	66.25
3 → 1	-17	-14	3.22	1.94	-13.78	-13.06	20	51	25.82
合計									174.24

表 1-2 既設ネットワークの改良ケース(2)

(1) O D	(2) OD 交通量	(3) ログサム変数		(4) OD別 便益
		without	with	
1 2	100	-10.00	-10.00	0.10
1 3	150	-14.69	-14.01	101.30
1 4	120	-19.95	-19.92	3.72
2 1	50	-10.00	-10.00	0.05
2 3	50	-5.00	-5.00	0.00
2 4	30	-15.00	-15.00	0.00
3 1	100	-14.69	-14.01	67.53
3 2	200	-5.00	-5.00	0.00
3 4	100	-10.00	-10.00	0.00
4 1	50	-19.95	-19.92	1.55
4 2	30	-15.00	-15.00	0.00
4 3	100	-10.00	-10.00	0.00
合計				174.25

表 2-1 リンクを新設するケース(1)

(1) O D	(2) OD 交通量	(3) ログサム変数		(4) OD別 便益
		without	with	
1 2	100	-10.00	-10.00	0.00
1 3	150	-14.69	-14.69	0.00
1 4	120	-19.64	-19.64	0.00
2 1	50	-10.00	-10.00	0.00
2 3	50	-5.00	-5.00	0.00
2 4	30	-15.00	-15.00	0.00
3 1	100	-14.69	-14.69	0.00
3 2	200	-5.00	-5.00	0.00
3 4	100	-10.00	-10.00	0.00
4 1	50	-19.95	-19.87	4.07
4 2	30	-15.00	-13.42	47.28
4 3	100	-10.00	-10.00	0.26
合計				51.61

表 2-2 リンクを新設するケース(2)

(1) link	(2) V_a		(3) ΔV_a		(4) $V_a + \Delta V_a$		(5) リンクフロー		(6) リンク別 便益
	without	with	without	with	without	with	without	with	
1 → 2	-10	-10	0.00	0.00	-10.00	-10.00	223	223	0.00
2 → 1	-10	-10	0.00	0.00	-10.00	-10.00	132	134	-0.04
2 → 3	-5	-5	0.00	0.00	-5.00	-5.00	203	203	-0.01
3 → 2	-5	-5	0.00	0.00	-5.00	-5.00	335	315	-0.43
3 → 4	-10	-10	0.00	0.00	-10.00	-10.00	134	134	0.00
4 → 3	-10	-10	0.00	0.02	-10.00	-9.98	132	111	2.24
4 → 1	-20	-20	0.23	0.47	-19.77	-19.53	48	46	11.25
1 → 4	-20	-20	0.26	0.26	-19.74	-19.74	93	93	0.03
1 → 3	-17	-17	3.59	3.59	-13.41	-13.41	53	53	0.01
3 → 1	-17	-17	3.59	3.60	-13.41	-13.40	20	20	0.22
4 → 2	-14	-14	1.35	1.35	-15.98	-12.65	0	23	38.34
合計									51.62

(2) リンクを新設する場合

ノード 4 から 2 へ至るリンクを新設したケースを表 2-1、表 2-2 に示す。この場合、新設リンクの without ケースにおける事後平均効用が表 2-2(4)に計算されているのが分かるであろう。この場合も、新設リンクばかりでなく、他のリンクにも利用者便益が発生しているのが理解される。(表 2-2(6)参照)

Appendix

利用者均衡配分(UE)において OD ベース利用者便益とリンクベース利用者便益が一致することの証明

リンクベース利用者便益は次式により定義される

$$\sum_a B_{link}^a = \sum_a \frac{1}{2} (V_a^w - V_a^o) (Q_a^w + Q_a^o) \dots\dots\dots (i)$$

(i)式の右辺を展開した項の一つ、例えば $\sum_a V_a^w Q_a^w$ は、

$$\begin{aligned} \sum_a V_a^w Q_a^w &= \sum_a \left[V_a^w \sum_{rs} \sum_k Q_{rs,k}^w \cdot \delta_{rs,k}^a \right] \\ &= \sum_{rs} \sum_k \sum_a (V_a^w \cdot Q_{rs,k}^w \cdot \delta_{rs,k}^a) \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

ここで、 $\sum_a V_a^w \cdot \delta_{rs,k}^a = V_{rs,k}^w \dots\dots\dots (iii)$

により、(ii)式は以下のように変形される。

$$\sum_a V_a^w Q_a^w = \sum_{rs} \sum_k V_{rs,k}^w \cdot Q_{rs,k}^w \dots\dots\dots (iv)$$

また、利用者均衡配分の特性により、

$$V_{rs,k}^w = V_{rs}^w \text{ for } \forall k \text{ s.t. } Q_{rs,k}^w \neq 0 \dots\dots\dots (v)$$

が成り立つから、(iv)式はさらに以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \sum_a V_a^w Q_a^w &= \sum_{rs} \sum_k V_{rs}^w \cdot Q_{rs,k}^w = \sum_{rs} V_{rs}^w \sum_k Q_{rs,k}^w = \sum_{rs} V_{rs}^w Q_{rs}^w \\ &\dots\dots\dots (vi) \end{aligned}$$

(i)式の他の項も同様に変形されるので、再び(i)式は、

$$\sum_a B_{link}^a = \sum_{rs} \frac{1}{2} (V_{rs}^w - V_{rs}^o) (Q_{rs}^w + Q_{rs}^o) \dots\dots\dots (vii)$$

となる。上式の右辺は OD ベース利用者便益の定義 $\sum_{rs} B_{OD}^a$ に他ならない。

よって、リンクベース利用者便益と OD ベース利用者便益は一致する。最短経路への all-or-nothing 配分は利用者均衡配分法に内包されるので、これについても証明されたこととなる。又、分割配分方法は利用者均衡配分の近似解にほかならないから、同じく上記が成立する。

参考文献

- 1) 運輸省鉄道局監修：鉄道プロジェクトの費用対効果分析マニュアル99，(財)運輸施策研究機構，1999年6月
- 2) 道路投資の評価に関する指針検討委員会編：道路投資の評価に関する指針(案)，(財)日本総合研究所，1998
- 3) 森杉 寿芳：社会資本整備の便益評価，頸草書房，1997
- 4) 土木学会編：非集計行動モデルの理論と実際，土木学会(丸善)，1995